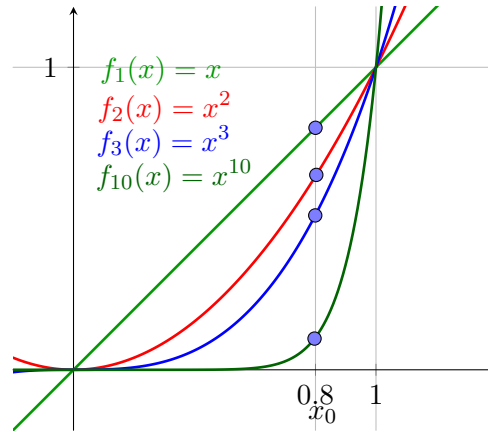


Suites de fonctions

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'objet d'intérêt est la suite (f_n) où $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On l'appelle dans ce chapitre suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Cet objet est différent d'une suite numérique de réels (u_n) . On a maintenant deux indices n et x . Pour chaque point $x_0 \in I$, on a une suite numérique $(f_n(x_0))$ (la suite numérique est représentée par les ronds sur le dessin ci-dessous). Ce qui nous intéresse dans ce chapitre, c'est de faire tendre n vers $+\infty$.



1 Convergence d'une suite de fonctions

1.1 Convergence simple (point par point)

Motivation :

Question : Comment évaluer la convergence d'une suite de fonctions lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Première idée : Connaissant la convergence pour des suites numériques de $\mathbb{R}^n$, on fixe $x = x_0$ et on étudie la convergence de la suite numérique $(u_n)_n = (f_n(x_0))_n$.

La convergence d'une suite numérique vers une limite l_{x_0} s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_{x_0} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{x_0}, |u_n - l| = |f_n(x_0) - l_{x_0}| \leq \epsilon. \quad (1)$$

On réitère pour tout x_0 cette étude : on peut alors définir une fonction limite $f : x_0 \in I \mapsto l_{x_0}$.

Cette convergence point par point s'appelle convergence simple. Réécrivons (1) pour définir...

Définition 1:

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que (f_n) converge simplement sur I vers f si et seulement si $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ssi

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_x \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Remarque 1:

En français : "Pour chaque x fixé, il existe un temps N_x dépendant de x , tels que **tous** les points $f_n(x)$ soient à distance inférieure à ϵ de $f(x)$."

Remarque 2:

La convergence point par point se voit à travers la dépendance du rang N_x en le point x . En d'autres

termes, $f_n(x)$ est à une distance ϵ de $f(x)$ à un instant dépendant de x . La vitesse dépend du point x .



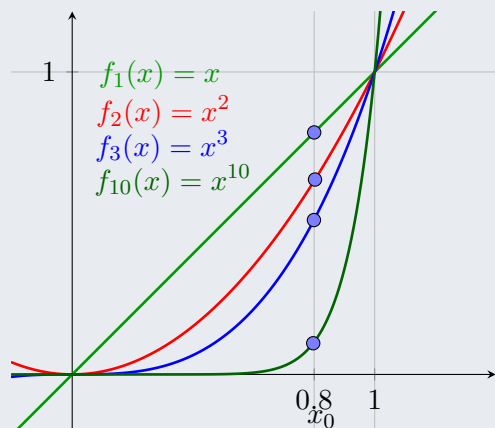
Bonne pratique :

En pratique, en exercice : Comment démontrer la convergence simple d'une suite de fonctions ?

Méthode :

- On fixe x dans l'intervalle I .
- Pour ce x , on étudie la limite de la suite numérique $(f_n(x))_n$.
- On exhibe la fonction limite $f : x \mapsto f(x)$

Exemple : Etudier la cvs de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.



Si $x < 1$, $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

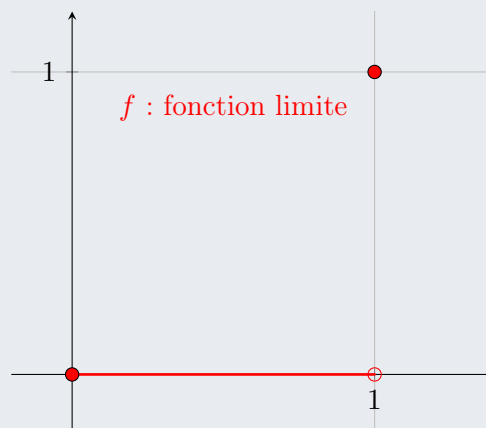
Si $x = 1$, la limite est 1.

Donc la fonction limite est définie par

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Noter que tout cela dépend de l'intervalle : par exemple sur $[0, 0.5]$, la limite est la fonction nulle.



1.2 Convergence uniforme

Motivation :

Les Charpakiennes et Charpakiens courent un 100m :

100 personnes alignées sur une ligne de départ : leur couloir de course est noté x , ils sont tous au départ en $f_0(x) = 0$ en ordonnée au temps $n = 0$. On veut les faire arriver sur une ligne placée au 100m au même moment. Cette ligne est $f(x) = 100$.

Si on les fait partir indépendamment, ils arriveront à des instants différents : c'est de la convergence simple, chacun décide de sa vitesse.

On place maintenant une ligne chiens enragés courant tous à la même vitesse derrière eux. S'ils ne veulent pas finir avec un mollet en moins, tous les coureurs devront toujours être dans le tunnel formé par les chiens. Ils peuvent avoir des vitesses légèrement différentes mais ils seront tous dans ce tunnel à partir d'un instant N donné indépendant de x : on va parler de convergence uniforme en x (comportement de groupe).

Pour la définir, le $\forall x$ ne peut plus être devant sinon le N dépend de x .

Définition 2:

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que (f_n) converge uniformément sur I vers f si et seulement si

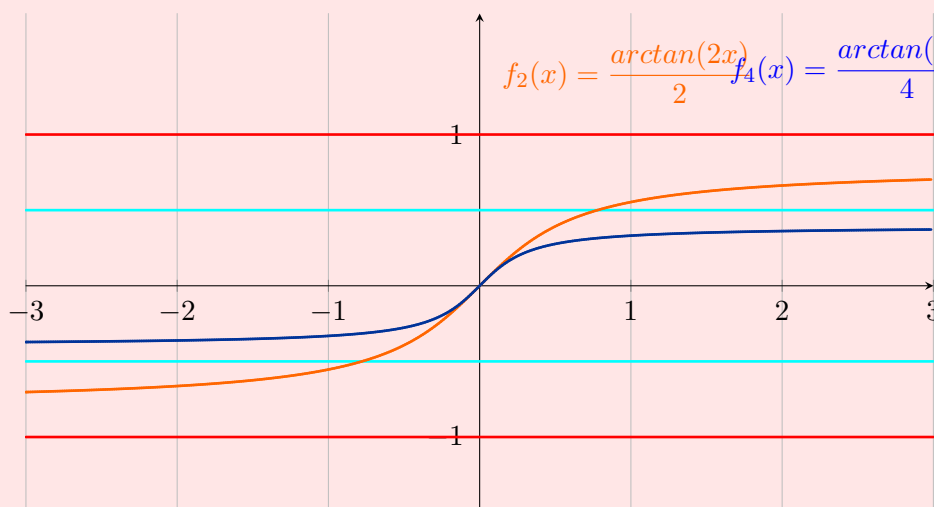
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Remarque 3:

En français : “A partir du temps N , **tous** les points $f_n(x)$ sont à distance inférieure à ϵ de $f(x)$.”

Noter que “convergence uniforme” signifie “convergence quand $n \rightarrow +\infty$ uniformément en x ”.

Cette convergence est illustrée par le dessin ci-dessous. La suite de fonction (f_n) définie par $f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$ converge uniformément vers 0. Ceci signifie que pour tout tunnel de taille ϵ entourant la limite, pour n suffisamment grand, toutes les f_n seront dans ce tunnel. Par exemple, pour $\epsilon = 1$ (tunnel rouge), c'est vrai à partir de $n = 2$. Pour $\epsilon = 1/2$ (tunnel bleu ciel), c'est vrai à partir de $n = 4$.



Remarque 4: réécriture de la définition

Considérons et notons $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Rappelons que s'il existe, le sup d'un ensemble A est le plus petit des majorants de cet ensemble.

Or $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$, donc ϵ est un majorant de $\{|f_n(x) - f(x)|, x \in I\}$.

Le sup est le plus petit donc $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

La définition de la cvu s'écrit de manière équivalente :

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

Définition 3: définition équivalente

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que (f_n) converge uniformément sur I vers f si et seulement si

$$\|f_n - f\|_{u,I} = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Proposition 1: Structure d'espace normé

Soit $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$. On peut munir cet espace d'une norme appelée norme infinie ou norme uniforme définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}), \|f\|_{u,I} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$,

- Positivité : Comme $\forall t \in I, |f(t)| \geq 0$ alors $\|f\|_{u,I} \geq 0$.
- Définie : Si $\|f\|_{u,I} = 0$, comme $\forall t \in I, 0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_{u,I}$ alors $0 \leq |f(t)| \leq 0$. Donc $f(t) = 0$. Donc f est identiquement nulle.

- Inégalité triangulaire :

On a

$$\begin{aligned} \forall t \in I, |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|f\|_{u,I} + \|g\|_{u,I} && \text{par définition de la norme infinie.} \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_{u,I} + \|g\|_{u,I}$ est un majorant de $\{|f(t) + g(t)|, t \in I\}$.

Or $\|f + g\|_{u,I}$ est par définition le plus petit des majorants de cet ensemble.

Donc $\|f + g\|_{u,I} \leq \|f\|_{u,I} + \|g\|_{u,I}$.

- Homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $\lambda = 0$, l'homogénéité est évidente.

Sinon on a $\forall t \in I, |\lambda f(t)| = |\lambda| |f(t)| \leq |\lambda| \|f\|_{u,I}$.

Donc $|\lambda| \|f\|_{u,I}$ est un majorant de $\{|\lambda f(t)|, t \in I\}$.

Or $\|\lambda f\|_{u,I}$ est le plus petit.

Donc $\|\lambda f\|_{u,I} \leq |\lambda| \|f\|_{u,I}$.

Réciproquement $\forall t \in I, |\lambda| |f(t)| = |\lambda f(t)| \leq \|\lambda f\|_{u,I}$.

Donc $\forall t \in I, |f(t)| \leq \frac{\|\lambda f\|_{u,I}}{|\lambda|}$.

Donc par le même argument de majorant $\|f\|_{u,I} \leq \frac{\|\lambda f\|_{u,I}}{|\lambda|}$ et donc $|\lambda| \|f\|_{u,I} \leq \|\lambda f\|_{u,I}$.

On a donc $|\lambda| \|f\|_{u,I} = \|\lambda f\|_{u,I}$.

Remarque 5:

Interprétation : Comme on mesure une distance sur $\mathbb{R}$ au moyen de la valeur absolue ou sur $\mathcal{C}$ au moyen du module, cette norme est un outil pour mesurer la distance entre deux fonctions.

Proposition 2:

Si (f_n) converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$ alors (f_n) converge simplement vers f sur I .

Preuve :

Si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$,
alors $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists N_x = N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_x, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.



Bonne pratique :

En pratique, en exercice : Comment démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions ?

Méthode :

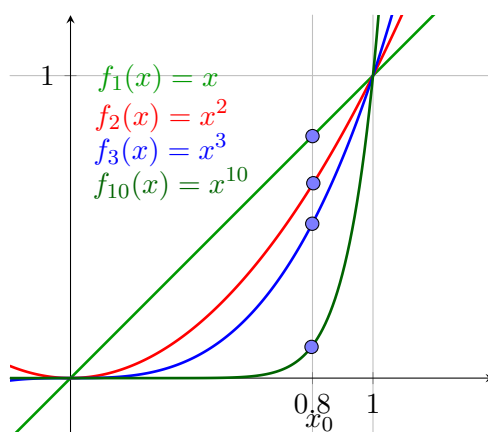
- On commence toujours par étudier la convergence simple de (f_n) pour obtenir la limite.
- On majore ensuite $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite **qui tend vers 0 uniformément en x** .

Exemple : Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ converge uniformément sur $[0, a]$ pour $a \in [0, 1[$.

1. On étudie la cvs : la limite est 0 sur $[0, a]$.
2. $\forall x \in [0, a], |x^n| \leq a^n$, majoration indépendante de x .
3. Donc la suite de fonctions converge uniformément sur $[0, a]$.

Motivation :

Etudions x^n sur $[0, 1]$,



Les fortes pentes sont des signes de non cvu. Ainsi, bien que x^n cvu sur tout $[0, a]$ pour $a < 1$, on pense qu'elle ne cv pas uniformément sur $[0, 1]$ car on observe une pente qui tend vers la verticale en $x = 1$.

Noter que la cvu comme la cvs dépend de l'intervalle choisi I !

Question : Comment montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur I ?

Proposition 3:

Si $\exists (x_n), \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I \\ |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I .

Preuve :

Par définition de la norme infinie, $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, I}$.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, I}$.

Par comparaison, $\|f_n - f\|_{\infty, I} \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et f_n ne cv pas uniformément vers f sur I .



Bonne pratique :

Montrons que $(x^n)_n$ ne cv pas uniformément sur $[0, 1]$.

But : Trouver une suite x_n de points de $[0, 1]$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Moyen : Prendre une suite de points qui converge vers le point problématique (celui où il y a des grandes pentes) : $x_n = 1 - 1/n$.

On a $f(x_n) = 0$ puisque $\forall n, x_n < 1$.

Donc $|x_n^n - f(x_n)| = (1 - 1/n)^n \rightarrow e \neq 0$.

Donc f_n ne cv pas uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

Attention $x_n = 1 + 1/n$ n'aurait pas convenu puisque cette suite n'est pas dans I . $f(x_n)$ n'est alors pas définie.

Remarque 6:

L'exemple précédent montre que convergence simple n'implique pas convergence uniforme. En effet (x^n) converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Il montre aussi que la cvu dépend de l'intervalle car la suite cvu sur $[0, a]$ mais pas sur $[0, 1]$.

1.3 Méthode pratique



Bonne pratique : Étude complète d'une convergence

1. (si possible) Deviner le comportement (CVU ou pas) : tracer f_n pour quelques n .
2. Etudier la convergence simple de f_n et écrire sa limite.
3. Premier réflexe : Si f_n est continue ET pas f , alors f_n ne cv pas uniformément vers f . Si f est continue, on ne peut rien dire. **L'explication de ce point vient au paragraphe suivant.**
4. Si on pense qu'il y a cvu, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ sur I par une suite qui tend vers 0 ET indépendante de x . Si on n'arrive pas à majorer, déterminer explicitement $\|f_n - f\|_{\infty, I}$.
Si on pense qu'il n'y a pas cvu, deviner le point problématique. Trouver une suite $x_n \in I$ telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tende pas vers 0. La suite x_n doit être choisie tendant vers le point problématique.

La question qui se pose maintenant est de savoir si les propriétés des fonctions f_n se "transmettent" à la fonction limite f (continuité, dérivée, intégration, limites,...). C'est ce que nous allons explorer dans la section suivante.

2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

2.1 Continuité

Motivation :

On a vu que (x^n) convergeait simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Sa limite est une fonction discontinue comme on l'a vu à la section précédente.

Ainsi la convergence simple ne préserve pas forcément la continuité de la suite de fonctions de départ.

Théorème 1: Limite uniforme de fonctions continues

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,
 $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } f \end{array} \right\} \implies f \text{ est continue sur } I.$

Preuve :

On veut montrer que $\forall x_0 \in I$, f est continue en x_0

cad que $\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$

Soit $x_0 \in I$, on sait que pour tout n f_n est continue en x_0

cad $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon.$

On sait aussi que f_n converge uniformément sur I vers f

cad que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$

Soit x tel que $|x - x_0| \leq \delta$ alors par inégalité triangulaire

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Pour $n \geq N$, on a donc

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

et pour ces n $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$. Donc

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 3\epsilon$$

En choisissant $\epsilon/3$ au lieu de ϵ , on a donc montré ce qu'il fallait.

Remarque 7: Remplir le trou de la méthode pratique 1.3

Ainsi si pour tout entier n , f_n est continue sur I mais que f ne l'est pas, alors f_n ne cv pas uniformément vers f sur I (sinon d'après le théorème précédent f serait continue!).

En pratique : Le premier réflexe doit être de regarder la continuité de f_n ET de f pour éventuellement conclure rapidement sur la non cvu.

Exemple : Considérons $f_n(x) = x^n$ suite de fonctions continue sur $[0, 1]$. Sa limite n'est pas continue en $x = 1$. Donc f_n ne cv pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Corollaire 1: Théorème bis

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$,

$\left. \begin{array}{l} \forall n, f_n \text{ est continue sur } I \\ f_n \text{ cvu sur tout segment inclus dans } I \text{ vers } f \end{array} \right\} \implies f \text{ est continue sur } I.$

Preuve :

Comme f_n cvu sur tout segment de I , d'après le théorème précédent, f est continue sur tout segment de I .

Soit $x \in I$, soit $a \in I$, $[a, x]$ est un segment de I puisque I est un intervalle.

f est donc continue sur $[a, x]$ et donc en x ! On a mq $\forall x \in I$, f est continue en x .

Remarque 8:

Attention, on ne dit pas que “cvu sur tout segment de I implique cvu sur I ”. On dit que “continuité sur tout segment de I implique continuité sur I ”.

Un contre-exemple est x^n qui cvu sur tout $[0, a]$ mais pas sur $[0, 1[$.

2.2 Double limite**Théorème 2: Intersion de limites**

Soit $a \in \bar{I}$, si

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe et est notée l_n ,
2. f_n converge uniformément vers f sur I ,

alors

1. $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$ existe,
2. $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Autrement dit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Preuve :

Supposons que l_n converge vers l pour commencer, nous le démontrerons après.

On veut montrer que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

cad que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|f - f_n\|_{u,I} + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \end{aligned}$$

Comme f_n cvu sur I alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f - f_n\|_{u,I} \leq \epsilon$.

Comme l_n cv vers l sur I alors $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |l - l_n| \leq \epsilon$.

Donc pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$,

$$|f(x) - l| \leq 2\epsilon + |f_n(x) - l_n|$$

Par ailleurs, comme $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$ alors $\exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f_n(x) - l_n| \leq \epsilon$.

On a alors $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq 3\epsilon$. On choisit $\epsilon/3$ au lieu de ϵ et le tour est joué.

Reste à prouver que l_n converge vers l . Pour cela, on montre que (l_n) est une suite de Cauchy car toute suite réelle de Cauchy converge.

On a

$$\begin{aligned} |l_p - l_q| &\leq |l_p - f_p(x)| + |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - l_q| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq 2\epsilon + |f_p(x) - f_q(x)| && \text{pour } x \text{ proche de } a \end{aligned}$$

Comme $(f_p(x))$ converge, elle est de Cauchy donc il existe N un entier tels que pour $p, q \geq N$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon$.

On a alors pour $p, q \geq N$, $|l_p - l_q| \leq 3\epsilon$. On choisit $\epsilon/3$ et on a bien montré que (l_n) est de Cauchy ce qui achève la démonstration.

2.3 Intersion limite intégrale

Questions :

Question : La convergence simple suffit-elle à inverser limite et intégrale ?

Considérons $f_n(x) = nx^n$ sur $I = [0, 1]$. Cette suite de fonctions tend vers 0 sur $[0, 1[$ par le critère de d'Alembert.

$$\int_0^1 nx^n dx = [nx^{n+1}/(n+1)]_0^1 = n/n+1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx^n dx = 1.$$

$$\text{Mais } \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} (nx^n) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx^n dx.$$

La réponse est NON !

Théorème 3: Intersion limite intégrale

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ intégrable sur $[a, b]$.
- (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors

- f intégrable sur $[a, b]$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| && \text{par linéarité de l'intégrale.} \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx && \text{par inégalité triangulaire.} \\ &\leq \int_a^b \|f - f_n\|_{u,I} dx && \text{par croissance de l'intégrale.} \\ &= (b-a) \|f - f_n\|_{u,I} && \text{car } \|f - f_n\|_{u,I} \text{ est indépendante de } x \end{aligned}$$

Or f_n cvu vers f sur I . Donc par comparaison, $\int_a^b f_n(x) dx$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

Théorème 4:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $c \in [a, b]$, (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si

- $\forall n, f_n$ intégrable sur $[a, b]$.
- (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors

- f intégrable sur $[a, b]$.
- La suite de fonctions (F_n) définie par $F_n : x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f_n(t) dt \in \mathbb{R}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $F : x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f(t) dt \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F_n(x)| &= \left| \int_c^x f(t) dt - \int_c^x f_n(t) dx \right| = \left| \int_c^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| && \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
 &\leq \int_c^x |f(t) - f_n(t)| dt && \text{par inégalité triangulaire.} \\
 &\leq \int_c^x \|f - f_n\|_{u,I} dt && \text{par croissance de l'intégrale.} \\
 &= (x - c) \|f - f_n\|_{u,I} && \text{car } \|f - f_n\|_{u,I} \text{ est indépendante de } t \\
 &= (b - a) \|f - f_n\|_{u,I}
 \end{aligned}$$

Or f_n cvu vers f sur I . Le majorant est uniforme et tend vers 0 ce qui prouve la cvu de F_n vers F .

2.4 Intersion limite dérivée

Motivation :

Question : Comment obtenir que la limite f soit de classe $\mathcal{C}^k(I)$?

Pour obtenir $f \in \mathcal{C}^0$, les hypothèses sont $f_n \in \mathcal{C}^0$ et f_n cvu vers f .

Pour obtenir $f \in \mathcal{C}^1$ cad $f' \in \mathcal{C}^0$, les hypothèses attendues seraient $f'_n \in \mathcal{C}^0$ et f'_n cvu vers f' .

Pour obtenir $f \in \mathcal{C}^k$ cad $f^{(k)} \in \mathcal{C}^0$, les hypothèses attendues seraient $f_n^{(k)} \in \mathcal{C}^0$ et $f_n^{(k)}$ cvu vers $f^{(k)}$.

En réalité c'est un peu plus que ça.

Théorème 5: Intersion limite dérivée

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, si

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
2. f_n converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
3. f'_n converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- f_n cvu sur tout segment de I vers f .
- $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
- $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Preuve :

Soit $a \in I$. On sait qu'une fonction f est de classe $C^1(I)$ si et seulement si $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. On essaie donc de prouver cela en partant du fait que pour tout n entier naturel, f_n l'est et donc

$$\forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$$

Comme f_n converge simplement sur I alors $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ et $f_n(a)$ tend vers $f(a)$.

Par ailleurs f'_n cvu vers une fonction qu'on note g sur I donc $\int_a^x f'_n(t)dt$ cvu vers $\int_a^x g(t)dt$ (théorème d'interversion intégrale limite). Donc par passage à la limite, on a

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

Reste à prouver que $g = f'$.

Comme f_n est $C^1(I)$ alors f'_n est $C^0(I)$ et comme elle converge uniformément sur I , sa limite g est continue sur I (théorème de continuité des suites de fonctions).

Donc par théorème fondamental d'intégration, $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est dérivable en x et sa dérivée vaut g .

On en déduit que $f'(x) = g(x)$ et ce pour tout $x \in I$.

Théorème 6:

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, si

- $f_n \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.
- $\forall 0 \leq j \leq k-1, f_n^{(j)}$ converge simplement sur I .
- $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.
- $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$.

Preuve :

Faites une récurrence sur k et utilisez le théorème de dérivation pour l'hérédité.

Remarque 9:

Tous ces théorèmes de régularité permettent de donner des résultats de régularité sur la limite f même si elle n'est pas connue explicitement : on verra cela au chapitre *Séries de fonctions*.

Une application phare du théorème de dérivation sera donnée dans le chapitre *Séries entières*.