

Eval 3 : MG2

Important : Toutes les questions des exercices hormis l'exercice 1 doivent être justifiées soigneusement, argumentées. Elles sont évaluées avec la grille critériée.

► **Exercice 1.**

Proposition 1:

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre de E .

Preuve :

Donnons-nous une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_p)$ de E .

Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ alors $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle u_j, \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \rangle = 0$.

Donc $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = 0$.

Or $\forall i \neq j, \langle u_j, u_i \rangle = 0$.

Donc

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle \stackrel{(3)}{=} \lambda_j \|u_j\|_2^2.$$

On en déduit que pour tous les j , $\lambda_j \|u_j\|_2^2 = 0$. Or pour tout j , $\|u_j\|_2 \neq 0$. Donc pour tout j , $\lambda_j = 0$.

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Pour les points 2, 3 c'est à vous de trouver l'argument.

Pour les points 1, 4, vous devez choisir parmi les arguments suivants :

- d'après l'inégalité triangulaire.
- en prenant le produit scalaire par u_j des deux côtés de l'égalité.
- par linéarité à gauche du produit scalaire.
- par linéarité à droite du produit scalaire.
- car la norme euclidienne est définie.
- car si un produit de réels est nul, l'un des deux est nul.
- car la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est orthogonale.
- car les vecteurs u_i sont unitaires.
- car la variable de sommation est muette.
- car le produit scalaire est positif.
- car la norme euclidienne est homogène.
- par définition de la norme euclidienne.

► **Exercice 2.**

1. Quelles phrases sont vraies ? Justifiez bien pourquoi elles sont vraies ou fausses.

- (a) Le taux d'accroissement $\frac{\partial_x f(1, 2+h) - \partial_x f(1, 2)}{h}$, s'il a une limite finie quand h tend vers 0, tend vers $\partial_{xx}^2 f(1, 2)$.
- (b) Pour $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, un point critique est un extremum local.

2. Déterminer toutes les fonctions h de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_x h(x, y) = 3x + y \\ \partial_y h(x, y) = x + \cos(4y) \end{cases}$$

► **Exercice 3.**

1. Démontrer que

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2x^4 - y^2 x^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculez les dérivées partielles pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ de f .
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles au point $(0, 0)$? Si oui donnez les valeurs de $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$.

► **Exercice 4.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E_\lambda) \quad x \partial_x f(x, y) + y \partial_y f(x, y) = \lambda f(x, y)$$

On note $F_\lambda(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ solutions de (E_λ) sur Ω .

On admet qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(a, b)\}$ est prolongeable par continuité en (a, b) si la limite de $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers (a, b) existe et est finie.

• **Etude générale**

- Démontrer que $F_\lambda(\Omega)$ est un sev de $C^1(\Omega)$.
- Démontrer que $p_x : (x, y) \mapsto x$ et $p_y : (x, y) \mapsto y$ sont dans $F_1(\Omega)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F_\lambda(\Omega)$ de classe $C^2(\Omega)$. Démontrer que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont des éléments de $F_\alpha(\Omega)$ avec α à déterminer.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que si $f \in F_\lambda(\Omega)$ et $g \in F_\mu(\Omega)$ alors $fg \in F_\theta(\Omega)$ où θ est un réel à préciser.
- Soient $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, et $f \in F_\lambda(\Omega)$ une fonction strictement positive. Démontrer que

$$f^\alpha : (x, y) \mapsto f(x, y)^\alpha$$

appartient à $F_{\alpha\lambda}(\Omega)$

6. Dans cette question, $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $r_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad r_\lambda(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^\lambda.$$

Démontrer que $r_\lambda \in F_\lambda(\Omega)$.

7. Sous quelle condition sur λ , r_λ est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

• **Résolution sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$**

Dans cette partie $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

- Soit $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(u, v) = (uv, v)$. Soit $f \in C^1(\Omega)$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g = f \circ \phi$. Montrer que g est de classe $C^1(\Omega)$.
- Justifier que $f \in F_\lambda(\Omega)$ si et seulement si

$$v \partial_v g(u, v) = \lambda g(u, v).$$

10. En déduire les éléments de $F_\lambda(\Omega)$.