

Séries de fonctions

1 L'objet série de fonctions, notions de convergence

On note **dans tout le chapitre** I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par le passé, nous avons étudié les objets :

- suites numériques (suites de nombres réels) : $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{K}$.
- séries numériques (séries de nombres réels) : $\sum u_n, u_n \in \mathbb{K}$.

On s'intéresse aux séries de fonctions $\sum f_n$, où

$$\begin{aligned} f_n &: I \rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto f_n(x) \end{aligned}$$

Cet objet est différent d'une série numérique de réels $\sum u_n$. On a maintenant deux indices n et x .

Les objets

- Somme partielle d'ordre N : $\forall x \in I, S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$.
- Série de fonctions $\sum f_n$: C'est la suite de fonctions $(S_N)_N$.
- Somme : Limite si elle existe de la suite de fonctions, définie par $\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1.1 Convergence simple

Il existe deux notions de convergence reliées aux séries de fonctions. La première consiste à tenir le raisonnement suivant : je sais comment faire converger une série numérique, j'essaie donc de me ramener à une telle série numérique.

- Pour cela, je fixe un x dans I et j'étudie la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$.
- J'applique ce raisonnement pour chacun des x fixé de l'intervalle I .

Définition 1: Convergence simple

Soient $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(S_N)_N \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in I, S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x).$$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si et seulement si pour tout x de I , la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa limite.

Exemple 1: Comment montrer en pratique la convergence simple

Soit $h_n : x \mapsto \frac{\sin n}{n^2 + x^2}$. Montrer que $\sum h_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

La convergence simple est simplement de la convergence de série numérique pour tout x fixé dans I . On se ramène donc aux techniques de séries numériques. Le fait qu'il y ait un x est perturbant mais cela ne change rien par rapport aux séries numériques car on le fixe.

- **Majoration correctement obtenue et positivité** : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |h_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

car $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n)| \leq 1, n^2 + x^2 \geq n^2$.

- **Conclusion via le théorème de comparaison** : $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison $\sum h_n(x)$ converge absolument donc converge.
- **Traduction correcte en termes de convergence simple** : Ce raisonnement est valable pour tout x réel. Donc $\sum h_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1:

On peut aussi définir les séries de fonctions de variable complexe. La définition reste valable en remplaçant I par $\mathbb{C}$. Par exemple, si on pose $g_n : z \mapsto \frac{z^n}{n!}$, $\sum g_n$ converge simplement vers l'exponentielle complexe.

Remarque 2: Expression (ou pas) de la fonction limite

En général, la limite de la série n'a pas d'expression analytique. Elle est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Parfois, on connaît l'expression comme par exemple pour la série géométrique.

La convergence simple n'est en fait rien d'autre que de la convergence de séries numériques une fois x fixé. Sa vitesse de convergence dépend du point x choisi. Par exemple, une série de fonctions peut très bien converger plus vite lorsque $x = 1$ que lorsque $x = 0$.

1.2 Convergence uniforme

Définition 2:

Soient $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_n(x)$ et $(S_N)_N \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in I, S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_N)_N \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .

Voici deux résultats montrant que ce chapitre est au carrefour des séries numériques et des suites de fonctions. Nous avons vu que si une série numérique convergeait alors son terme général tendait vers 0. Nous avons un résultat analogue sur les séries de fonctions.

Proposition 1:

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur I .

Preuve :

La preuve est identique à celle que vous connaissez pour les séries numériques. Si on note pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$ la somme partielle associée alors $f_N = S_N - S_{N-1}$. Notons S la limite de (S_N)

Donc

$$\begin{aligned}\forall x \in I, |f_n(x)| &= |S_N(x) - S_{N-1}(x)| \\ &= |(S_N(x) - S(x)) - (S_{N-1}(x) - S(x))| \\ &\leq |S_N(x) - S(x)| + |S_{N-1}(x) - S(x)| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|S_N - S\|_{u,I} + \|S_{N-1} - S\|_{u,I}\end{aligned}$$

On a donc majoré uniformément sur I par une suite qui tend vers 0. Donc (f_n) cvu vers 0 sur I .

Remarque 3:

Ce critère est utile pour infirmer la convergence uniforme d'une série de fonctions par contraposée.

Par exemple montrez en exo que la suite de fonctions suivante ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$: $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$. En déduire que la série de fonctions associée ne cv pas non plus uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

De même que pour les suites de fonctions, convergence uniforme implique convergence simple, le résultat reste vrai pour les séries de fonctions et en est une conséquence.

Proposition 2:

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Preuve :

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions des sommes partielles converge uniformément sur I . Alors d'après le cours de suites de fonctions, cette suite converge simplement sur I et donc $\sum f_n$ converge simplement sur I .



Bonne pratique : Démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonction qui converge simplement vers S . Comme on a toujours $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$, la différence entre la limite et la somme partielle d'ordre N donne toujours le *reste* d'ordre N :

$$R_N(x) = S(x) - \sum_{k=0}^N f_k(x) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Il s'agit donc toujours de démontrer que la suite des restes converge uniformément vers 0

Pour majorer le reste, il n'y a pas 36 solutions (ni même 35, ni même 34... en fait juste 2) :

- Soit on fait avec les moyens du bord (majorations classiques)
 - Dans ce cas on obtient une majoration (indépendante de x)

$$|R_N(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k$$

et il s'agit de justifier que la série $\sum u_k$ converge et d'utiliser l'argument que le reste d'une série numérique convergente tend vers 0.

- Soit on est en présence d'une série alternée (ce qui est à justifier) et dans ce cas on tente d'utiliser le CSSA (Critère Spécial des Séries Alternées) :
 - le reste d'ordre N est majoré en valeur absolue par le premier terme du reste :

$$|R_N(x)| \leq f_{N+1}(x)$$

et il reste à majorer ce terme indépendamment de x par une quantité qui tend vers 0

Exemple 2:

La CVU d'une série de fonctions est par définition celle de la suite de fonctions (S_N) des sommes partielles. On applique donc la méthode utilisée dans le chapitre Suites de fonctions à cette suite particulière.

Montrer que $\sum x^n$ cvu sur $[-a, a]$ pour $0 < a < 1$.

$$\text{Considérons } |S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=0}^N x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \right|.$$

$$\text{Puisque } \forall x \in [-a, a], \sum x^n \text{ CVA}, \forall x \in [-a, a], |S_N(x) - S(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} a^n.$$

La majoration est indépendante de x .

$$\sum a^n \text{ CV car } a < 1 \text{ donc le reste } \sum_{n=N+1}^{+\infty} a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\sum x^n$ cvu sur $[-a, a]$.

Rappelons que la première majoration n'aurait pas suffi puisqu'elle dépend de x .

Exemple 3: Exemple avec le CSSA

Montrons que $\sum x^n$ converge uniformément sur $[-a, 0]$ pour $0 < a < 1$.

On a

$$\sum_{n=0}^N x^n = \sum_{n=0}^N (-1)^n (-x)^n$$

Puisque $0 < -x < a < 1$ le signe du terme général est bien alterné, et de plus :

$$|(-1)^n (-x)^n| = |x|^n$$

est bien une suite décroissante vers 0. Ainsi il s'agit bien d'une série alternée.

Alors, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$|R_N(x)| \leq |x|^{N+1}$$

et donc

$$|R_N(x)| \leq \underbrace{a^N}_{\rightarrow 0}$$

La suite des restes converge donc uniformément vers 0, et donc la série de fonctions converge uniformément vers sa somme

Pour les séries numériques, séries d'éléments de l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$, on a vu que $\text{CVA} \implies \text{CV}$.

Pour les séries de fonctions, on étudie des séries d'éléments $(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), ||.||_{\infty, I})$ l'ensemble des fonctions bornées sur I . A t-on un analogue de la convergence absolue qui impliquerait la convergence uniforme ? Ceci fournirait alors un critère très pratique pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

1.3 Convergence normale

Définition 3: Norme uniforme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, on appelle norme uniforme de f la quantité $||f||_{u, I} = \sup_{t \in I} \{|f(t)|, t \in I\}$.

Définition 4:

On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série **numérique** $\sum ||f_n||_{u, I}$ converge.

Avant de voir comment pratiquement on démontre la convergence normale d'une série, posons-nous la question suivante : quel est le lien avec les convergences qu'on connaît ? avec la convergence simple ?

Soit $f_n : I \mapsto \mathbb{K}$.

Comparer pour $x \in I$, $|f_n(x)|$ et $||f_n||_{u, I}$. En déduire la proposition suivante (on commencera par i et on montrera que $i \implies ii$).

Proposition 3: Convergence normale

Soit $f_n : I \mapsto \mathbb{K}$, si $\sum f_n$ converge normalement sur I alors

- i) $\forall x \in I, \sum f_n(x)$ converge absolument.
- ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Cette proposition offre un critère pratique pour infirmer la convergence normale d'une série de fonctions.

On a trouvé un outil pratique pour infirmer la convergence normale d'une série de fonctions. Maintenant,

comment faire en pratique pour démontrer de la convergence normale ?

La série $\sum \|f_n\|_{u,I}$ est une série numérique. Pour étudier la convergence de cette série, on est donc ramené à la stratégie qu'on adopterait pour étudier la convergence d'une série numérique telle que l'est par exemple $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2 + 3}$.

Il y a deux méthodes pour démontrer la convergence normale d'une série de fonctions :

- Soit on arrive à calculer explicitement la norme uniforme et on étudie alors la série numérique correspondante
- Soit :
 1. On majore $|f_n(x)|$ **uniformément en x** pour tout x dans I **par le terme général d'une série convergente**.
 2. On passe à la norme uniforme.
 3. On applique le théorème de comparaison à majoration des séries numériques pour conclure.

Exemple 4: Avec calcul explicite de la norme uniforme

On considère $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$, et on souhaite étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Commençons par étudier les variations à n fixé de f_n sur $I = \mathbb{R}_+$.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Je vous laisse en exercice le tableau de variations. On trouve que la fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$ croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$, décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$: elle admet un maximum en $1/n$. Étant positive, on a pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| = f_n(x)$. Donc $|f_n|$ admet un maximum en $1/n$.

On en déduit que

$$\|f_n\|_{u,\mathbb{R}_+} = \max_{\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = |f_n(\frac{1}{n})| = e^{-1} n^{\alpha-1} = \frac{1}{en^{1-\alpha}}$$

Or $\sum \frac{1}{en^{1-\alpha}}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $1 - \alpha > 1$.
Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha < 0$.

Exemple 5: Avec majoration de la norme uniforme

Étudions $\sum f_n$ où f_n est définie sur $I = [3, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^4 x + 1}$.

On a d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \frac{1}{n^4 x + 1} && \text{car } \cos \text{ est bornée par } 1 \\ &\leq \frac{1}{n^4 x} && \text{car } n^4 x + 1 > n^4 x \\ &\leq \frac{1}{3n^4} && \text{car } x \geq 3 \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|f_n\|_{u,I} \leq \frac{1}{3n^4},$$

qui fournit bien un majorant indépendant de x .

Or $\sum 1/n^4$ (série de Riemann) converge donc, par comparaison, $\sum f_n$ converge normalement sur I .

Remarque 4:

On peut dans tous les cas essayer la première méthode. Cependant, il est assez souvent inutile et plus long de déterminer exactement $\|f_n\|_{u,I}$. A vous de voir !

L'étude de la convergence normale est particulièrement intéressante car cette convergence implique toutes les autres, notamment la convergence uniforme. En particulier, même si on vous demande de montrer la **convergence uniforme** d'une série de fonctions, vous pouvez **commencer par étudier la convergence normale** car c'est souvent plus simple (sauf indications dans la question qui enlèverait tout espoir qu'il y ait convergence normale).

Théorème 1:

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

Preuve :

Montrons que la suite des restes converge uniformément vers 0. Pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

Par passage au sup, $\|R_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$. Cette dernière n'est rien d'autre que le reste d'une série numérique convergente, qui tend donc vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. La convergence uniforme est assurée.

Remarque 5:

Ce théorème est exactement analogue au théorème de convergence absolue pour les séries numériques sauf qu'on remplace la valeur absolue par la norme uniforme. Vous verrez si vous continuez les maths que ce théorème est valable dans ce qu'on appelle des espaces vectoriels normés (EVN) dits complets (une norme étant un outil pour mesurer la taille des objets d'un ev donné). Par exemple, pour le théorème de convergence absolue, on travaille dans l'EVN $\mathbb{R}$ muni de la norme $|\cdot|$. Pour le théorème de convergence normale, on travaille dans l'EVN $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{u,I}$.

2 Régularité de la somme

Dans cette partie, nous énonçons les résultats de régularité sur la somme (limite d'une série de fonctions) comme corollaires des résultats sur les séries de fonction. Il faut bien comprendre qu'il n'y a rien à démontrer et que ce ne sont pas des nouveaux résultats, mais juste l'application des théorèmes d'interversion à la suite de fonction (S_n) avec $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

En revanche, il faut garder en tête que la convergence normale (notion qui n'existe pas sur les suites de fonctions) fournit un outil puissant pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonction.

2.1 Continuité

La première question posée est celle de la continuité : étant donné une suite de fonctions (f_n) continues sur un intervalle, quelle condition garantit la continuité de la somme. Le théorème fondamental suivant y répond.

Théorème 2: Continuité de la somme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, Si

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I :

Alors la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I .

Remarque 6: Très important

Pour conclure à la continuité de la somme sur I , il est possible de remplacer l'hypothèse " $\sum f_n$ converge uniformément sur I " par " $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ". En effet, le théorème nous garantit alors la continuité de la somme sur tout segment de I ce qui est équivalent à la continuité sur I entier.

Comme dans l'exemple ci-dessous, il est en général plus intéressant de commencer par essayer de démontrer la convergence normale.

Exemple 6: Prouver la continuité d'une série de fonctions

Montrons que $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour cela, pas de surprise, on démontre les hypothèses du théorème dans l'ordre.

- **Continuité du terme général** : quel que soit n entier naturel, $x \mapsto \frac{1}{n^2 x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
- **Convergence normale de $\sum f_n$** :

$$\text{Majoration correcte : } \forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{1}{n^2 x} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Passage à la norme uniforme : Donc

$$0 \leq \|f_n\|_{u, [1, +\infty[} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Conclusion par comparaison : Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

- **Conclusion** : Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Est-ce que $\sum f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$?

2.2 Intersion série-intégrale

Le deuxième gros théorème concerne l'intégration d'une série de fonctions. La pulsion compréhensible de l'étudiant consisterait à écrire systématiquement

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

A nouveau cette égalité est vraie si on remplace la série par une somme finie. En revanche pour une série, il faut des hypothèses en raison du passage à la limite. La connaissance et la compréhension du théorème suivant est donc cruciale.

Théorème 3: Intersion série/intégrale

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. Si

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est d'intégrale absolument convergente sur $[a, b]$ ($\int_a^b |f_n(x)| dx$ est un réel).
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors

- $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est d'intégrale absolument convergente sur $[a, b]$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$

Passons maintenant à l'application de ce théorème : le premier exemple est relié aux séries entières. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ où $f_n : x \mapsto x^n$.

Exemple 7: Comment intervertir série et intégrale

Démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

A nouveau, on égrène les hypothèses dans l'ordre :

- **Intégrale absolument convergente** : Pour tout entier naturel n , f_n est d'intégrale absolument convergente sur $[0, x]$ car elle est continue sur ce segment.
- **Convergence normale** : $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, x]$
- **Intervention** : On peut donc intervertir et

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Le changement d'indice $k = n + 1$ donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

alors on a l'égalité voulue. Et ce raisonnement est valable quel que soit x vérifiant $-1 < x < 1$.

2.3 interversion limite-série

Théorème 4: Interversion de limite-série

Soit $a \in \bar{I}$, si

1. $\forall n, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe et est notée l_n ,

2. $\sum f_n$ converge uniformément sur I ,

alors

1. $\sum l_n$ converge,

2. $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$.

Exemple 8:

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$$

converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

De plus, pour tout $n \geq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$$

et pour $n = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1^x} = 1$.

Ainsi, par théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

2.4 Interversion série-dérivée

Dans cette dernière partie, nous étudions l'interversion des séries avec les dérivées et sous quelle condition la somme de la série de fonctions est dérivable. A nouveau, l'interversion avec une somme finie est vraie. La même opération avec une série nécessite à nouveau de la convergence uniforme. Comme pour les suites de fonctions, la différence avec les théorèmes précédents réside dans le fait que cette convergence uniforme porte sur la série des dérivées.

Théorème 5: Interversion série/dérivée

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, si

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ (dérivable sur I et de dérivée continue).

2. $\sum f'_n$ converge normalement sur I :

3. $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque 7: Très importante

A nouveau, on peut remplacer l'hypothèse " $\sum f'_n$ converge normalement sur I " par " $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de I ". En effet, le théorème nous donne alors le caractère C^1 sur tout segment de I et donc sur I .

Exemple 9: Comment montrer qu'une série de fonctions est C^1

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$. Montrons grâce au théorème d'interversion série dérivée que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- **Terme général C^1** : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = -\frac{2x}{(n^2 + x^2)^2}$. Plaçons-nous sur un segment $[-a, a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$ car on ne peut pas majorer uniformément en x sur $\mathbb{R}$ (le numérateur ne se majore que par lui-même). Donc **Majoration uniforme de f'_n** :

$$\forall x \in [-a, a], \quad 0 \leq |f'_n(x)| = \frac{2|x|}{(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{2a}{(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{2a}{n^4}$$

Donc **Passage à la norme uniforme** :

$$\forall x \in [-a, a], \quad 0 \leq \|f'_n\|_{u, [-a, a]} \leq \frac{2a}{n^4}.$$

Application du théorème de comparaison. Or $\sum \frac{2a}{n^4}$ converge donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ Ceci est vrai pour tout $a > 0$.

- **Convergence simple de $\sum f_n$** : Enfin $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

Conclusion : Donc S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et on peut intervertir les symboles intégrale et dérivée).