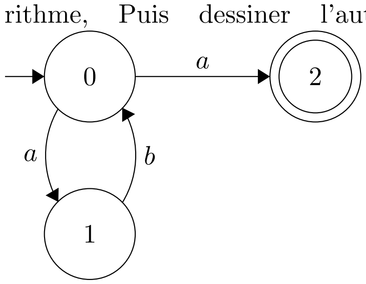
L3 Informatique. Année 2023-2024. Partiel de LF. durée 2H30, lisez la suite de ce paragraphe, merci . Seuls Document : manuscrits et poly cours-TD. Pour avoir les points, répondre aux questions. Si vous savez que vous ne savez pas répondre, c'est mieux de ne rien dire plutôt que de recopier des morceaux du cours que vous avez sous la main, car cela énerve juste le correcteur. Quand vous commencez une copie remplissez tout de suite l'encart nom et prénom et le reste. Quand le temps est écoulé, posez vos stylo, rangez vos affaires, dirigez vous vers la porte de sortie, au fond (et pas sur la grande table devant), la vous pourrez poser votre copie sur le tas correspondant à votre groupe, (groupe 1 et 2 c'est ceux du prof), prenez un corrigé et sortez. Les sorties avec plus de 5mm de retard sont pénalisées de 0.5 points. Le partiel est un peu long mais sera noté sur plus que 20 (j'obtient ainsi une note plus précise). Les seules questions aux surveillants sont celles portant sur une ambiguité d'enoncé et il n'y en a pas, donc ne soyez pas trop décu si je ne réponds pas souvent à vos questions. Anonymer vos copies, c'est plus confortable pour corriger, car cela assure qu'on note sans tenir compte de la personne. Vous devrez bien faire attention a rendre vos copies les unes dans les autres, voire mieux, a recopier le numéro identifiant la premiere copie qui est la copie "maitre", sur les autres copies. Vous pourrez voire vos copies corrigées d'ici deux semaines, fin du TD, si vous avez mis votre copie dans le tas du bon groupe.

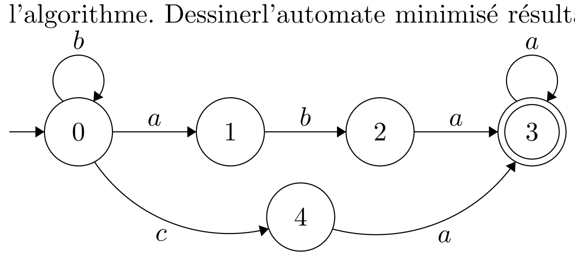
1 Determinisation (cadeau)

Faire tourner l'algorithme de déterminisation sur l'automate suivant. Ecrivez surtout les étapes pour montrer que vous maitrisez l'algorithme, Puis dessiner l'automate déterminisé.



2 Minimisation (facile)

Soit A, un automate avec 5 états, sur un alphabet de trois lettres, a, b, c numérotés de 0 à 4, avec les transitions suivantes : $(0,b,0)$, $(0,a,1)$, $(1,b,2)$, $(2,a,3)$, $(3,a,3)$, $(0,c,4)$, $(4,a,3)$. L'état initial est 0, l' état 3 est final. Cet automate n'est pas complet. Faire tourner l'algorithme de minimisation sur l'automate suivant. Attention, décrivez bien les étapes pour montrer que vous maitrisez l'algorithme. Dessinerl'automate minimisé résultant.



3 Arden (pas trop dur)

Donner un automate pour le langage suivant : L_0 le langage des mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ dont la longueur est un multiple de 5 (cinq). Par exemple Zero, cinq, dix sont des multiples de cinq. Donc ϵ, aaaba, bbaabbaabb sont donc des mots reconnus. Poser le système d'équations associé à l'automate, résoudre en utilisant le lemme d'Arden, et en déduire une expression rationnelle pour L_0. Attention, décrivez bien les étapes pour montrer que vous maitrisez l'algorithme.

4 Grammaire (embrouille)

Proposer une grammaire G, telle que les mots du langage générés par cette grammaire soient les expression rationnelle sur l'alphabet $\{a, b\}$. Commencer par m'écrire deux ou trois exemples de mots de ce langage, ce pour ne pas vous tromper. Ensuite, préciser quel est l'alphabet des terminaux, toujours parce que cela vous aide. Indice : Cette grammaire est en fait très simple. On pourra s'inspirer de la grammaire utilisée pour générer les expression arithmétiques. Votre grammaire est elle ambigüe ?

justifiez pour avoir les points

5 Cours. (relax)

Dire en UNE PHRASE (pas deux phrases) : 1- Quelle condition simple doivent vérifier deux états d'un automates, pour qu'il se retrouvent fusionné dans l'algorithme de minimisation. 2- Comment sont définis les états de l'automate minimal associés à un langage reconnaissable ?

6 Pompage (scolaire)

Soit $L = \{w \in (a+b)^* \mid |w|_a < |w|_b\}$. Démontrer que L n'est pas rationnel en utilisant la contraposée du lemme de la pompe, (et pas autre chose).

7 Expression rationnelle (truc)

Soit a une lettre.
1- Donner une expression rationnelle factorisée de $a|a = a + a$.
2- Donner une expression rationnelle de $L = \Sigma_{i=0}^{9} a^i$, factorisée en utilisant seulement 6 (six) symboles, (pas sept symbole, pas huit symbole) sans utiliser de Σ, ni de symboles complémentaire. Indice : on a le droit d'utiliser la puissance. Il y a un truc si vous ne le voyez pas passez à la suite

8 Decidabilité (pas si dur)

Un préfixe d'un mot w est un facteur qui commence w. "bon" est préfixe de "bonjour" Un langage est dit "préfixe", si pour tout mot du langage, tous ses préfixes sont dans le langage. Montrer que la problème suivant est décidable : "Soit A un automate, le langage reconnu par A est-il préfixe ?" Préciser la complexité en temps.

9 Construction (faisable)

Soit A un alphabet. Un langage L de A^* est dit local s'il existe deux sous-ensembles $P, S \subset A$ et un sous ensemble $N \subset A.A$ tels que $L = (PA^* \cap A^*S) \setminus A^*NA^*$. La terminologie s'explique ainsi : pour tester si un mot appartient à L, il suffit de vérifier que sa première lettre est dans P , sa dernière lettre est dans S, et que ses facteurs de longueur 2 ne sont pas dans N . Toutes ces vérifications sont "locales".
1- Montrer que $(abc)^+$ est un langage local.
2- Montrer qu'un langage local L sur A est reconnu par un automate ayant un nombre d'états égal au cardinal de l'alphabet + 1. Construire cet automate.

10 Un peu de math. (difficile)

Soient x, y, z trois mots non vides. Montrer que si $x.y = z.x$ et $y.x = x.z$, alors $y = z$. Indication : Il faut réutilisez plusieurs fois les égalités $x.y = z.x$ et $y.x = x.z$, ensuite, regardez tranquillement ce que vous obtenez.

11 Correction, résumée !

- Determinisation : On génére juste l'état $\{1,2\}$, depuis l'etat 0.
- Automate et Arden, le langage des mots dont la longeur est multiple de 5. Faut faire 6 etats qui se passent la balle, les equation se simplifie en $L_0 = (a+b)^5 L_0 + \epsilon$.
- Minimisation : 2 fusionne avec 4 cela se voit a l'oeuil nu ;

Correction: *Grammaire pour les expressions rationnelles :*

```
S -> S+S | S.S | S* | (S)
     'epsilon' | a | b |
      epsilon
```

Elle est ambiguë, par exemple, S+S+S se dérive de deux façon, (S+S)+S ou S+(S+S)

- Cours : Deux états seront fusionnés, s'ils ont même futur. Les états de l'algorithme minimal sont les classes d'equivalence pour la relation définie par : deux mots sont en relation s'ils ont même futur.
- Pompe : Je vais montrer que L n'est pas pompable, donc il n'est pas rationnel. Soit N quelconque, je choisit $U = a^N b^{N+1}$. Avec le theoreme de la pompe, je peut imposer de considérer seulement les décompositions $u = xyz$ ou y se trouve dans les N permiéres lettres qui sont des a. Je choisit ensuite $k = 2$. Le mot xy^2z n'appartient pas au langage, car il a au moins autant de a que de b.
- Expression rationnelle : $(a+\epsilon)^9$
- Décidabilité : Pour vérifier que le langage reconnu par un automate est un langage préfixe, Il suffit de nettoyer l'automate, puis de vérifier que touts les états restant, qui sont les états utiles, sont tous finaux. Ca prends un temps lineaire, car le nettoyage prends un temps linéaire.
- Choisir $P = a, S = c, N = A.A \setminus \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ Construction : Un état pour chaque lettre, plus un etat initial ; On met une flèche de l'état a vers l'état b, étiquetée par b, si (a,b) n'est pas dans N on met une flèche de l'état initial vers les états x étiquetée par x si x est dans P, final = ceux dont la lettre est dans S.
- Un peu de math : de $x.y = zx$ on déduit que $|x| + |y| = |z| + |x|$ et ensuite $|y| = |z| = K$. ensuite $xxy = xzx = yxx$ idem pour z. puis par récurrence $x^{2n}y = yx^{2n}$ et $x^{2n}z = zx^{2n}$. On choisit $n > K/2|x|$. Du coup, y et z sont tous les deux les K premières lettres de x^{2n} et sont donc égaux, that was difficult !