

TD : Suites de fonctions

Le symbole $\star$ désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté

1 Les classiques

Exercice 1 ().

Démontrer que les suites de fonctions suivantes convergent simplement et uniformément sur l'intervalle donné :

1. $f_n(x) = \sqrt{x + 1/n}$ sur $\mathbb{R}_+$
2. $f_n(x) = \arctan(nx)/n$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$ sur $[1, +\infty[$
4. $f_n(x) = \sin(n)/nx$ sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Exercice 2 ().

Étudier la convergence simple, puis uniforme, des suites de fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

1. $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$ sur $]0, +\infty[$
2. $f_n(x) = \arctan(nx)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \sin(n)/nx$ sur $]0, +\infty[$
4. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 3 ($\star$).

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes sur l'intervalle donné :

1. $\sqrt{nx}e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$
2. n^2xe^{-nx} sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
4. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4 ($\star\star$).

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
2. $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2x(1 - nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\int_0^1 f(t)dt$

3. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?
4. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ pour $a \in]0, 1]$.

Exercice 6 ().

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Démontrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f . f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 (*).

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 8 ()**.

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I vers respectivement f et g . On suppose de plus que f et g sont bornées. Démontrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $f g$.

2 Problème

Exercice 9 (*)**. *Approximation polynomiale de la racine carrée*

On définit une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} (x - (f_n(x))^2).$$

1. Déterminer la fonction φ telle que pour tout $x \in I$,

$$f_{n+1}(x) = \varphi(f_n(x))$$

2. Soit $x \in I$. Démontrer que la suite $(f_n(x))$ est croissante et majorée (*on pourra étudier la fonction φ et raisonner par récurrence*)
3. En déduire que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

5. Déterminer le maximum de la fonction $t \mapsto t(1 - \frac{t}{2})^n$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que la convergence est uniforme sur I .
7. Justifier le nom d'*approximation polynomiale* concernant la convergence uniforme de (f_n) vers la racine carrée.