

Master 1 Mécanique
UE Méthodes Numériques pour la Mécanique des Fluides

Examen final
Documents de cours et de TD non autorisés
Calculatrice non autorisée
Durée 3 heures

Toutes les réponses doivent être rapportées sur votre feuille d'examen.

Exercice 1 : Modification d'un schéma SPH

Dans la méthode SPH classique, le gradient discret d'une fonction f évalué en un point $\vec{x}_i$ peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} f_i = \sum_j f_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (1)$$

De la même manière, l'opérateur divergence discret d'un champ $\vec{f}$ peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_j \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (2)$$

Dans ces deux formules, $f_i = f(\vec{x}_i)$ et $\vec{f}_i = \vec{f}(\vec{x}_i)$, ω_j est le volume de la particule j et le gradient du noyau W est noté $\vec{\nabla} W_{ij} = \vec{\nabla} W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)$. On applique tout d'abord ces opérateurs de discrétisations au système d'équations d'Euler compressible (ici sans terme source) :

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \\ \frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u} \end{cases} \quad (3)$$

1. Détailler la discrétisation de ces équations avec l'utilisation des opérateurs discrets SPH mentionnés au dessus.
2. Dans les membres de droites du système obtenue, mettre les équations sous la forme suivante :

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j \Phi_{ij}^\rho, \quad \frac{D\vec{u}_i}{Dt} = \sum_j \Phi_{ij}^{\vec{u}} \quad (4)$$

préciser ces termes de flux Φ_{ij}^ρ et $\Phi_{ij}^{\vec{u}}$.

3. Pour étudier les propriétés de ce schéma, on se propose de calculer tout d'abord la force exercée par la particule j sur la particule i : $\vec{F}_{j \rightarrow i} = m_i \Phi_{ij}^{\vec{u}}$. Donner ensuite la force réciproque de i sur j . Comment sont-elles l'une par rapport à l'autre ? Comment devraient-elles être ? Selon quel principe ?

4. De façon analogue, pour la conservation de la masse, on se propose de calculer la quantité $Q_{j \rightarrow i} = \omega_i \Phi_{ij}^\rho$ et sa réciproque $Q_{i \rightarrow j}$. On devrait observer que $Q_{j \rightarrow i} = -Q_{i \rightarrow j}$. Est-ce bien le cas ?

Il existe d'autres discrétisations de ce système qui évitent ces problèmes. On se propose d'en étudier une, basée sur une modification des opérateurs de discrétisation. Tout d'abord, on propose un nouvel opérateur de discrétisation du gradient tel que :

$$\vec{\nabla} f_i = \sum_j (f_j + C f_i) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (5)$$

avec C une constante que l'on va chercher à déterminer.

5. Donner la nouvelle expression de Φ_{ij}^u avec cet opérateur de discrétisation.
6. Calculer les nouvelles forces $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ et $\vec{F}_{i \rightarrow j}$.
7. En imposant le respect de la contrainte qui avait été auparavant violée (cf. question 3), déterminer la valeur de la constante C .
8. Écrire l'opérateur (5) avec cette constante et essayer de retrouver l'opérateur continu qu'il est censé discrétiser. Pouvait-on s'attendre à cette forme ?

Finalement, on propose aussi un nouvel opérateur de discrétisation de la divergence tel que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_i = \sum_j (\vec{f}_j + D \vec{f}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (6)$$

avec D une autre constante que l'on va aussi chercher à déterminer.

9. Donner la nouvelle expression de Φ_{ij}^ρ avec cet opérateur de discrétisation.
10. Calculer les nouvelles quantités $Q_{j \rightarrow i}$ et $Q_{i \rightarrow j}$.
11. En imposant que $Q_{j \rightarrow i} = -Q_{i \rightarrow j}$, déterminer la valeur de la constante D .
12. Écrire l'opérateur (6) avec cette constante et essayer de retrouver l'opérateur continu qu'il est censé discrétiser. Pouvait-on s'attendre à cette forme ?

Exercice 2 : Instabilité de Rayleigh-Bénard

Dans le problème de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, on étudie comment un écoulement se met en place entre deux plaques horizontales maintenues à température fixe T_{haut} et T_{bas} avec $T_{bas} = T_{haut} + \Delta T$ plus chaud. Cette différence de température induit des petites différences de densité dans le fluide, qui dans le champ de gravité terrestre, donne naissance à une force d'Archimède qui peut mettre en mouvement le fluide. On parle de la convection naturelle.

Comme dans le TP1 MNMF, on considère un domaine de fluide à deux dimensions périodique en x et la gravité est orienté vers la bas. Utilisant l'approche $\omega - \psi$, dans l'approximation Boussinesq et après adimensionnement, on aboutit sur les équations

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (9)$$

Ces équations doivent être résolues sur le domaine rectangulaire $\mathcal{D} : (x, y) \in [0, \lambda] \times [0, 1]$ et on note $\theta = (T - T_{haut})/\Delta T$ le champ de température relatif dans le fluide. On trouve deux paramètres sans dimension

$$\lambda = \frac{L}{H}, \quad Ra = \frac{\beta \Delta T H^3}{\nu \kappa} \quad (10)$$

respectivement la longueur adimensionnée du canal et le nombre de Rayleigh¹. Les parois du haut et du bas sont supposées imperméables et sans glissement et la température relative y est imposée. Ceci revient à utiliser les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \psi|_{y=0} &= 0, & \omega|_{y=0} &= 0, & \theta|_{y=0} &= 1 \\ \psi|_{y=1} &= 0, & \omega|_{y=1} &= 0, & \theta|_{y=1} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Les bords gauche et droite du domaine ne correspondent pas à des parois car le système est supposé périodique.

Équations du problème discret

On discrétise le problème utilisant une méthode des différences finies similaire à celle utilisée lors du TP1. Les équations matricielles pour le schéma d'avancement temporel deviennent

$$\left(\mathcal{I} - \frac{\delta t}{2} \mathcal{PD}\right) \omega^{n+1} = \left(\mathcal{P} + \frac{\delta t}{2} \mathcal{PD}\right) \omega^n + \frac{\delta t}{2} (3\mathbf{NL}_\omega^n - \mathbf{NL}_\omega^{n-1}) + \dots \quad (12a)$$

$$\left(\mathcal{I} - \frac{\delta t}{2} \mathcal{PD}\right) \theta^{n+1} = \left(\mathcal{P} + \frac{\delta t}{2} \mathcal{PD}\right) \theta^n + \frac{\delta t}{2} (3\mathbf{NL}_\theta^n - \mathbf{NL}_\theta^{n-1}) + \mathbf{ST} \quad (12b)$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{P} + \mathcal{PD}) \psi^{n+1} = -\omega^{n+1} \quad (12c)$$

Les matrices $\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{PD}, \mathcal{PA}_x, \mathcal{PA}_y$ sont les mêmes que celles utilisées en TP1 et $\omega^n, \psi^n, \theta^n$ sont de grands vecteurs colonnes contenant les valeurs nodales à des temps t_n de la vorticité, la fonction de courant et la température relative. Les deux termes non-linéaires de l'équation de vorticité et de température peuvent être écrits comme

$$\mathbf{NL}_\omega^n = -(\mathcal{PA}_y \psi^n)(\mathcal{PA}_x \omega^n) + (\mathcal{PA}_x \psi^n)(\mathcal{PA}_y \omega^n) \quad (13a)$$

$$\mathbf{NL}_\theta^n = \dots \quad (13b)$$

1. Rappeler la structure des matrices $\mathcal{PD}$ et $\mathcal{PA}_x$.
2. Dans l'éq. (12a) les pointillés correspondent à la discrétisation du terme $Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}$ selon la méthode d'Euler explicite. Écrire ce terme à l'aide des matrices et vecteurs colonnes définis plus haut.
3. Dans l'éq. (12b), le vecteur colonne $\mathbf{ST}$ est présent seulement pour prendre en compte les conditions aux limites sur θ , cf. éq. (14). Spécifier son contenu.
4. Dans l'éq. (13b) les pointillés correspondent à la discrétisation du terme non-linéaire présent dans l'équation de la température. Écrire ce terme à l'aide des matrices et vecteurs colonnes définis plus haut.
5. On souhaite faciliter le déclenchement de l'instabilité : on initialise avec un champ de vitesse tel que :

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin(2x/\lambda) \cos(2y) \\ v &= u_0 \cos(2x/\lambda) \sin(2y) \end{aligned} \quad (14)$$

avec u_0 une faible amplitude ($u_0 = 10^{-3}$). Calculer la fonction courant ψ_0 correspondant à ce champ de vitesse.

1. Ces définitions ne sont pas importantes pour résoudre la question d'examen et on ne détaille donc par l'origine de ces formules ici

Implémentation

Pour la suite de l'exercice (questions 5 à 14), se reporter aux instructions dans le notebook.

Exercice 3 : Résolution de l'équation de Burgers avec une méthode pseudo-spectrale

Les premières questions de chaque sous-partie peuvent être résolues de façon indépendantes (sans passer nécessairement par l'implémentation).

Approche fluide parfait

Soit le problème mono-dimensionnel pour le champ de vitesse $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

sur le domaine $[0, 2\pi]$ périodique, avec la condition initiale $u(x, 0) = 1 + e^{-(x-\pi)^2}$.

On se propose d'utiliser une méthode pseudo-spectrale pour résoudre ce problème. Dans l'espace de Fourier on a alors :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \hat{u}(k, t) e^{ikx} \quad (16)$$

avec $\mathcal{K}$ l'ensemble de M nombres d'onde.

1. Préciser la répartition des M points x_j (tels que $j \in \{0, \dots, M-1\}$) du maillage dans l'espace physique.
2. Préciser l'espace $\mathcal{K}$ (ses bornes et comment sont arrangés les nombres d'onde).

On utilisera un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 pour la discrétisation temporelle du terme de transport.

3. Injecter le développement de Fourier de u dans l'équation (15) et retrouver sa transformée dans l'espace de Fourier :

$$\hat{u}_k^{n+1} = O_1 \cdot \hat{u}_k^n + O_2 \cdot dt \left(\frac{3}{2} \widehat{NL}_k^n - \frac{1}{2} \widehat{NL}_k^{n-1} \right) \quad \text{pour } k \in \mathcal{K} \quad (17)$$

où $\widehat{NL}$ est la transformée de Fourier du terme de transport non-linéaire. On explicitera ce terme ainsi que les opérateurs O_1 et O_2 .

4. Implémentation : se reporter au notebook pour les instructions.

Approche fluide visqueux

Pour remédier à cela, on résoud maintenant le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

On discrétisera le nouveau terme avec un schéma de Crank-Nicolson.

7. Discrétiser ce nouveau problème (18) en adoptant une démarche similaire à la partie précédente. On mettra le schéma sous la même forme (17) en précisant si les opérateurs O_1 ou O_2 sont modifiés. Est-ce que l'expression de $\widehat{NL}_k$ est modifiée ?
8. Implémentation : se reporter au notebook pour les instructions.