Eval 2 : MG2

1 Cours : preuve étoilée

Voici une preuve de certains axiomes montrant que la norme $||u||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve :

- $$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n, ||\lambda u||_2 &= (\sum_{i=1}^{n} |\lambda u_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2 |u_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{(1)}{=} (|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{(2)}{=} (|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \times ||u||_2. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n, ||u+v||_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + v_i^2 + 2u_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \\ &= ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \end{aligned}$$

  Or $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \underset{(3)}{\leq} ||u||_2 ||v||_2$.
  Donc $||u+v||_2^2 \leq ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + 2||u||_2||v||_2$.
  Donc $||u+v||_2^2 \leq (||u||_2 + ||v||_2)^2$
  $\underset{(4)}{Donc}$ $||u+v||_2 \leq ||u||_2 + ||v||_2$

C'est donc bien une norme.

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Vous devez choisir parmi les arguments suivants.

- par linéarité de la somme.
- car l'inf est un minorant.
- car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- car la norme euclidienne est définie.
- car $|ab| = |a||b|$ pour a, b réels.
- car $(ab)^2 = a^2 b^2$ pour a, b réels.
- car la variable de sommation est muette.

— car $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour a, b positifs.
— car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
— car la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
— d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
— car la norme euclidienne est homogène.

2 QCM/justification

Quelles phrases sont vraies ? Justifiez bien pourquoi elles sont vraies ou fausses.

1. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.
2. Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $||u||_2 \leq \sqrt{n}||u||_\infty$ pour $||u||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |u_i|$ et $|| \cdot ||_2$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit (u, v, w) est une famille de vecteurs d'un EV E telle que $(u, v), (v, w)$ et (u, v) sont trois familles libres. Alors (u, v, w) est libre.

3 Classique

On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base du sev de $\mathbb{R}^3$ suivant : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y - z = 0\}$.
2. Déterminer une bon de F par orthonormalisation de cette base. Si vous n'avez pas trouvé de base de deux vecteurs à la question 1, faites cette question et les suivantes à l'aide de la base suivante $((1, 1, 1), (1, 2, 3))$ (qui n'est pas une base de F).
3. Déterminer l'expression de $p_F(x, y, z)$ où p_F est la projection orthogonale sur F et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1)$ à F.
5. Déterminer $F^\perp$. Expliquez sans effectuer de calcul comment on aurait pu trouver plus facilement p_F à l'aide de $F^\perp$.

4 Découverte

Notations .

— Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.
— On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
— On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.
— Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$.
— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. On admet que si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

4.1 *Structure d'espace vectoriel symplectique réel*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On appelle *forme symplectique* sur E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— bilinéarité : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(x+\lambda y, z) = \omega(x, z)+\lambda\omega(y, z)$ et $\omega(x, y+\lambda z) = \omega(x, y)+\lambda\omega(x, z)$;

— antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2, \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
— non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E,ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.
Q 1. En exploitant l'axiome d'antisymétrie, montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de $E, \omega(x,x) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E,ω), on appelle ω-*orthogonal* de F et on note F^ω l'ensemble
$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\}.$$
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).
Q 2. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.
Q 3. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Q 4. Expliquez pourquoi $\omega(x,\cdot)$ l'application de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x,y)$ est une application linéaire.

Q 5. Expliquez pourquoi si l'application $\omega(x,\cdot)$ (toujours la même qu'à la question 4) est l'application nulle, alors $x = 0_E$.

On considère maintenant
$$\begin{array}{rcl} d_\omega : E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}$$

Q 6. Déduire de la question précédente que d_ω est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on note $\ell_{|F}$ la restriction de ℓ à F définie par
$$\begin{array}{rcl} \ell_{|F} : F & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & l(x) \end{array}$$

Q 7. Montrer que l'application de restriction
$$\begin{array}{rcl} r_F : \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell_{|F} \end{array}$$
est surjective.
Q 8. Préciser le noyau de $r_F \circ d_\omega$. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.
Q 9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

4.2 *Structure symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par
$$\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$$
où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Q 10. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y$$
où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Q 11. En déduire que Ω est antisymétrique et inversible. On rappelle que Ω est antisymétrique si sa transposée est $-\Omega$.
Q 12. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.
On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.
Q 13. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} b_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{array}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

4.3 *Endomorphisme symplectique réels*

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E, ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y)$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E, ω).
Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.
Soient λ, μ des valeurs propres réelles de u, et soient $E_\lambda(u), E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.
Q 14. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x, y) = 0.$$