

Informatique Théorique, TD 3 : Indécidabilité (1/2)

1 Décidables et semi-décidables : devinettes

Parmi les problèmes suivants, lesquels sont décidables, semi-décidables, co-semi-décidables ?

Tri(T) : Est-ce que le tableau T est trié ?

Equiv(A1,A2) : Est-ce que les deux automates A1 et A2 reconnaissent le même langage ?

Inters(G1,G2) : Est-ce que les langages des deux grammaires G1 et G2 ont au moins un mot en commun ?

Arrêt(M,u) : Est-ce que la machine de Turing M s'arrête sur l'entrée u ?

NonArrêt(M,u) : Est-ce que la machine de Turing M ne s'arrête pas sur l'entrée u ?

TimeArrêt(M,u,T) : Est-ce que la machine de Turing M s'arrête sur l'entrée u en un temps au plus T ?

Racine(P) : Est-ce que le polynôme P à une variable avec des coefficients entiers, a une racine dans $\mathbb{N}$?

RacineBis(P) : Est-ce que le polynôme P à plusieurs variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ avec des coefficients entiers, a un système de racine $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$ dans $\mathbb{N}^p$?

ArrêtIlExiste(M) : Est-ce que la machine de Turing M s'arrête sur au moins une entrée ?

ArrêtPourTout(M) : Est-ce que la machine de Turing M s'arrête sur toutes les entrées ?

$\Pi_D^1(x)$: existe-t-il un (entier) y tel que $D(x,y)$ où D est supposé être décidable ?

$\Pi_D^2(x)$: existe-t-il un y tel que pour tout z, on a $D(x,y,z)$ où D est décidable ?

2 Stabilités

(1) Si A et B sont décidables, en est-il de même pour $A \cap B$? pour $A \cup B$? Mêmes questions avec semi-décidables. Qu'en est-il de la stabilité par complémentaire ? Qu'en est-il pour P, NP, Pspace ?

(2) le mot u est facteur du mot v ssi il existe x et y tel que $v = xuy$. Il en est un sous-mot ssi on peut obtenir u en effaçant des lettres dans v. Exemples, *abcd*, ϵ et *bc* sont facteurs donc sous-mots de *abcd*. *ac* est en sous-mot mais pas facteur. Si L est un langage, on note $Facteurs(L) = \{v \mid \exists u \in L, v \text{ est facteur de } u\}$ l'ensemble de ses facteurs. De façon similaire, on aura $ReverseFacteurs(L)$, $SousMots(L)$, $Surmots(L)$. Que peut-on dire de ces ensembles si L est décidable, semi-décidable, P, NP, Pspace ?

(3) On considère l'alphabet infini $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots\} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et l'ensemble X des mots finis à valeur dans A. (En pratique, La lettre a_i sera codée par i en binaire, et par exemple le mot $a_4 a_1 a_1 a_{11}$ pourra être codé par \$100\$1\$1\$1011\$ sur une MT.) On identifie les mots sur A et les suites finies à valeur dans $\mathbb{N}$. Ainsi le mot $a_6 a_{12} a_6 a_{26}$ est identifié à la suite finie (6,12,6,26).

Si E est sous-ensemble de X, on note $Perm(E)$ l'ensemble des mots obtenus en permutant les lettres de E. Exemple, si $E = \{a_1, a_2 a_2, a_4 a_2 a_7 \dots\} = \{(1), (2, 2), (4, 2, 7) \dots\}$ alors $perm(E) = \{a_1, a_2 a_2, a_4 a_2 a_7, a_4 a_7 a_2, a_2 a_4 a_7, a_2 a_7 a_4, a_7 a_4 a_2, a_7 a_2 a_4 \dots\} = \{(1), (2, 2), (4, 2, 7), (4, 7, 2), (2, 4, 7), (2, 7, 4), (7, 4, 2), (7, 2, 4) \dots\}$

(31) Soit F l'ensemble des suites finies strictement croissantes. Que vaut $perm(F)$?

(32) Soit $G = \{(u, M) \mid M \text{ sur } u \text{ s'arrête}\} \cup \{(M, u) \mid M \text{ sur } u \text{ ne s'arrête pas}\}$ (On rappelle que les machines M tout comme les entrées u sont identifiées à des entiers grâce à des codages en binaire). Est-ce que G est décidable, semi-décidable, co-semi-décidable ? Justifiez proprement. Qu'en est-il de $perm(G)$?

(33) Soit $H = \{(b_1, b_2, \dots, b_k, p, c_1, c_2, \dots, c_l) \mid p \text{ est un entier supérieur ou égal à } 2, b_1 b_2 \dots b_k \text{ est l'écriture en base 2 d'un diviseur de } p \text{ autre que } p \text{ ou } 1, \text{ les } b_i \text{ et les } c_j \text{ sont des } 0 \text{ ou des } 1, \text{ avec autant de } 0 \text{ que de } 1 \text{ que de chiffres dans l'écriture en base 2 de } p.\}$ Exemple : $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 327, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \in H$, car 1101101 en base 2, c'est 109, qui divise 327, et il y a 9 "0", 9 "1", et 327 s'écrit avec 9 chiffres en base 2. Que vaut $perm(H)$?

(34) Est-il vrai que si E est décidable, alors $perm(E)$ est décidable ?

(35) Est-il vrai que si E est semi-décidable, alors $perm(E)$ est semi-décidable ?

(36) Est-il vrai que si E est dans P, alors $perm(E)$ est dans P ?

(37) Est-il vrai que si E est dans NP, alors $perm(E)$ est dans NP ?

Une réponse non justifiée rapportera 0 points. Certains arguments clefs sont attendus dans les justifications. Vous pouvez conjecturer des réponses en justifiant votre intuition.

3 Arrêt des MTD sans entrée

Une machine de Turing sans entrée est une machine de Turing qui démarre avec une bande vide. (C'est un programme qui ne fait pas d'input). Montrez que l'arrêt des machine de Turing sans entrée est indécidable, en faisant un réduction depuis le problème de l'arrêt classique.

4 Machines qui s'arrêtent toujours, r. au moins une fois

On considère l'ensemble $Arret_{All}$ des programmes M (C, Caml, Turing, peu importe !) qui s'arrêtent sur TOUTES les entrées.

Soit M une machine de Turing déterministe, soit u une valeur d'entrée. On construit les deux programmes/machines $W(M, u)$ et $Z(M, u)$ suivants :

Programme $W_{M,u}$:

```
lire l'entree x
si x = u
alors lancer la machine M sur l'entree u      // ce qui s'arrete ou non
sinon stop
```

Programme $Z_{M,u}$:

```
Lire l'entier t
Lancer la machine M sur l'entree u avec timeout t
Si M sur u s'est arretee avant le timeout
Alors tant que vrai faire rien      // boucle infinie
sinon stop
```

- (a) A quelle condition (sur M et u) a-t-on $W_{M,u} \in Arret_{All}$?
- (b) A quelle condition (sur M et u) a-t-on $Z_{M,u} \in Arret_{All}$?
- (c) $Arret_{All}$ est-il décidable ? semi-décidable ? co-semi-décidable ?
- (d) Soit $Arret_{AtLeastOne}$ l'ensemble des programmes (C, Caml, Turing...) qui s'arrêtent sur AU MOINS une entrée. $Arret_{AtLeastOne}$ est-il décidable ? semi-décidable ? co-semi-décidable ?

5 Réductions

(1) On suppose que l'on a une réduction du problème X dans le problème Y , quelles sont les situations possibles ? : (A) X et Y sont décidables. (B) ni X ni Y ne sont décidables. (C) X est décidable mais Y ne l'est pas. (D) Y est décidable mais X ne l'est pas.

(2) Rappel : Pour toute problème décidable D , on note Π_D^1 le problème qui prend x en entrée et demande si $\exists y, D(y, x)$.

Soit D un problème décidable, Donner une réduction de Π_D^1 dans Arrêt.

Montrez plus généralement qu'il y a une réduction de tout problème semi-décidable dans Arrêt. On dira que Arrêt est semi-décidable-complet.

Montrez que pour tout problème semi-décidable X , il existe un ensemble décidable D_X tel que $x \in X \Leftrightarrow \Pi_{D_X}^1(x)$.

(3) Soit ZERO le problème suivant : En entrée, un entier n ; Question, n est-il nul ?

Mr X dit que ZERO est indécidable, ce que l'on prouve grâce à la réduction δ de ARRET dans ZERO, qui à (M, u) associe 0 si M s'arrête sur u , et 1 sinon.

Mr Y dit que ZERO est indécidable, ce que l'on prouve grâce à la réduction γ de ZERO dans ARRET qui à 0 associe le programme STOP et une entrée vide. Et à n non nul associe le programme "tant que vrai faire rien" et une entrée vide.

Mr Z dit "m'enfin, bien sûr que ZERO est décidable, et les raisonnements de Mrs X et Y sont faux car ... "

Mr Z, c'est vous. Finissez son discours.