Licence 3 | Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques | 2024-2025

Eval 1 : MG2

Important : Toutes les questions des exercices 2, 3 et 4 doivent être justifiées soigneusement, argumentées. Elles sont évaluées avec la grille critériée.

▸ **Exercice 1**.

Proposition 1:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une **bon** d'un espace euclidien E de dimension n, $u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \in E$ alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = \langle u, e_i \rangle.$$

Preuve :

On sait qu'il existe $(u_1, \ldots, u_n)$ des réels tels que

$$u \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i e_i = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \langle u, e_j \rangle & \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i \langle e_i, e_j \rangle \\ & \underset{(3)}{=} u_j \langle e_j, e_j \rangle \\ & = u_j ||e_j||^2 \\ & \underset{(4)}{=} u_j. \end{aligned}$$

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Vous devez choisir parmi les arguments suivants.

- par linéarité de la somme.
- car l'inf est un minorant.
- car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale.
- car chaque e_i est unitaire.
- car $|ab| = |a||b|$ pour a, b réels.
- car le produit scalaire est défini.
- car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
- car la variable de sommation est muette.
- car la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
- d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- car la norme euclidienne est homogène.
- par linéarité à gauche du produit scalaire.
- par linéarité à droite du produit scalaire.

Eléments de corrigé

1. car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
2. par linéarité à gauche du produit scalaire.
3. car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale.
4. car chaque e_i est unitaire.

▸ **Exercice 2**. Déterminez si les phrases suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant avec précision).

1. Soit $n \geq 1$, le produit matriciel

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$$

est un produit scalaire.

2. Soit E un EV préhilbertien. Soient deux vecteurs $(u, v) \in E^2$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$ et w orthogonal à u. On peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \lambda u, v + w \rangle < 0$.
3. Soit E un EV préhilbertien. Toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre.

Correction non détaillée

1. φ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc ce n'est pas un produit scalaire.
2. Par linéarité à gauche puis à droite, $\langle \lambda u, v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ par orthogonalité de (u, w). Il suffit donc de prendre $\lambda < 0$.
3. Une famille orthonormale est une famille orthogonale de vecteurs non nuls donc elle est libre.

▸ **Exercice 3**.
On considère le produit scalaire sur $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ défini par $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

1. Démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Quelle est l'expression de la norme euclidienne $||f||_2$ associée pour une fonction f quelconque de E.
3. Pour cette question, on admet que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2},$$

$$\cos(a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \quad et \quad \sin(a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

La famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\pi t), \sin(\pi t))$ est-elle orthogonale ? Est-elle orthonormale ? Est-ce une bon de E ? Justifiez bien.

Correction non détaillée

1. Fait en td.
2. $||f||_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt}$.
3. $||\lambda f||_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda^2 f(t)^2 dt} = \sqrt{\lambda^2 \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt}$ (par linéarité de l'intégrale). Enfin $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$.
4. Fait en td : Elle est orthogonale et orthonormale. Ce n'est pas une bon de E car cet ev est de dimension infinie.

▸ **Exercice 4**. Soit E un ev euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $|| \cdot ||_2$ la norme euclidienne associée. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Autrement dit ces endomorphismes laissent invariant le produit scalaire. L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés de ces endomorphismes. Dans tout le problème, u désigne un endomorphisme de E.

1. **Equivalence à la conservation de la norme :**

(a) Démontrer que si $u \in O(E)$ alors

$$\forall x \in E, \quad ||u(x)||_2 = ||x||_2.$$

Autrement dit ces endomorphismes conservent la distance, on leur donne aussi le nom d'isométries.

(b) Démontrer que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{||x+y||_2^2 - ||x-y||_2^2}{4}.$$

(c) En déduire que si $\forall x \in E, \quad ||u(x)||_2 = ||x||_2$ alors $u \in O(E)$.

2. **Stabilité par la composition :** Démontrer que si u et v sont des éléments de $O(E)$ alors la composée $u \circ v$ en est un aussi.
3. **Bijectivité et stabilité par l'inverse :**
   (a) Démontrer que si une application linéaire u appartient à $O(E)$ alors u est injective.
   (b) En déduire que u est bijective. On note u^{-1} son inverse.
   (c) Démontrer que :
   $$u \in O(E) \Longrightarrow u^{-1} \in O(E).$$
4. **Conservation des bon :** Démontrer que si $u \in O(E)$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bon de E alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une bon de E.
5. **Expression matricielle :**
   (a) Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une bon de E, notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x dans la bon B et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées d'un vecteur y dans la bon B, démontrez que $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
   (b) Soit $u \in O(E)$ et U la matrice de u dans une bon de E. Démontrer que ${}^tUU = I$ où I est la matrice identité. Une matrice vérifiant une telle propriété est appelée matrice orthogonale.
   (c) En déduire les valeurs possibles du déterminant d'une matrice orthogonale. Donnez une interprétation géométrique de ces valeurs du déterminant.
   (d) Démontrer qu'une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une bon de E.

✂ -

Correction non détaillée :

1. **Equivalence à la conservation de la norme :**
   (a)
   $$\forall x \in E, \quad ||u(x)||_2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||_2.$$
   (b) Partez de la partie droite et développez les normes au carré par bilinéarité du produit scalaire. (c'est fait dans le cours).
   (c)
   $$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{||u(x)+u(y)||_2^2 - ||u(x)-u(y)||_2^2}{4} = \frac{||u(x+y)||_2^2 - ||u(x-y)||_2^2}{4} = \frac{||x+y||_2^2 - ||x-y||_2^2}{4}$$
2. **Stabilité par la composition :**
   $$||u(v(x))||_2 = ||v(x)||_2 = ||x||_2.$$
   .
3. **Bijectivité et stabilité par l'inverse :**
   (a) Si $||u(x)||_2 = 0$ alors $||x||_2 = 0$ et donc la norme étant définie $x = 0_E$. Donc le noyau est réduit au neutre.
   (b) Endo injectif entre deux ev de même dimension finie donc bijectif.
   (c) $||u^{-1}(x)||_2 = ||u(u^{-1}(x))||_2 = ||x||_2$.
4. **Conservation des bon :** On sait que $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ donc comme les e_i forment une bon, les $u(e_i)$ aussi.
5. **Expression matricielle :**
   (a) $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle$ On développe par bilinéarité c'est égal à $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(b) $\langle x, y\rangle$ a pour représentation matricielle ${}^tXY$ où X et Y sont les matrices de x et y dans B la bon.
$\langle u(x), u(y)\rangle$ a pour représentation matricielle ${}^t(UX)UY ={}^t X{}^tUUY$.
Par définition de u orthogonal ces deux quantités doivent être égales pour tous X, Y. On en déduit que ${}^tUU = I$.

(c) $1 = det(I) = det({}^tUU) = det({}^tU)det(U) = det(U)^2$. Cela veut dire que l'application conserve le volume.

(d) En notant U_i la ième colonne de U, le coefficient (i, j) de ${}^tUU$ est $\langle U_i, U_j\rangle$. Or celui-ci doit être égal à $\delta_{i,j}$ qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Ceci signifie par définition que les U_i forment une bon de E.