Établir et résoudre des systèmes linéaires

1.1 Espace engendré

L'ensemble des combinaisons linéaires d'un ou plusieurs vecteurs est un objet qui va particulièrement nous intéresser : d'une part parce que cela a beaucoup de sens en géométrie, d'autre part parce que c'est sous cette forme que seront données les solutions d'un système linéaire.

Définition 1 : Espace vectoriel engendré

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). On appelle *espace vectoriel engendré* par $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs.

On le note Vect$(v_1, v_2, \ldots, v_p)$. Autrement dit :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 1 :

- L'ensemble ci-dessous est un espace vectoriel engendré par un seul vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- L'ensemble ci-dessous est un espace vectoriel engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce sont toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On va parfois rencontrer des petites variations des ensembles de l'exemple ci-dessus, par exemple :

$$E_A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}, \qquad F_A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x$$

Il est pratique d'interpréter ce type d'ensemble sous la forme : point de "départ" + toutes les combinaisons linéaires d'un ou plusieurs vecteurs à partir de ce point.

Je vous invite à manipuler ces deux illustrations GeoGebra, notamment faire varier la valeur de s dans le premier, et de x et y dans le second, afin de voir apparaître ces ensembles.

Pour E et E_A : https://www.geogebra.org/m/agukjbyv

Pour F et F_A : https://www.geogebra.org/m/fvuyuztu

Remarque 1 : Espace affine

Les ensembles comme E_A et F_A (lorsque le "point de départ" n'est pas 0) sont appelés *espace affines* et non plus espace vectoriel.

Proposition 1 : Nature géométrique d'un espace vectoriel engendré

Un espace vectoriel engendré est :

- une droite s'il est engendré par un seul vecteur (qui n'est pas le vecteur nul)
- un plan s'il est engendré par deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires.

Remarque 2 :

Un espace affine est de même nature géométrique que l'espace vectoriel sous-jacent, c'est juste le "point de départ" qui change. On précise en général *droite affine* ou *plan affine* dans ces cas.

La nature géométrique d'un espace engendré par des vecteurs dont certains sont colinéaires est plus compliquée à analyser. Par exemple, si les deux directions engendrant S_2 étaient les mêmes, autrement dit si les deux vecteurs étaient colinéaires, cela formerait seulement une droite !

Ceci est un des points abordés dans les prochaines activités et les prochaines sections, dans un cadre plus général que dans le plan.

1.2 Résolution des systèmes échelonnés

Les systèmes échelonnés sont les plus faciles à résoudre. Ils servent de brique de base dans la résolution générale.

Exemple 2 : Résolution d'un système

Examinons les deux systèmes linéaires ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & + & 7z & = & 66 \\ 2x & + & 10y & + & 6z & = & 88 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & 3z & = & 49 \\ & & 4y & + & 2z & = & 30 \\ & & & & 7z & = & 21 \end{array}\right.$$

Le premier système n'est pas si simple à résoudre : trois inconnues sont présentes dans les trois équations.

Le second système est beaucoup plus simple à résoudre : la troisième ligne permet d'obtenir z, la seconde donnera ensuite y et enfin la première imposera la valeur de x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Le deuxième exemple est ce qu'on appelle un système *échelonné*. Ce sont les systèmes les plus faciles à résoudre. On appelle aussi un tel système *triangulaire* car lorsqu'on l'écrit avec les inconnues alignées correctement, ce système apparaît sous la forme d'un triangle.

Voilà une définition un peu vulgarisée d'un système échelonné, qu'il est utile de retenir en pratique :

Définition 2 : Système échelonné, définition "visuelle"

On dit qu'un système est *échelonné* si on a un décalage vers la droite à chaque fois qu'on passe à la ligne suivante, autrement dit lorsqu'on perd au moins une inconnue à chaque ligne.

▸ **Pour aller plus loin**. Voici la définition formelle d'un système échelonné :

Définition 3 : Système echelonné, définition formelle

Un système d'équations linéaires est dit *echelonné* lorsqu'il est *triangulaire*, *i.e.* lorsqu'il existe un entier $r \in [1; \min(n,p)]$ tel que le système s'écrive sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,r}x_r & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,r}x_r & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & a_{r,r}x_r & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

Définition 4 : Pivots, rang, paramètres

- Pour un système linéaire échelonné comme ci-dessus, les *pivots* sont les positions du premier coefficient non nul de chaque ligne
- Le *rang* d'un système linéaire échelonné est alors son nombre de pivots
- Parmi les inconnus du système, on distingue alors les *variables pivots* (celles qui sont aux positions des pivots) et les autres, appelées *variables libres* ou *paramètres*

Il est "très facile" de résoudre un système échelonné en procédant par substitution : on regarde la dernière ligne pour déterminer une inconnue, puis on remplace dans la ligne précédente, et ainsi de suite jusqu'à avoir déterminé toutes les inconnues possibles.

On peut aussi (c'est plus simple avec un grand nombre d'inconnues) effectuer des opérations sur les lignes pour éliminer les inconnues une à une, en partant du bas.

Exemple 3 : Résolution d'un système échelonné

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ & - & 2b & - & c & = & 1 \\ & & & & 2c & = & 2 \end{cases}$$

Avec la méthode de substitution : on obtient tout d'abord $c = 1$ à partir de la dernière équation. Puis la deuxième équation nous donne $-2b - 1 = 1$, donc $b = -1$. Enfin avec la première équation on obtient $2a - 3 + 1 = 0$, donc $a = 1$. La solution est donc $(1, -1, 1)$.

Exemple 4 :

Essayons de résoudre le système échelonné

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

On peut remplacer z dans la première équation, on obtient $2x+3y = 3$. Et c'est tout, pas d'autre contrainte : on a donc plusieurs solutions (si vous regardez bien, cela correspond même à l'équation d'une droite, et donc une infinité de solution.)

Pour écrire l'ensemble des solutions, le mieux que l'on puisse faire est d'exprimer x en fonction de y, tout en laissant y "libre", c'est-à-dire pouvant prendre n'importe quelle valeur. Il joue alors le rôle d'un paramètre.

On a dans ce cas $2x = 3 - 3y$. Les solutions du système sont donc les vecteurs de la forme

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{3-3y}{2} \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

où la partie droite de l'écriture de l'ensemble signifie que y peut prendre n'importe quelle valeur.

Cette ensemble peut s'écrire également ainsi

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

et on reconnaît alors l'écriture d'une droite affine !

Voilà ci-dessous les trois cas pouvant être rencontrés. La méthode 3 doit particulièrement être assimilée pour résoudre sans se mélanger les pinceaux les systèmes linéaires dont les solutions s'exprimeront selon un ou plusieurs paramètres.

Méthode : Cas 1, Incompatibilité

Type de système pour lequel il n'y a pas de solution ! Ce cas se présente lorsqu'une ligne de la matrice est nulle alors que le nombre à droite de l'égalité ne l'est pas.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z + t & = 1 \\ 3x + 4y & = 1 \\ \quad\quad\quad y & = 0 \\ & 0 = 2 \end{cases}$$

L'incompatibilité vient de la dernière équation qui impose $0 = 2$, ce qui est impossible !

Méthode : Cas 2, système de Cramer

C'est le cas où il y a une unique solution !

Regardez l'exemple 3.

Méthode : Cas 3, système à degrés de liberté

L'exemple 4 est un exemple à un degré de liberté (un paramètre), voyons un autre exemple :

$$\{x + 2y + z = 1$$

Pour résoudre ce système échelonné (il n'a qu'une équation donc il est forcément échelonné) :

1. **On identifie** les **inconnues principales** (les inconnues apparaissant au début de chaque ligne, sur les positions pivots (ici x), et les **inconnues secondaire** aussi appelées **paramètres** ou encore **variables libres** (toutes les autres variables, ici y et z).
2. **On exprime** les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires, toujours en commençant par la dernière équation et en remontant (même si là il n'y en a qu'une).

   - On obtient : $x = 1 - 2y - z$.

   Il faut bien comprendre que les valeurs de z et y sont libres : quelles que soient les valeurs choisies cela donne une solution. Par exemple si on choisit $z = 0$ et $y = 0$ on obtient $x = 1$, et donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est **une** solution. Il y donc un ensemble de solutions qui est infini.

3. **On écrit la forme finale** des solutions en remplaçant les coordonnées du vecteur d'inconnues par leurs expressions en fonction des variables secondaire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

4. **Cette écriture permet de reconnaître la structure géométrique**, ici un plan (affine).

Proposition 2 : Structure géométrique de l'ensemble des solutions

La nature des solutions d'un système linéaire échelonné compatible dépend du nombre de paramètres lors de la résolution :

- 0 : un point
- 1 : une droite (affine ou vectoriel
- 2 : un plan (affine ou vectoriel)
- (n... : un espace à n dimensions, mais ça ce sera pour plus tard)

En particulier, les vecteurs engendrant l'ensemble des solutions d'un système linéaire ne sont jamais colinéaires.

▸ **Pour aller plus loin.**

Remarque 3 :

Dans le cas d'un système linéaire plus général (plus d'inconnues, plus de paramètres,...), on a besoin d'une notion plus générale que la colinéarité : la notion de *famille libre* ou *famille linéairement indépendante*, aperçue dans l'activité 3.

Définition 5 : Famille linéairement indépendante

Soit $n \geq 1$ un entier, soit $p \in \mathbb{N}$, et soit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $v_1, v_2, \ldots, v_p$ forment une famille libre (ou linéairement indépendante) si pour tous nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Proposition 3 :

les vecteurs engendrant l'ensemble des solutions d'un système linéaire échelonné forme toujours une famille linéairement indépendante.

1.3 Résolution générale : échelonnement puis résolution

L'échelonnement consiste à transformer progressivement un système linéaire quelconque en un système linéaire échelonné grâce à des *opérations élémentaires*.

Définition 6 : Opérations élémentaires

On note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes d'un système linéaire.

Une *opération élémentaire* est l'une des opérations suivantes :

- Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]$ tel que $i \neq j$, on notera $L_i \longleftrightarrow L_j$ l'opération consistant à échanger les lignes L_i et L_j.
- Pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, on notera $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ l'opération consistant à multiplier la ligne L_i par λ.
- Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, on notera $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ l'opération consistant à ajouter λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

Remarque 4 :

Des opérations du type $L_i \longleftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\lambda \neq 0$ sont aussi des opérations élémentaires : il s'agit d'un raccourci pour effectuer $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ suivi de $L_i \longleftarrow L_i + \mu L_j$ en une fois.

Attention : Cela est faux si $\lambda = 0$. En effet, si $\lambda = 0$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i + \mu L_j = \mu L_j$ ne transforme pas un système en un système équivalent, puisque l'on perd des informations : la ligne L_i a "disparu".

On a la proposition suivante :

Proposition 4 :

Une opération élémentaire transforme un système en un système équivalent.

▸ **Pour aller plus loin.**

Preuve :

Notons $\mathcal{S}$ le système de départ et $\mathcal{S}'$ le système obtenu après une opération élémentaire. On note L_i (resp. L'_i) la $i$ème ligne de $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$).

Il faut prouver que chaque opération préserve les solutions du système. Pour l'échange $L_i \longleftrightarrow L_j$, c'est complètement clair. Regardons ce qui se passe pour la deuxième opération : multiplier L_i par $\lambda \neq 0$. C'est clair aussi : $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de L_i si et seulement si c'est aussi une solution de λL_i.

Regardons maintenant la troisième opération. Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est solution du système $\mathcal{S}$. Alors ce n-uplet vérifie l'équation L_i et L_j, donc il vérifie aussi l'équation $L_i + \lambda L_j$. Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie toutes les équations $L_1, \dots, L_n$ sauf L_i, et qu'il vérifie $L_i + \lambda L_j$, alors il vérifie aussi $(L_i + \lambda L_j) - \lambda L_j = L_i$. Donc c'est aussi une solution du système $\mathcal{S}$.

On peut donc faire autant d'opérations élémentaires que l'on veut, le système obtenu à la fin a les mêmes solutions que le système de départ.

La résolution générale en deux étapes en découle :

Méthode : Resolution générale

- On échelonne le système grâce à des opérations élémentaires.
- On termine la résolution en résolvant le système échelonné !

Bonne pratique :

Lorsqu'on fait des opérations sur les lignes, il faut *toujours* marquer, à droite du système, l'opération que l'on va faire : par exemple, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ si l'on remplace L_1 par $L_1 - L_2$, etc. Sinon, il est à peu près impossible de relire les calculs, et de trouver une erreur éventuelle ! (et en particulier, sur une copie, cela permet de gagner la bienveillance de celui ou celle qui corrige)

Exemple 5 : Exemple de résolution complète

$$\begin{cases} 2x + 3y + \ \ z = 1 & L_1 \\ \ \ x - \ \ y - \ \ z = 0 & L_2 \\ -x + \ \ y + 2z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + \ \ z = 1 & \\ \quad - 5y - 3z = -1 & L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ \quad\ \ 5y + 5z = 5 & L_3 \longleftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + \ \ z = 1 & \\ \quad - 5y - 3z = -1 & \\ \qquad\quad 2z = 4 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Le système est alors échelonné, est de rang 3, n'a aucun paramètre, il y a aura donc une unique solution, que l'on obtient "en remontant" : $z = 2$, puis en réinjectant dans L_2 on obtient $-5y - 6 = -1$, d'où $y = -1$, puis en injectant de nouveau ces deux valeurs dans L_1 on trouve $2x - 3 + 2 = 1$, soit $x = 1$.

Donc le système admet une solution unique qui est $(1,-1,2)$.

La notion de rang, que l'on a déjà vu sur les systèmes linéaires échelonnés, s'étend à n'importe quel système linéaire :

Définition 7 : Rang

Le rang d'un système linéaire est le rang de n'importe quel système échelonné équivalent.

▸ **Pour aller plus loin.**

1.4 Bases, coordonnées

Dans toute cette partie, la notation E désigne $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Vous connaissez depuis "longtemps" la notion de coordonnées d'un vecteur dans un repère "habituel" (le repère orthonormé que vous connaissez depuis votre plus tendre enfance) .

Dans cette section, on va généraliser cette notion ! Pour le faire, il faut savoir tout d'abord ce que c'est qu'une base. On parlera ici seulement de base de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais vous verrez plus tard des espaces plus généraux.

Définition 8 : Base

Une *base* de E est une famille de vecteurs $v_1, v_2, \ldots v_p$ appartenant à E qui est :

- linéairement indépendante
- telle que $E = \text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$

Proposition-Définition 1 : Unicité d'une décomposition - coordonnées

Soit p un entier et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une base de E.

Alors : pour tout vecteur u appartenant à E, il existe une unique décomposition de u sous la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

Les coefficients réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ s'appellent les *coordonnées* de u dans la base $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

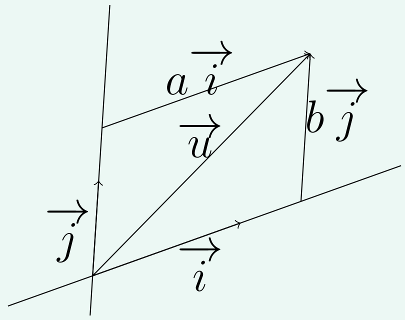
Preuve :

Exercice de TD ”pour aller plus loin”

Exemple 6 : Dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. Alors les *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont le couple de réels (a, b) (qui est donc unique) tel que

$$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}.$$



Lorsque $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (a, b), on écrit simplement $\overrightarrow{u}(a, b)$, ou (c'est parfois plus pratique) en colonne : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.