Informatique Théorique, TD 5 : NP (1/2)

1 NP : devinettes

Les problèmes suivants sont-ils P, NP, NP-complets, PSPACE, etc. ?

TRI(T) : Est-ce que le tableau T est trié ?

EULERIEN(G) : Existe-t-il un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arc (ou chaque arête) ?
HAMILTONIEN(G) : Existe-t-il un cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet ?

2COLOR(G), 3COLOR(G), 4COLOR(G) : Peut-on colorier les sommets du graphe G á l'aide de deux, resp. trois. resp. quatre couleurs sans que deux sommets voisins aient la même couleur ?
3COLORPLAN(G), 4COLORPLAN(G) : Itou avec G supposé planaire

ISO(G1,G2) : Est-ce que les graphes G1 et G2 sont isomorphes ?
ACCESS(G,x,y) : existe-t-il un chemin de x à y dans le graphe G ?

EQUIVAUTOM(A1,A2) : Est-ce que les deux automates A1 et A2 reconnaissent le même language ?
INTERGRAMM(G1,G2) : Est-ce que les langages des deux grammaires G1 et G2 ont au moins un mot en commun ?

SAT(F) : F est une formule booléenne sur les variables boolénnes $x_1, ..., x_W$. Est-ce que $\exists x_1, ..., x_W, F(x_1, ..., x_W)$?
QSAT(F) : F est une formule booléenne sur les variables boolénnes $x_1, ..., x_W, y_1, ..., y_W$. Est-ce que $\exists x_1, \forall y_1, ..., \exists x_W, \forall y_W, F(x_1, ..., x_W, y_1, ..., y_W)$?

PREMIER(p) : L'entier p est-il premier ?
DIVISEUR(p,k) : L'entier p a-t-il un diviseur plus petit que k (autre que 1) ?

SUDOKU99(S) : Est-ce que la grille S de Sudoku $9 * 9$ partiellement remplie a au moins une solution ?
SUDOKU(S) : Itou avec S qui peut être de n'importe quelle dimension $N^2 * N^2$.
UNIQUESUDOKU(S) : Itou, mais on demande maintenant si la solution est unique

SOKOBAN(S) : Est-ce qu'un jeu de Sokoban a une solution ?
OTHELLO(S) : S est une grille d'Othello $N * N$ partiellement remplie. Je joue contre Dieu et c'est à moi de jouer. Ai-je la possibilité de gagner ?
ECHECS(S) : Itou avec une position d'Echecs sur un damier $N * N$

2 SAT

- 3-SAT est le même problème que SAT, mais avec des clauses de 3 littéraux exactement. Montrez que 3-SAT est NP-complet
- SAT-GEN est le même problème que SAT, mais avec une formule logique pas nécessairement en forme normale, utilisant tous les opérateurs logiques, les parenthésages imbriqués. Montrez que SAT-GEN est NP-complet.
- Montrez qu'il y a une réduction polynomiale de SAT-GEN dans SAT. En donnez une explicite.
- SAT-SOLUCE dit si une formule est satisfiable, mais de plus, donne une solution si la formule est satisfiable. Montrez que SAT-SOLUCE et SAT sont P-équivalents, ie que si on a un oracle pour l'un, l'autre peut se faire en temps polynomial.
- SAT-CARD donne le nombre de solutions d'une formule. Essayez de comparer SAT et SAT-CARD. Donnez un problème de décision qui est P-équivalent à SAT-CARD.

3 Cliques

Une clique d'un graphe G est un ensemble Y de sommets tous reliés deux à deux.

CLIQUEMAX(G) rend le cardinal maximum des cliques de G

CLIQUE(G,k) rend vrai ssi G possède une clique de taille k.

CLIQUE-SOLUCE rend de plus une clique s'il y en a une.

3-CLIQUE (G), resp 1000-CLIQUE(G) rend vrai ssi G possède une 3-CLIQUE, resp une 1000-CLIQUE.

- Dans quelle classe de complexité se trouvent 3-CLIQUE et 1000-CLIQUE ?
- Montrez que CLIQUEMAX, CLIQUE et CLIQUE-SOLUCE sont P-équivalents.
- Que pensez-vous de l'affirmation ”CLIQUEMAX est NP-complet” ?

Soit F une formule logique en forme normale. $F = \wedge_{i=1}^{Q} C_i$, $C_i = \vee_{j=1}^{K_i} L_{i,j}$, $L_{i,j}$ des littéraux.

On construit le graphe G_F comme suit :

$S_{G_F} = \{s_{i,j} \,|\, i \leq Q \wedge j \leq K_i\}$, $A_{G_F} = \{(s_{i,j}, s_{\bar{i},\bar{j}}) \,|\, i \neq \bar{i} \wedge L_{i,j}$ n'est pas la négation de $L_{\bar{i},\bar{j}}\}$

- Montrez que F est satisfiable ssi G_F possède une clique de taille Q
- Montrez que CLIQUE est NP-complet

Une couverture d'un graphe G est un ensemble x de sommets tel que toute arête a au mois une extrêmité dans X. COUV-MIN (G) rend le cardinal minimum des couvertures de G. COUV(G,k) rend vrai ssi G possède une couverture de taille k

Un stable d'un graphe G est un ensemble x de sommets tel que toute arête a au plus une extrêmité dans X. STABLE-MAX (G) rend le cardinal maximum des stables de G. STABLE(G,k) rend vrai ssi G possède un stable de taille k.

- Établir des liens entre les cliques, les stables et les couvertures.
- Montrez que COUV et STABLE sont NP-complets.

Un couplage de G est un ensemble d'arêtes sans extrêmités en commun. Il est maximal, resp. maximum si on ne peut pas y ajouter une arête, resp. s'il contient le plus d'arêtes possible (max pour l'inclusion, resp. pour le cardinal).

- Donnez un couplage maximal non maximum. Trouver un couplage maximal, resp. maximum est-il P ?
- Soit Γ un couplage maximal, C l'ensemble des extrêmités de Γ, et C_{min} une couverture minimum. Montrez que $|C_{min}| \geq |\Gamma|$ et que C est une couverture. En déduire un ”algo polynomial d'approximation de facteur 2” pour COUV.

4 HAM et VC

HAM(G) rend vrai ssi G possède un cycle hamiltonien.

VC-MIN(G) rend le poids minimum des cycles hamiltonien de G, graphe complet valué aux arêtes.

VC(G,k) rend vrai ssi il existe un cycle hamiltonien de poids k ou moins.

VC-IT est VC restreint aux graphes vérifiant l'inégalité triangulaire ($\forall x, y, z, w(xz) \leq w(xy) + w(yz)$)

- HAM possède en fait deux variantes HAM_{O} et HAM_{NO} pour les graphes orientés et non-orientés. Montrez qu'elles sont P-équivalentes.

Soit $F = \wedge_{i \in [1..Q]} C_i$ une formule booléenne en forme normale sur les variables $(V_r)_{r \in [1..W]}$.

On construit le graphe $G_{Q,W}$ dont les sommets sont les $(L_{r,s})_{r \in [1..W], s \in [1..3Q+3]}$ et les arcs sont les $\{(L_{r,s}, L_{r,t}) \,|\, |s - t| = 1\} \cup \{(L_{r,s}, L_{r+1,t}) \,|\, s, t \in \{1, 3Q + 3\}\}$ (avec ”$r + 1 = 1$” si $r = W$)

- Combien $G_{Q,W}$ a-t-il de cycles hamiltoniens ? Faire un lien avec les affectations des variables de F.

On construit G_F en ajoutant à $G_{Q,W}$ les sommets $(K_i)_{i \in [1..Q]}$ et, si V_r, resp. $\neg V_r$, est littéral de C_i, on ajoute les arcs $(L_{r,3i}, K_i)$ et $(K_i, L_{r,3i+1})$, resp. $(L_{r,3i+1}, K_i)$ et $(K_i, L_{r,3i})$.

- Montrez que si F est satisfiable alors G_F est hamiltonien.
- Montrez que si un G_F a un cycle hamiltonien passant par $(L_{r,3i}, K_i)$, alors il passe aussi par $(K_i, L_{r,3i+1})$.
- Montrez que HAM est NP-complet

- Montrez que VC est NP-complet
- Montrez que VC-IT est NP-complet

COURS : algos d'approximation pour VC-IT-MIN.

- Montrez qu'il n'existe pas d'algo d'approximation pour VC-MIN (à moins que $P = NP$)