Chapitre 8 : Notion de flot maximal dans un réseau

On utilise la notion de flot dans la modélisation de nombreux types de problèmes qu'on peut associer à la circulation de flux physiques sur un réseau, comme par exemple la distribution électrique, l'adduction d'eau ou la distribution de paquets sur Internet.

Dans tous les cas, on cherche à acheminer la plus grande quantité possible de matière pouvant circuler d'une source vers une destination (ou puits) sur un réseau donné. On suppose que les transmissions sont instantanées, que les liens d'acheminement ont une capacité bornée (débit maximal) connue et qu'il n'y a ni perte ni création de matière lors du transit. En clair : sauf à l'entrée et à la sortie, en chaque nœud du réseau, la quantité de matière transportée est conservée.

1. <u>Réseaux et flots</u>

- **Capacité et réseau, définitions**

Un **réseau** est un graphe orienté valué G = (S, A, Capa) pour lequel la valuation des arcs prend des valeurs entières positives.

Capacité
La valuation Capa(u → v) d'un arc u → v est appelée sa **capacité**. La **capacité** modélise le fait que le flux pouvant transiter sur l'arc ne peut être supérieure à une valeur donnée.

Sommets initial et terminal
Pour un arc a = u → v :
- u est le sommet initial, noté u = init (a)
- v est le sommet terminal, noté v = term (a)

Source et puits
Dans un réseau, on distingue deux sommets particuliers : la **source**, notée s, et la **destination** (ou puits), notée t (pour target).

Nœuds intermédiaires
On appelle « **nœuds intermédiaires du réseau** » les autres sommets (ni source, ni destination).

Choix de la source et de la destination
Le choix de la source et de la destination est arbitraire et dépendant du problème à traiter sur le réseau considéré.
On suppose ici qu'il existe au moins un chemin de la source vers la destination (dans le cas contraire, aucun flux ne pourrait passer).

Rappel : dans un graphe orienté, un chemin de longueur L est une suite de L+1 sommets reliés par des arcs successifs.

Un réseau est donc un graphe spécifique dont on distingue deux sommets et dont les poids des arc matérialisent un flux maximal.

- **Flot et loi de conservation**

Un flot représente l'acheminement d'un flux de matière, depuis la source vers la destination.
Il est décrit par la quantité de matière transitant sur chacun des arcs du réseau.
Mathématiquement parlant, un flot est une fonction sur les arcs.

Algorithmiquement parlant, un flot peut être un champ d'enregistrement d'une variable permettant la définition de l'arc.

Loi de conservation de flux, définition
Un flot sur un réseau G = (S, A, Capa) est une application F de l'ensemble des arcs, A, dans l'ensemble des entiers naturels, et vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall$ a $\in$ A, 0 $\leq$ F(a) $\leq$ Capa(a)
- $\forall$ v $\in$ S, v $\neq$ s et v $\neq$ t => ∑{F(a)|v=init(a)} = ∑{F(a)|v=term(a)}

Il s'agit de la loi de conservation de flux.

Flux entrant, sortant et total
Si v est un sommet :

- la quantité ∑{F(a)|v=init(a)} est appelée le **flux sortant** en v
- la quantité ∑{F(a)|v=term(a)} est appelée le **flux entrant** en v
- la différence entre flux entrant et flux sortant est le **flux total** en v

La loi de conservation de flux indique qu'en tout nœud intermédiaire, le flux entrant est égal au flux sortant.
En électricité, elle est connue sous le nom de loi de Kirchhoff.
Un flot sur un réseau ne peut donc être modifié qu'en la source et la destination : partout ailleurs, il n'y a que redistribution et réacheminement.
Il y a donc un flux d'entrée venant de l'extérieur, entrant par la source et un flux de sortie, sortant vers l'extérieur par le puits (ou destination), égaux selon la loi de conservation.
Entre la source et le puits, le flux transite par les nœuds intermédiaires.

Valeur d'un flot
La valeur du flot F sur le réseau G = (S, A, Capa) est le flux (ou flot net de sortie de la source) :

Flot = ∑{F(a)|s=init(a)} - ∑{F(a)|s=term(a)}

Sous réserve de respect de la loi de conservation des flots pour chaque sommet intermédiaire, cette valeur est conservée jusqu'à la sortie, en t (*i.e.* le puits)

2. <u>Le problème du flot maximal, et sa résolution</u>

Le flot sur un réseau est dit maximal si sa valeur est supérieure ou égale à la valeur de tout autre flot sur le même réseau, avec le même puits et la même source.
On cherche donc à identifier un flot maximal dans un réseau donné (il peut y avoir plusieurs flots maximaux).

<u>On peut prouver qu'il existe au moins un flot maximal sur G</u>
Si F(a) est nul pour tout arc a, alors F est bien un flot, de valeur nulle. Il existe donc un ou des flots : l'ensemble des valeurs de flots est non vide.
Si F est un flot, pour tout arc a, le nombre de valeurs de F(a) est borné par 1+Capa(a), ce qui fait que le nombre de flots est fini et borné par π{ 1 + Capa(a) │ a $\in$ A}.
L'ensemble des valeurs de flots est donc fini, non vide, et admet une valeur maximale.

NB : il peut y avoir plusieurs flots maximaux, notamment s'il existe des arcs de capacités identiques.

Afin d'identifier un flot maximal dans un réseau, on peut par exemple utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson.

Pour cela, on va effectuer les opérations suivantes :
- Partir d'un flot nul ou quelconque
- Chercher une chaîne dans le graphe permettant une augmentation du flot
- Faire cette augmentation
- Recommencer jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de chaîne à augmenter

De façon plus formelle, on peut écrire :

```
Algorithme FordFulkerson
                    { construit un flot maximal F sur le réseau G et rend sa valeur dans flowmax}
Entrée : G : Réseau ; Entrée et Sortie : F : Flot ; flowmax : entier

Flowmax ← 0
Répéter
        Chercher_chaine (G, F, Scan) /* Scan : tableau de travail passé par adresse*/
        si puits est marqué à vrai dans Scan alors
                Augmenter_flot(G, F, Scan)      /* F sera modifié*/
                flowmax← flowmax + valeur donnée par Scan
        {fin si alors}
jusqu'à ce que puits ne soit pas marqué à vrai dans Scan
```

Scan permet de savoir si le chemin qu'on a trouvé permet d'atteindre le puits.

Pour pouvoir utiliser cet algorithme, il faut connaitre les sommets du réseau, notamment la source (s) et le puits (t).
On considère également que l'on dispose d'un tableau Scan indicé sur les sommets du réseau et contenant pour chaque sommet des étiquettes à 5 champs et permettant de fournir les résultats nécessaires au bon déroulement de l'algorithme.

L'algorithme détaillé sera vu en TD.