Licence 3 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2024-2025

Eval 4 : MG2

Important : Toutes les questions des exercices hormis l'exercice 1 doivent être justifiées soigneusement, argumentées. Elles sont évaluées avec la grille critériée.

▸ **Exercice 1**.

Théorème 1:

Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien E, soit $u \in E$, alors

$$d(u,F) = ||u - p_F(u)||_2$$

où p_F est la projection orthogonale sur F.

Preuve :

On procède par double inégalité cad qu'on montre tour à tour que $d(u,F) \leq ||u - p_F(u)||_2$ et $d(u,F) \geqslant ||u - p_F(u)||_2$.

- Comme $d(u,F) = \inf\{||u-v||_2, v \in F\}$ et $p_F(u) \in F$, alors $d(u,F) \underset{(1)}{\leq} ||u - p_F(u)||_2$.
- Soit $v \in F$, alors $p_F(u) - v \in F$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$ alors :

$$||u-v||_2^2 = ||u - p_F(u) + p_F(u) - v||_2^2 \underset{(2)}{=} ||u - p_F(u)||_2^2 + ||p_F(u) - v||_2^2 \geqslant ||u - p_F(u)||_2^2.$$

Donc $d(u,F)^2 \underset{(3)}{\geqslant} ||u - p_F(u)||_2^2$ $\underset{(4)}{donc}$ $d(u,F) \geqslant ||u - p_F(u)||_2$.

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Vous devez choisir parmi les arguments suivants :

- car l'inf est un minorant.
- car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- car la norme euclidienne est définie.
- car l'inf est le plus grand des minorants.
- car la variable de sommation est muette.
- car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- car la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
- d'après le théorème de Pythagore
- car la norme euclidienne est homogène.

▸ **Exercice 2**.

1. Déterminer les extremas locaux de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y$ en utilisant la matrice Hessienne.
2. Déterminer à nouveau les extremas à l'aide d'une réduction de Gauss. Sont-ils globaux ?
3. Après avoir expliqué pourquoi la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, déterminez-en une bon de vecteurs propres.

▸ **Exercice 3**. Soit a et b deux réels non nuls. On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles notée (E) suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a\partial_x \phi(x,y) + b\partial_y \phi(x,y) = 0.$$

Dans cette question, ϕ est une solution de (E). On considère la fonction $\varphi : (u,v) \mapsto \phi(\dfrac{u+v}{2b}, \dfrac{u-v}{2a})$.

1. A l'aide de la règle de la chaîne, exprimer $\partial_u \varphi(u,v)$ en fonction de $\partial_x \phi(\frac{u+v}{2b}, \frac{u-v}{2a})$ et $\partial_y \phi(\frac{u+v}{2b}, \frac{u-v}{2a})$. En déduire que $\partial_u \varphi$ est la fonction nulle.
2. En déduire l'expression de $\varphi(u,v)$ pour tout (u,v) dans $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire enfin toutes les solutions ϕ de (E).

▸ **Exercice 4**.

Cet exercice a pour but d'étudier les extremas d'une fonction liée à une matrice symétrique.

- On se place dans l'ev euclidien $\mathbb{R}^3$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $||\cdot||$ la norme associée.
- Soit $A \subset \mathbb{R}^3$. On dit que m est un minorant de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si $\forall (x,y,z) \in A, m \leq f(x,y,z)$. On dit que m est un minimum si c'est un minorant et qu'il existe $(a,b,c) \in A$ tel que $m = f(a,b,c)$.
- Soit $A \subset \mathbb{R}^3$. On dit que M est un majorant de $f : A \to \mathbb{R}$ si $\forall (x,y,z) \in A, f(x,y,z) \leq M$. On dit que M est un maximum si c'est un majorant et qu'il existe $(a,b,c) \in A$ tel que $M = f(a,b,c)$.

1. *Etude d'un exemple :*
   (a) Vérifier les inégalités $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$ pour tous réels x et y et préciser dans chaque cas les situations d'égalité *(Indice : essayez de faire apparaître des identités remarquables en manipulant les inégalités)*.
   (b) En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction $r : (x,y,z) \mapsto \dfrac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ et montrer que c'est son minimum.
   (c) Trouver de même le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.
   (d) Comparer ce minimum et ce maximum à la plus grande et à la plus petite valeur propre de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. *Etude du cas général :* Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. **On admet qu'il existe une bon $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs propres e_k étant associé à la valeur propre λ_k.** On suppose $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (a) Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ que l'on écrit $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ dans la base B_0. Vérifier que
$$\frac{\langle f(w), w \rangle}{||w||^2} = \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||w||^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||w||^2}.$$
   (b) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction
$$r_f : w \mapsto \frac{\langle f(w), w \rangle}{||w||^2}$$
   sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.
   (c) Déterminer de même le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.
   (d) Vérifier que l'on retrouve ainsi les résultats de la question 1.
3. *Une application :* On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé.
   (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de f.
   (b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ et préciser les vecteurs en lesquels ils sont atteints.

(c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ par

$$g(x,y,z) = \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$$

et P la partie de $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x+y+2z = 1$. Soit $(x,y,z) \in P$. Vérifier que $g(x,y,z) = r_f(x,y,z)$.

(d) En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.