

Contrôle continu 1 – algèbre linéaire

Exercice 1 (vrai/faux). Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant par un contre-exemple lorsque l’assertion est fausse, et en donnant une démonstration ou en citant convenablement le cours sinon. Soit E un espace vectoriel. Les familles considérées sont des familles de E .

1. Toute famille contenant une famille libre est libre.
2. Soit $k \leq n$ deux entiers et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs E telle que la famille restreinte aux k premiers termes est génératrice. Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice.
3. Toute famille libre contient une famille génératrice.
4. Toute famille génératrice peut-être complétée en une base.
5. Soit F un sous-espace vectoriel de E . De toute base de E on peut extraire une base de F .
6. Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4.
7. Soit (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille génératrice de E et $n = \dim(E)$. Alors n est supérieur ou égal à 4.

Exercice 2. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto x, \quad f_3 : x \mapsto \sin(x).$$

1. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on peut, par exemple, évaluer en des réels bien choisis, étudier le comportement en $+\infty$).
2. Est-ce que la famille (f_1, f_3) engendre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
3. Quelle est la dimension de l’espace vectoriel engendré par la famille (f_1, f_3) ?

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux ensembles suivants :

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}, \text{ et } G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 2x + y\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que le vecteur $u := (1, 2, 1)$ est dans F puis que $F = \text{Vect}(u)$.
3. Montrer que si $e_2 := (0, 1, 0)$ et $e_3 := (0, 0, 1)$ alors la famille (u, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que G n’est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. On pose dans $\mathbb{R}^2$: $u_1 = (1, 2)$, $u_2 := (-1, 1)$, $v_2 := (1, 3)$, $v_3 := (1, 0)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) engendre $\mathbb{R}^2$.
2. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer que la famille (u_1, v_2, v_3) engendre $\mathbb{R}^2$.
4. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Dans l'espace des polynômes on considère l'ensemble suivant :

$$E := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } P = \mu X^2 + (2\lambda - 3\mu)X + \lambda\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer (sans calcul) que la dimension de E est inférieure ou égale à 3.
3. Montrer que les vecteurs $P_1 := X^2 - 3X$ et $P_2 := 2X + 1$ sont dans E et que la famille $\mathcal{B} := (P_1, P_2)$ est une base de E .
4. Vérifier que $P := X^2 - X + 1$ est dans E et écrire ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.