

TD : Séries de fonctions

Le symbole $\star$ désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté

1 Les classiques

Exercice 1 ().

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto x^n$$

Rappeler l'intervalle de convergence simple de $\sum f_n$ et la valeur de la somme.

Exercice 2 ().

Expliquer pourquoi les phrases suivantes ne sont pas satisfaisantes :

1. "La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement."
2. "La série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur I ."
3. "La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge simplement".

Exercice 3 ().

Démontrer que les séries des fonctions ci-dessous convergent simplement sur l'intervalle donné :

1. La série $\sum h_n$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$h_n : x \mapsto \frac{2 \cos(nx)}{n^2 + x^4}, \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

2. La série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{nx}, \text{ pour tout entier } n \geq 1$$

3. La série $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \quad n \geq 1$$

4. La série $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}, \quad n \geq 1$$

Exercice 4 ().

Déterminer l'intervalle de convergence simple de $\sum f_n$ où

$$f_n : x \mapsto \sqrt{n} x^n$$

.

Exercice 5 ().

On considère les séries de fonctions données dans l'exercice 3.

1. Démontrer que $\sum h_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$, mais converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Démontrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 ().

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n : z \mapsto \frac{z^n}{n!}$$

Montrer que pour tout $a > 0$, $\sum f_n$ converge normalement sur le disque de centre 0 et de rayon a $\overline{D(0, a)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.

Exercice 7 ().

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_n : x \mapsto \ln(n)(2x)^n$$

1. Démontrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1/2]$
2. Démontrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de la forme $[0, a]$ avec $0 < a < \frac{1}{2}$

Exercice 8 (*). Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

Exercice 9 (*).

Soit

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{2n + n^5}$$

pour tout entier $n \geq 1$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 10 (*).

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

Étudier la convergence simple, normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 ()**.

Pour $x \geq 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$$

4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 (★★).

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 13 (★★).

Soit

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$$

définie pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 14 (.)

Soit pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{inx}}{n^2}$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (★).

Soit $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Démontrer sans utiliser son expression que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $] -1, 1[$
2. Rappeler ensuite l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et dites sur quel intervalle la fonction associée est continue
3. En étudiant la limite lorsque $x \rightarrow -1$, peut-on alors dire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \frac{1}{2} \quad ?$$

Exercice 16 (★).

Démontrez que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 17 (★).

Étudier sur quel intervalle la fonction suivante est

1. Définie
2. Continue
3. C^1

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Exercice 18 (***).

Étudier sur quel intervalle la fonction suivante est

1. Définie
2. Continue
3. C^1

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

2 Problème

Exercice 19 (). *Fonction zeta de Riemann*

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

5. En déduire que $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$.
6. Démontrer que ζ est convexe.