Feuille 3

Les problèmes suivis du symbole $\star$ sont facultatifs, mais pas forcément plus difficiles que les autres !

Lorsqu'un exercice est terminé et la rédaction validée par tous les membres du groupes, merci de poster une photo de votre tableau sur le pad accessible avec le QR code ci contre (ou par ce lien : https://digipad.app/p/1091394/1767dc91b763c).
Cela permettra d'une part aux autres groupes de pouvoir les regarder, et d'autre part de faire parfois quelques remarques globales en classe.

Problème 1 ().
À l'aide d'un changement d'indice, déterminer une formule générale pour la somme suivante, pour n'importe quel entier $k_0 \geq 1$ et n'importe quel entier $n \geq k_0$:

$$\sum_{k=k_0}^{n} k$$

Correction

En effectuant le changement d'indice $j = k - k_0$ (et donc $k = j + k_0$), on a :

$$\sum_{k=k_0}^{n} k = \sum_{j=0}^{n-k_0} j + k_0$$

Ensuite, par linéarité et calcul de sommes connues :

$$\sum_{j=0}^{n-k_0} j + k_0 = \sum_{j=0}^{n-k_0} j + \sum_{j=0}^{n-k_0} k_0 = \frac{(n-k_0)(n-k_0+1)}{2} + (n-k_0+1)k_0$$

Donc finalement,

$$\sum_{k=k_0}^{n} k = \frac{(n+k_0)(n-k_0+1)}{2}$$

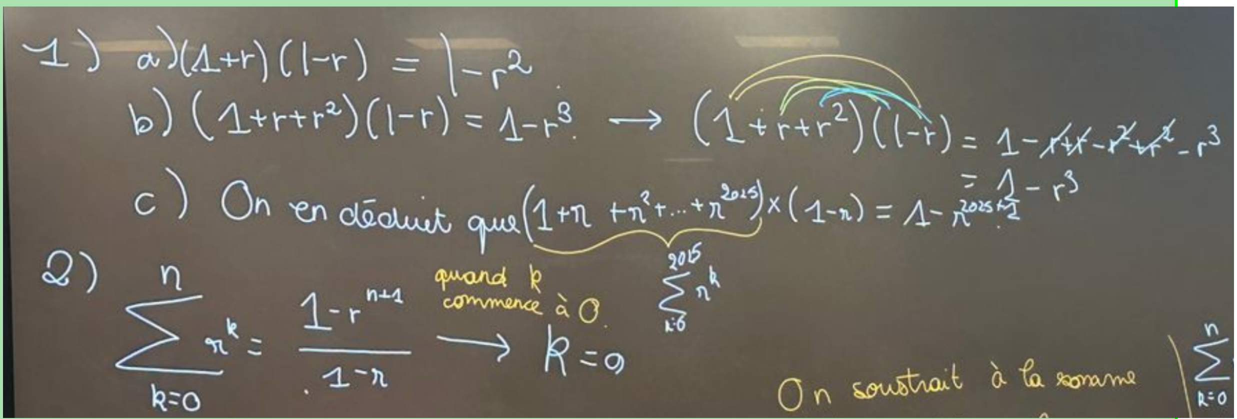
Problème 2 ().
Soit $r \neq 1$ un nombre réel.

1. Multiplier chacune des expressions suivantes par $1 - r$ et simplifier autant que possible :
   (a) $1 + r$
   (b) $1 + r + r^2$
   (c) $1 + r + r^2 + \cdots + r^{2025}$
2. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ l'expression de $\sum_{k=0}^{n} r^k$.

3. À l'aide d'un changement d'indice, calculer de manière générale pour tout entier $k_0 \geq 1$ et tout entier $n \geq k_0$:

$$\sum_{k=k_0}^{n} r^k$$

Correction



Pour la question 3, l'idée est de se ramener à un indice de départ qui vaut 0 *puis d'utiliser la formule précédente.*
En effectuant le changement d'indice $j = k - k_0$ *(et donc* $k = j + k_0$*) on obtient :*

$$\sum_{k=k_0}^{n} r^k = \sum_{j=0}^{n-k_0} r^{j+k_0}$$

Puis par linéarité :

$$\sum_{k=k_0}^{n} r^k = r^{k_0} \sum_{j=0}^{n-k_0} r^j$$

et on peut alors appliquer le résultat trouvé à la question précédente pour obtenir :

$$\sum_{k=k_0}^{n} r^k = r^{k_0} \frac{1 - r^{n-k_0+1}}{1 - r}$$

Problème 3 ().

1. Calculer les produits $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Interpréter ce résultat géométriquement en expliquant ce qu'il suffit de connaître pour déterminer la matrice d'une transformation.

Problème 4 ().

On se place dans une situation où la position d'un objet dans l'espace, notée $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est régie selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= -y+1 \\ y &= -z \\ z &= t \end{aligned}$$

où t est un paramètre, c'est-à-dire un nombre pouvant varier librement.
Écrire l'ensemble des positions possibles de l'objet, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction

On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'ensemble des positions possibles est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ midt \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème 5 ().
On s'intéresse aux deux ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut les visualiser des vecteurs de ces ensembles sur le lien suivant : `https://www.geogebra.org/m/fwxnnpet`.

1. À l'aide de la visualisation sur le lien ci-dessus, comparer ces deux ensembles. Que représentent-ils géométriquement ?
2. Soit $v \in E_1$. Démontrer que v peut bien s'écrire comme un élément de E_2.
3. Réciproquement, si $w \in E_2$, expliciter une écriture permettant de montrer qu'il est dans E_1.

Problème 6 ().
On considère la matrice suivante :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix}$$

1. Combien les vecteurs ont-ils de coordonnées avant transformation ? Et après ?

2. On écrit $v' = Tv$ la relation exprimant la transformation de v en v'. Exprimer les coordonnées de v' en fonction de celles de v.
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Trouver la matrice M qui transforme v en cv' ?
   (l'expression obtenue nous permettra de définir de manière générale le produit entre un nombre et une matrice

Problème 7 ().
On considère la matrice suivante :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix}$$

1. Soit P une autre matrice. Pour tout vecteur antécédent v, on souhaite effectuer l'opération $Tv + Pv$. Qu'est-ce que cela impose sur le nombre de lignes et le nombre de colonnes de P ?
2. Écrire alors la forme générale de la matrice P, de la même manière que T dans l'énoncé.
3. On écrit $w = Tv + Pv$. Exprimer alors les coordonnées de w en fonction de celles de v, et déterminer la matrice S telle que $w = Sv$.
   Cette dernière relation nous permettra de définir de manière générale la somme de deux matrices

Problème 8 ().
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (cela signifie que M est une matrice ayant 3 lignes et 3 colonnes). On note C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
On pose deux vecteurs v_1 et v_2, deux coefficients $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse à l'image par M de $\alpha v_1 + \beta v_2$, c'est-à-dire $M(\alpha v_1 + \beta v_2)$.

1. Combien de coordonnées ont v_1 et v_2 ?
2. Exprimer les coordonnées de $\alpha v_1 + \beta v_2$ en fonction de celles de v_1 et v_2.
3. Calculer alors $M(\alpha v_1 + \beta v_2)$ et $\alpha M v_1 + \beta M v_2$, puis conclure.

Correction

1. *Puisqu'il faut pouvoir calculer les images des vecteurs v_1 et v_2 par la transformation M, ils doivent avoir autant de coordonnées que M a de colonnes. Donc ils ont 3 coordonnées.*
2. *Notons* $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
   On a alors :
   $$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}$$
3. *On a d'une part d'après la formule du produit matrice-vecteur et les coordonnées exprimées dans la question précédente :*
   $$M(\alpha v_1 + \beta v_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2)C_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)C_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2)C_3$$
   D'autre part,
   $$\alpha M v_1 + \beta M v_2 = \alpha(x_1 C_1 + y_1 C_2 + z_1 C_3) + \beta(x_2 C_1 + y_2 C_2 + z_2 C_3)$$

On remarque en regroupant les termes que les deux expressions sont égales donc :

$$M(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha M v_1 + \beta M v_2$$

Problème 9 ().
On s'intéresse aux deux transformations suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

- La rotation de 90 degrés autour de $(0, 0)$
- La symétrie par rapport à l'axe des abscisses

1. Retrouver les deux matrices associées à ces transformations, que l'on notera respectivement R et M_x.
2. Pour tout vecteur v, à quoi correspond géométriquement la transformation $R(Rv)$ (c'est-à-dire faire la transformation R, puis une deuxième fois sur le résultat obtenue) ? $M_x(M_x v)$? Trouver alors les deux matrices correspondant à ces transformations.
3. Illustrer graphiquement pour quelques vecteurs v les deux transformations suivantes : $M_x(Rv)$ et $R(M_x v)$. L'image finale est-elle la même dans les deux cas ?

Problème 10 ().
On considère la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel type de vecteurs peut être transformé par P ?
2. Calculer les images de 3 vecteurs différents par cette transformation P. On note dans la suite v_1, v_2 et v_3 ces 3 images.
3. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer les produits Mv_1, Mv_2 et Mv_3.
4. Interpréter les résultats obtenus : que semble faire la matrice M par rapport à la matrice P ?

Correction

1. *La matrice P a 3 colonnes donc elle transforme des vecteurs ayant 3 coordonnées.*
2. *Calculons par exemples les images des vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *:*

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. En notant v_1, v_2 et v_3 les résultats précédents, on a :

$$Mv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Mv_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. On retrouve les vecteurs de départ, c'est-à-dire que la matrice M semble "défaire" la transformation faite par P.

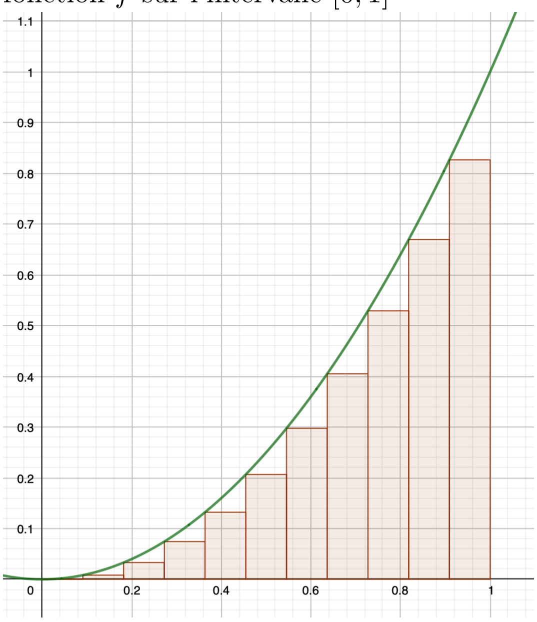
Problème 11 ().
Un système linéaire est dit *échelonné* si le premier coefficient non nul de chaque ligne (appelés *pivots*) est à droite du premier coefficient non nul de la ligne du-dessus.

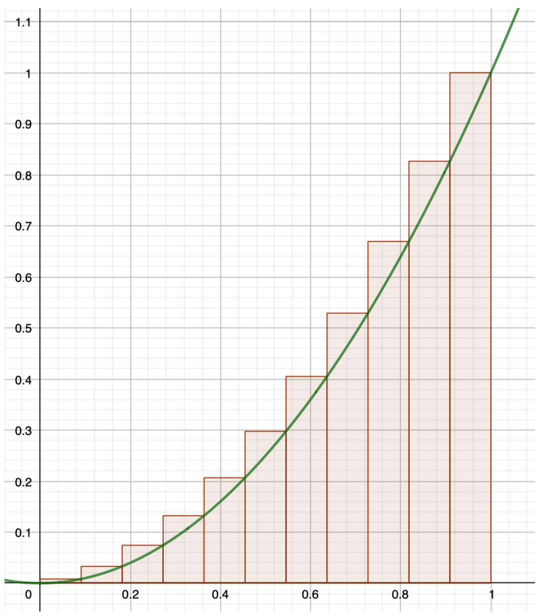
1. Écrire 3 situations différentes de systèmes linéaires échelonnés à 4 inconnues (x, y, z, t) en faisant varier le nombre d'équations et les positions des pivots.
2. Le système linéaire suivant n'est pas échelonné :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ -x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

Déterminer 3 opérations sur les lignes permettant de transformer ce système linéaire en un système linéaire équivalent qui est lui échelonné.

Problème 12 ($\star$).
On considère les deux images ci-dessous, qui représente deux manières d'estimer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$





On note n le nombre de rectangles dessinés (numérotés de gauche à droite de 1 à n), et on les construit de sorte qu'ils soient tous de même largeur.

1. Quelle est la largeur de chaque rectangle ?
2. Sur un dessin, indiquer les valeurs des abscisses aux extrémités de la base de chaque rectangle. En particulier, pour un nombre i donné, quelles sont les abscisses aux extrémités du rectangle numéro i ?
3. En exprimant la hauteur du rectangle à l'aide de la fonction f, calculer l'aire du rectangle numéro i dans le cas du dessin de gauche et du dessin de droite.
4. Exprimer alors sous forme d'une somme l'aire totale représentée par les rectangles, dans le cas du dessin de gauche et du dessin de droite.
5. Sur `https://www.codepuzzle.io/PMTHYU`, ordonner les lignes du programme Python afin que celui-ci permette de calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.
6. Écrire le code de la question précédente sur `https://console.basthon.fr/` *(copier/coller le code dans la partie gauche, cliquer sur exécuter, le résultat apparaît dans la partie droite)*, et déterminer à partir de combien de rectangles on obtient une valeur approchée de l'intégrale précise à 0,1 près.

Problème 13 ($\star$).
En 1202, Leonard de Pise (1170-1250, aussi appelé Fibonacci) a posé le problème suivant :
Supposez que vous commenciez l'année avec une paire de bébés lapin. Combien de paires de lapins (bébés ou adultes) auriez-vous à la fin de l'année si la reproduction des lapins suit la règle suivante :

- *Les bébés lapins du début du mois deviennent adultes au début du mois suivant*
- *Chaque paire de lapins adultes au début du mois produit une paire de bébés lapins au début du mois suivant*
- *Aucun lapin ne meurt*

Pour résoudre ce problème, on note x_n le nombre de pairs de bébés lapins au début du mois numéro n, et y_n le nombre de pairs de bébés adultes au début du mois numéro n. La population des lapins est alors représentée par le vecteur $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. Déterminer $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$.
2. Déterminer, si possible, la matrice T telle que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$