

Évaluation du 17 février

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h). Documents interdits, calculatrice interdites.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 5 points
- Exercice 2 : 5 points
- Exercice 3 : 6 points
- Exercice 4 : 6 points

Exercice 1 ().

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(1 + x)}$$

1. Démontrer que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$
2. Démontrer que la convergence est uniforme.

Exercice 2 ().

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$$

1. Démontrer que (f_n) converge simplement vers 0.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur l'intervalle $]0, +\infty[$
3. Soit $a > 0$ un nombre réel. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $]a, +\infty[$.

Exercice 3 ().

1. Étudier sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la convergence simple, uniforme et normale de la **série** des fonctions

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + n^2} \quad \text{avec } n \geq 1$$

2. On étudie dans cette question la **série** des fonctions

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + nx} \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in]0, +\infty[$$

- (a) Démontrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur $]0, +\infty[$.
- (b) Démontrer qu'il y a convergence simple de la série de fonctions sur $]0, +\infty[$.
- (c) Démontrer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
- (d) Déterminer s'il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 4 ().

On pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2x}$$

1. Démontrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$ mais que S n'est pas définie en $x = 0$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum \frac{1}{n+n^2x}$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{1}{n+n^2x}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.
4. Sur quel intervalle I le plus grand possible peut-on affirmer que S est continue ?
5. Parmi les deux limites ci-dessous laquelle ou lesquelles peut-on calculer grâce aux questions précédentes ? Effectuer alors le calcul si possible.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} S(x)$$