Evaluation du 11 Avril

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)
Documents interdits, calculatrice interdites
Barème indicatif :

- Exercice 1 : 5 points
- Exercice 2 : 5 points
- Exercice 3 : 6 points
- Exercice 4 : 7 points

Exercice 1 ().
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; +\infty]$ vers la fonction nulle.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$. *(on pourra par exemple étudier* $\lim\limits_{x\to 0^+} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$*)*
3. Démontrer que la convergence est en revanche uniforme sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction

1. *Fixons $x > 0$ et étudions la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$: le dénominateur $1 - e^{-x^2}$ est strictement positif pour $x > 0$ et le numérateur nx^2e^{-nx} tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ par croissances comparées*
   Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
2. *D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x > 0$, donc :*
   $$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$
   Par ailleurs, lorsque $u \to 0$, $e^u = 1 + u + o(u)$ donc $1 - e^{-x^2} \sim x^2$ lorsque $x \to 0$. Ainsi :
   $$f_n(x) \sim \frac{nx^2e^{-nx}}{x^2} \sim ne^{-nx} \quad \textit{lorsque } x \to 0$$
   Finalement, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = n$ et donc
   $$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$$
   Ainsi, les limites ne peuvent pas s'intervertir et donc la convergence n'est pas uniforme.

Autre méthode :

$$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n^2}}} \sim \frac{\frac{1}{n}e^{-1}}{\frac{1}{n^2}} \sim ne^{-1} \to +\infty$$

donc $f_n(\frac{1}{n})$ ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme.

3. *Sur $[a;+\infty[$, on a $x \geq a$ donc $x^2 \geq a^2$ car la fonction carrée est croissante, puis $-x^2 \leq -a^2$ (multiplication par un nombre négatif), puis $e^{-x^2} \leq e^{-a^2}$ car la fonction exponentielle est croissante, et enfin*

$$1 - e^{-x^2} \geq 1 - e^{-a^2}$$

Le dénominateur n'est lui pas immédiatement majorable donc on fait un tableau de variation de la fonction $h(x) = x^2e^{-nx}$ pour trouver son maximum :

- $h'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = xe^{-nx}(2 - nx)$
- $h'(x) = 0$ *lorsque* $x = \frac{2}{n}$
- *Pour $x < \frac{2}{n}$ $h'(x) > 0$ et pour $x > \frac{2}{n}$ $h'(x) < 0$ donc h est croissante puis décroissante. Elle est de plus positive donc le maximum est bien atteint en $x = \frac{2}{n}$ et vaut :*

$$h(\frac{2}{n}) = (\frac{1}{n})^2 e^{-2}$$

Finalement,

$$f_n(x) \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 e^{-2}}{1 - e^{-a^2}}$$

La majoration est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ donc la convergence est uniforme.

Exercice 2 ().

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Correction

1. *Si* $x = 0$, *alors* $f_n(0) = 0$ *pour tout* n, *donc la limite est* 0.

   Si $x \neq 0$, *on a lorsque* $n \to +\infty$ *:*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \sim \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, *ce qui montre la convergence simple de* (f_n) *vers la fonction nulle.*

2. *Posons* $g = f_n - f = f_n$. *On a :*

$$g(\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

qui ne tends pas vers 0 *lorsque* $n \to +\infty$*, donc la convergence n'est pas uniforme.*

3. *Sur* $[a, +\infty[$*, étudions* $\sup |f_n - f| = \sup |f_n| = \sup f_n$ *car sur cet intervalle la fonction est positive.*

   On a :

$$f'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

   Donc $f'_n(x) = 0$ *lorsque* $x = \frac{1}{n}$*. On obtient par ailleurs le tableau de variations suivant :*

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

   Mais si $a > 0$*, à partir d'un certain rang* $a > \frac{1}{n}$ *donc dans ce cas :*

$$\sup f_n = f_n(a) = \frac{na}{1+n^2a^2} \sim \frac{na}{n^2a^2} = \frac{1}{na} \to 0$$

   Ainsi, la convergence est uniforme.

Exercice 3 ().

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions
$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)} \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in [0; +\infty[$$
2. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions
$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in [0, +\infty[$$

Correction

1. *Commençons par la convergence normale :*

   On évalue la série des sup :
$$\sum \sup_{x \geq 0} |f_n(x)|.$$
   Après calculs, la dérivée vaut
$$f'_n(x) = \frac{n}{(n(1+nx))^2}$$
   donc f_n *est croissante et puisqu'elle est positive on a d'après le tableau de variation*
$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^2}$$
   car $\frac{x}{n(1+nx)} \sim \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$ *lorsque* $x \to +\infty$*.*

   Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente, donc* $\sum f_n$ *converge normalement.*

   Puisque la convergence normale entraine toutes les autres, on peut aussi affirmer que $\sum f_n$ *converge uniformément et simplement sur* $[0, +\infty[$*.*

2. *Commençons par la convergence normale :*

$$|g_n(x)| = \frac{1}{n+x}$$

et cette valeur est maximale sur $[0, +\infty[$ *lorsque le dénominateur est le plus petit possible, c'est-à-dire* $x = 0$.

Donc $\sup |g_n(x)| = \frac{1}{n}$*, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc* $\sum g_n$ *ne converge pas normalement.*

Passons à la convergence simple :

Fixons $x \geq 0$. *Le terme* $\frac{1}{n+x}$ *est un terme décroissant en fonction de n (puisque le dénominateur est croissant) et qui tend vers* 0 *(limite usuelle), donc il s'agit d'une série alternée qui converge.*

Ainsi, $\sum g_n$ *converge simplement.*

Regardons enfin la convergence uniforme :

Etudions, pour $N \in \mathbb{N}$*, le reste*

$$|R_N(x)| = \Big| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \Big|$$

Or d'après le critère des séries alternées, on sait qu'on a la majoration par le premier terme du reste (en valeur absolue) :

$$|R_N(x)| \leq \Big| \frac{(-1)^{N+1}}{N+1+x} \Big| = \frac{1}{N+1+x} \leq \frac{1}{N+1}$$

Or $\frac{1}{N+1}$ *est indépendant de* x *et tend vers* 0*, donc* $\sum g_n$ *converge uniformément.*

Exercice 4 ().

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. En interprétant les intégrales comme des aires sous une courbe, justifier que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2+t^2} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{x^2+k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2+t^2} \mathrm{d}t$$
4. En déduire que
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2} \mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2} \mathrm{d}t$$
5. Démontrer alors que :
$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

Correction

1. *Même s'il suffit de la convergence simple, le terme en n^2 fait penser qu'il y a convergence normale. Montrons le.*
   On a
   $$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x^2+n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$
   car la valeur maximale est atteinte pour $x = 0$ (le dénominateur le plus petit possible est n^2 puisque $n^2 + x^2 \geq n^2$).
   Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum f_n$ converge normalement.
   Donc en particulier il y a convergence simple et donc la fonction est bien définie.
2. *On a déjà la convergence simple de $\sum f_n$. Il reste à montrer que les f_n sont C^1 et que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
   Calculons, pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$f_n'(x) = -\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$$
   C'est un quotient de deux fonctions continues donc elle est continue.
   Le numérateur n'est pas majorable, donc plaçons nous sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Sur cet intervalle :
   $$|f_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^4}$$
   Or $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$. Cela suffit à conclure que $\sum f_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier (même sans la convergence normale sur $\mathbb{R}$ tout entier), et on peut intervertir dérivée et somme :
   $$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$$
3.
4.
5.