RESSOURCES : LES NOMBRES COMPLEXES

1.1 Définition, opérations sur les nombres complexes

1.2 Résolution d'un trinôme à coefficient réel dans $\mathbb{C}$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

1.4 Module et argument d'un nombre complexe

1.5 Nombres complexes de module 1

1.6 Les différentes représentations d'un nombre complexe

1.7 Formule de Moivre et formule d'Euler

Les deux formules suivantes sont utiles pour les calculs sur les nombres complexes :

Formule de Moivre : Soit n un entier positif, soit θ un réel, la formule suivante est vérifiée :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

ou de façon équivalente :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formule d'Euler : Soit θ un réel, les quantités sinus et cosinus peuvent également être définies de la sorte :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Ces deux formules, en particulier, sont très utiles pour calculer des primitives de fonctions de la forme $\cos(x)^n$ et $\sin(x)^n$ en les exprimant sous la forme de combinaisons linéaires de fonctions de la forme $\cos(px)$ ou $\sin(px)$ avec p un entier inférieur à n. Ce procédé s'appelle la **linéarisation**, il utilise la **formule du binôme de Newton**.

Exemple : linéariser $\cos(\theta)^3$. Solution :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\times\sum_{k=0}^{3} C_3^k \left(e^{i\theta}\right)^k \left(e^{-i\theta}\right)^{3-k} && \text{(Formule du binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{8}\times\sum_{k=0}^{3} C_3^k e^{ik\theta} e^{-i(3-k)\theta} && \text{(Formule de Moivre)} \\
&= \frac{1}{8}\times\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta) && \text{(Formule d'Euler)}
\end{aligned}$$