Informatique Théorique, TD 6 : NP (2/2)

1 NP-complétude de K-coloriage d'un graphe

Soit K un entier. Un graphe non-orienté G est K-coloriable ssi on peut colorier ses sommets avec K couleurs ou moins de sorte que des sommets reliés ne sont jamais de la même couleur.

1.1 3-coloriage

Le but de cette partie est de montrer que 3-coloriable est NP-complet.

(1) Montrez que 3-coloriable est NP.

Soit F une formule booléenne sur les variables $\{V_1, ..., V_W\}$, F en forme normale, i.e. que $F = \wedge_{i\in[1..Q]} C_i$, où les C_i sont les clauses avec pour chaque i, $C_i = \vee_{j\in[1..K_i]} L_{i,j}$. Les $L_{i,j}$ sont les littéraux, qui sont donc une variable ou la négation d'une variable.

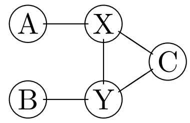
On construit alors un graphe G_F, dont les sommets sont:

- 3 sommets V, F, N (initiales de Vrai, Faux Neutre)
- $2W$ sommets $\{V_1^{vrai}, V_1^{faux}, V_2^{vrai}, V_2^{faux}, ..., V_W^{vrai}, V_W^{faux}\}$ correspondants aux affectations des variables
- Q sommets $K_1, ..., K_Q$ correspondants aux clauses $C_1, ..., C_Q$
- D'autres sommets que vous serez amenés à introduire.

Vous définirez ce que sont les arêtes.

(2) on veut que les 3 sommets V, F et N ne puissent pas être coloriés autrement qu'avec 3 couleurs différentes. Comment l'imposer ? On notera $Vert$, $Fauve$ et $Noir$ les couleurs des sommets V, F et N respectivement.

(3) On veut que pour chaque k et pour tout coloriage G, l'on ait (V_k^{vrai} Vert et V_k^{faux} Fauve) ou (V_k^{vrai} Fauve et V_k^{faux} Vert). Comment le forcer ? (V_k^{vrai} Vert et V_k^{faux} Fauve) est associé à l'affectation $V_k \leftarrow vrai$ tandis que (V_k^{vrai} Fauve et V_k^{faux} Vert) est associé à l'affectation $V_k \leftarrow faux$



(4) Donner toutes les manières de colorier le petit graphe ci-contre de sorte que ni A, ni B, ni C ne soient Noir (mais X et Y peuvent l'être)

(5) On suppose que les sommets V_j^b sont coloriés (ainsi que V, F et N).

On veut à présent que, pour chaque i, l'on puisse colorier le sommet K_i en $Vert$ ssi au moins un des sommets V_q^b associés aux littéraux de la clause C_i est $Vert$ (exemple, si $C_7 = V_2 \vee \neg V_3 \vee V_6 \vee \neg V_8 \vee \neg V_9$ alors K_7 peut être colorié en $Vert$ ssi au moins un des sommets V_2^{vrai}, V_3^{faux}, V_6^{vrai}, V_8^{faux}, V_9^{faux} est $Vert$). Comment le forcer ? Faire le dessin pour la clause C_7 donnée en exemple.

(6) Terminer la construction de G_F. Vérifier en quelques lignes que $F \rightarrow G_F$ est une réduction polynomiale. En déduire que 3-Coloriable est NP-complet.

1.2 4-coloriage

(7) Montrez que 4-coloriable est NP-complet.

1.3 P-équivalences de variantes de 3-coloriage

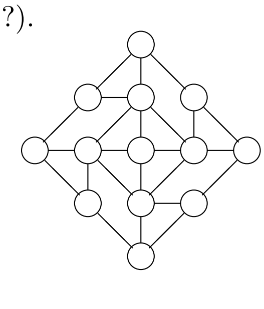
(8) Montrez que les deux problèmes suivants sont polynomialement équivalents, i.e. que si l'on a un oracle pour l'un, on peut résoudre l'autre en temps polynomial.

- Savoir si un graphe est 3-coloriable.
- Savoir si un graphe est 3-coloriable et si oui, fournir un 3-coloriage.

1.4 3-coloriage avec degrés inférieurs ou égaux à 5

(9) Montrez que 3-coloriable est toujours NP-complet si on le restreint aux graphes dont tous les sommets sont de degré inférieur ou égal à 5 (Indication: dédoubler les sommets de degré 6 au plus, quitte à introduire de nouveaux sommets) (10) ... inférieur ou égal à 4. (11) ... inférieur ou égal à 3 (??).

1.5 3-coloriage des graphes planaires



(12) Quels sont, à intervertion des couleurs près, les 3-coloriages du graphe:

Si l'on impose les couleurs du sommet en haut et de celui à gauche, quelles couleurs peut-on avoir sur le sommet du bas et celui à droite ?

(13) Montrez que 3-coloriable est toujours NP-complet si on le restreint aux graphes planaires (i.e. que l'on peut dessiner sur un plan).

2 SAC A DOS

∘ SACADOS-1 prend en entrée une suite finie d'entiers $(x_i)_{i\in[1..N]}$ et un entier Γ et demande si il existe une partie J de $[1..N]$ telle que $\sum_{i\in J} x_i = \Gamma$.

∘ SACADOS-2 prend en entrée une suite finie d'entiers $(x_i)_{i\in[1..N]}$ et demande si il existe une partie J de $[1..N]$ telle que $\sum_{i\in J} x_i = \sum_{i\notin J} x_i$.

∘ SACADOS-3 prend en entrée une suite finie d'entiers "valeurs" $(v_i)_{i\in[1..N]}$, une suite finie d'entiers "poids" $(p_i)_{i\in[1..N]}$; un poids P, et rend le maximum des $\sum_{i\in J} v_i$ restreint aux parties J vérifiant $\sum_{i\in J} p_i \leq P$

∘ SACADOS-4 prend en entrée une suite finie d'entiers "valeurs" $(v_i)_{i\in[1..N]}$, une suite finie d'entiers "poids" $(p_i)_{i\in[1..N]}$; un poids P, une valeur V et rend vrai ssi il existe une partie J telle que $\sum_{i\in J} v_i \geq V$ et $\sum_{i\in J} p_i \leq P$

∘ Le problème SACADOSVECTEUR est le même problème que SACADOS-1, sauf que les $(x_i)_{i\in[1..N]}$ et Γ sont des vecteurs.

- Montrez que SACADOS-1 et SACADOS-2 sont P-équivalents, que SACADOS-3 et SACADOS-4 sont P-équivalents, et que SACADOS-4 est une extension de SACADOS-1.

Soit F une formule en forme normale $F = \bigwedge_{1\leq k\leq Q} C_k$, avec $C_k = \bigvee_{1\leq h\leq K_k} L_{k,h}$ où les $L_{k,h}$ sont des litteraux sur les variables $(v_r)_{1\leq r\leq W}$. On envisagera que F soit dans 3SAT, i.e. que les N_k valent tous 3.

On construit des vecteurs à $W+Q$ coordonnées. Pour chaque variable v_i, on construit les vecteurs $x_i^{vrai} = (0,0,...,0,1,0,..0,x_{i,1}^{vrai},...x_{i,M}^{vrai})$ et $x_i^{faux} = (0,0,...,0,1,0,..0,x_{i,1}^{faux},...x_{i,M}^{faux})$, les S premières coordonnées sont des 0, sauf la i^{eme} qui est un 1. $x_{i,j}^{vrai}$ vaut 1 si v_i est un littéral de la clause C_j, vaut 0 sinon. $x_{i,j}^{faux}$ vaut 1 si $non(v_i)$ est un littéral de la clause C_j, vaut 0 sinon. On note $X = (x_i^{vrai})_{1\leq i\leq W} \cup (x_i^{faux})_{1\leq i\leq W}$.

- Montrez que la formule est satisfiable ssi il existe un sous ensemble Y de X et des nombres $c_1,...,c_Q$ non nuls tels que $\sum_Y y = (1,1,1,...,1,1,1,c_1,c_2,...,c_Q)$.

- Donnez un vecteur Γ et un ensemble Z tel que le problème SACADOSVECTEUR avec pour entrée $X \cup Z$ et Γ a une solution ssi F est satisfiable.

- Montrez que SACADOSVECTEUR est NP-complet

- Montrez que SACADOS-1 est NP-complet

- Proposez une heuristique pour SACADOS-3. Montrez que si tous les p_i vérifient $p_i \leq P/2$, alors la valeur de la solution trouvée est au moins la moitié de la valeur optimale. Adaptez l'heuristique pour se passer de cette hypothèse.

- Donnez deux algorithmes qui résolvent SACADOS-4 de complexité respectives $\theta(N*V)$ et $\theta(N*P)$. Pourquoi l'existence de ces algos ne contredit pas la NP-complétude de ces problèmes ?

- Donnez des algos d'approximation de facteur $1-\epsilon$ pour SACADOS-3. Quelle est leur complexité ?