

Evaluation du 11 Avril

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)

Documents interdits, calculatrice interdites

Barème indicatif :

- Exercice 1 : 5 points
- Exercice 2 : 5 points
- Exercice 3 : 6 points
- Exercice 4 : 7 points

Exercice 1 ().

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers la fonction nulle.
2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$. (on pourra par exemple étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$)
3. Démontrer que la convergence est en revanche uniforme sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2 ().

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 ().

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx)} \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in [0; +\infty[$$

2. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x} \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } x \in [0, +\infty[$$

Exercice 4 ().

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
3. En interprétant les intégrales comme des aires sous une courbe, justifier que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2 + t^2} dt$$

4. En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2} dt$$

5. Démontrer alors que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$