Évaluation Mercredi 30 avril

Documents interdits, calculatrices interdites. Durée : 15 minutes (tiers-temps : 20 minutes)

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Appliquer les règles de calcul d'équivalents

Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $\dfrac{-\sqrt{n}+\ln(n)}{e^{-n}+\frac{1}{n^2}}$

b) $\sqrt{1-e^{-n}}$

c) $\dfrac{n}{e^n}$

d) $(e^n-3^n)(e^{-n}-\ln(n))$

Correction

a) Pour le numérateur on a $\ln(n) << \sqrt{n}$ *par croissances comparées, et pour le dénominateur on a* $e^{-n} << \dfrac{1}{n^2}$ *par croissances comparées, donc par quotient d'équivalents :*

$$\frac{-\sqrt{n}+\ln(n)}{e^{-n}+\frac{1}{n^2}} \sim \frac{-\sqrt{ﬃ}}{\frac{1}{n^2}} = -n^2\sqrt{n}$$

b) Par TOC $1-e^{-n} \to 1$*, et par composition* $\sqrt{1-e^{-n}} \to 1$*. Ainsi :*

$$\sqrt{1-e^{-n}} \sim 1$$

c) On ne peut pas trouver de suite équivalente dont l'expression est plus simple que $\dfrac{n}{e^n}$*.*

d) On a d'une part $e^n << 3^n$ *(car* $e<3$*) donc* $(e^n-3^n) \sim -3^n$*, et d'autre part* $e^{-n} << \ln(n)$ *puisque* $e^{-n} \to 0$*, donc* $(e^{-n}-\ln(n)) \sim -\ln(n)$*.*
Ainsi, par produit d'équivalents :

$$(e^n-3^n)(e^{-n}-\ln(n)) \sim 3^n\ln(n)$$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Calculer une limite à l'aide des équivalents et/ou par mise en facteur des termes dominants

Détailler le calcul des limites des suites suivantes :

a) $a_n = e^n - e^{n+1}$

b) $b_n = \dfrac{\ln(n+e^n)}{n}$

c) $c_n = \dfrac{\ln(n)-n^2}{e^n+n^2}$

Correction

a) On a :

$$a_n = e^n - e^{n+1} = \underbrace{e^n}_{\to+\infty}\underbrace{(1-e)}_{<0}$$

Ainsi $a_n \to -\infty$

b) On a :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\ln(n+e^n)}{n} \\ &= \frac{\ln\Big(e^n(\frac{n}{e^n}+1)\Big)}{n} \\ &= \frac{\ln(e^n)+\ln\big(1+\frac{n}{e^n}\big)}{n} \\ &= \frac{n+\ln\big(1+\frac{n}{e^n}\big)}{n} \\ &= 1+\frac{\ln\big(1+\frac{n}{e^n}\big)}{n} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{n}{e^n} \to 0$ *par croissances comparées et donc par composition* $\ln\Big(1+\dfrac{n}{e^n}\Big) \to \ln(1) = 0$.
Et donc, par TOC, $b_n \to 1$.

c) On a par croissances comparées et quotients d'équivalents :

$$c_n \sim \frac{-n^2}{e^n}$$

De plus $n^2 << e^n$ *donc* $c_n \to 0$.