Évaluation Mardi 11 février

Documents interdits, calculatrices interdites. Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)

1 SF1 : Passer de l'écriture symbolique à l'écriture "éclatée"

Exprimer sans le signe $\sum$ (avec des « ... + ... + ...») les expressions suivantes en écrivant au moins **les deux premiers termes** et **les deux derniers termes**.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{p}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{j=2}^{100} (\frac{1}{2^j} + 1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X^{k+1}$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{p}{n} = \frac{p}{1} + \frac{p}{2} + \cdots + \frac{p}{p-1} + 1$
2. $\displaystyle\sum_{j=2}^{100} (\frac{1}{2^j} + 1) = (\frac{1}{4} + 1) + (\frac{1}{8} + 1) + \cdots + (\frac{1}{2^{99}} + 1) + (\frac{1}{2^{100}} + 1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X^{k+1} = X^2 + \frac{1}{2} X^3 + \frac{1}{3} X^4 + \cdots + \frac{1}{n-1} X^n + \frac{1}{n} X^{n+1}$

2 SF2 : Passer de l'écriture "éclatée" à l'écriture symbolique

Exprimer avec le signe $\sum$ les sommes suivantes :

1. $n + n^3 + n^5 + n^7 + \cdots + n^{99} + n^{101}$
2. $\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + \cdots + \cos(\frac{(n-2)\pi}{n}) + \cos(\frac{(n-1)\pi}{n})$
3. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 50 \times 51 + 51 \times 52$

Correction

1. $\displaystyle n + n^3 + n^5 + n^7 + \cdots + n^{99} + n^{101} = \sum_{i=0}^{50} n^{2i+1}$
2. $\displaystyle\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + \cdots + \cos(\frac{(n-2)\pi}{n}) + \cos(\frac{(n-1)\pi}{n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$
3. $\displaystyle 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 50 \times 51 + 51 \times 52 = \sum_{i=1}^{51} i(i+1)$

3 SF3 : Calculer le nombre de termes d'une somme

Pour chacune des sommes suivantes, calculer le nombre de termes dans la somme (on ne demande pas de calculer ces sommes !)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{21} (k+1)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} 2^k$
3. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} n$

1. Il y a 21 termes
2. Il y a $n+1-4+1=n-2$ termes
3. Il y a $n+1-0+1=n+2$ termes

4 SF4 : Utiliser la linéarité de la somme

Décomposer en plusieurs sommes les sommes suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n}{j}+j^2\right)$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(kp-1)$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n}{j}+j^2\right)=n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{n}j^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(kp-1)=p\sum_{k=0}^{p}k-\sum_{k=0}^{p}1$

5 SF5 : Calculer une somme arithmétique (ou s'y ramenant)

Calculer les sommes suivantes (il n'est pas demandé de simplifier au maximum les calculs mais le symbole $\sum$ ne doit plus apparaître) :

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}nj$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-2k+1)$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}nj=n\sum_{j=0}^{n-1}j=n\frac{n(n-1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-2k+1)=-2\sum_{k=2}^{n}k+\sum_{k=2}^{n}1=-2\frac{(n-1)(n+2)}{2}+n-1=-(n-1)(n+2)+n-1$

6 SF6 : Effectuer un produit matrice-vecteur

Effectuer si possible les produits matrice-vecteur suivants (détailler le calcul, ne pas donner uniquement le résultat !) :

$$\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\quad;\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\quad;\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Correction

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 1\times\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 2\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = -1\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Le dernier produit n'est pas possible car le vecteur a plus de coordonnées que le nombre de colonnes de la matrice

7 SF7 : Effectuer un changement d'indice

1. Effectuer le changement d'indice $j = k-1$ dans la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$
2. Effectuer le changement d'indice $j = n-k$ dans la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k}$

Correction

1. *En posant $j = k-1$, on a $k = j+1$ et j va de $1-1=0$ à $n-1$ donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 x^j$$

2. *En posant $j = n-k$, on a $k = n-j$ et j va de $n-n=0$ à $n-1$ donc :*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1}$$

8 SF8 : Calculer une somme géométrique (ou s'y ramenant)

Calculer les sommes suivantes (il n'est pas demandé de simplifier au maximum les calculs mais le symbole $\sum$ ne doit plus apparaître) :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k}$
2. $\displaystyle\sum_{j=n}^{2n} 2^j$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k} = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k} = 3\sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{4})^k = 3\frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 12(1-(\frac{3}{4})^{n+1})$
2. $\displaystyle\sum_{j=n}^{2n} 2^j = \frac{2^n - 2^{2n+1}}{1-2} = 2^{2n+1} - 2^n$

9 SF9 : Déterminer la structure géométrique d'un espace engendré

Déterminer, en justifiant, la structure géométrique de chacun des ensembles suivants :

1. $\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}\right\}$
2. $\left\{a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\right\}$
3. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$

Correction

1. *Ensemble généré par deux vecteurs non colinéaires, c'est donc un plan*
2. *Ensemble généré par deux vecteurs, mais qui sont colinéaires (opposés), donc c'est une droite*
3. *Ensemble représentant un point de "départ" et une direction à suivre, donc c'est une droite*

10 SF10 : Résoudre un système linéaire échelonné

Déterminer l'ensemble des solutions, sous forme d'espace engendré, de chacun des systèmes linéaires échelonnés suivants.

1. $\begin{cases} x + z - t = 0 \\ y + t = -1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -a+b+c=0 \\ b-c=1 \\ c=3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2r+s+t=1 \\ s-t=-1 \end{cases}$

Correction

1. *On a 4 variables, 2 pivots (x et y) et 2 paramètres (z et t), avec : $y=-1-t$ et $x=-z+t$ donc :*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z+t\\-1-t\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

2. *Les 3 variables sont des pivots, on obtient en remontant : $c=3$, $b=1+c=4$, $a=b+c=7$. Il y a donc une seule solution : $\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$*
3. *On a deux pivots (r et s) et un paramètre (t), avec : $s=-1+t$ et $2r+(-1+t)+t=1$ donc $r=1-t$. Finalement :*

$$\begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1+t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

11 Exercice global

1. Dans cette question, on pose la matrice M et l'ensemble E suivants :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \right\}$$

   (a) Calculer les produits suivants :

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (b) Démontrer que les 3 résultats obtenus sont des vecteurs de l'ensemble E

2. Dans cette question, on pose un nombre entier quelconque $n \geq 1$ et l'ensemble F suivant, qui sont les vecteurs dont la somme des n coordonnées fait 1 :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

   (a) Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$ et en déduire la ou les valeurs possibles de a pour que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ appartienne à F.

   (b) Pour tout nombre $c \neq 0$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{c}$ et en déduire la ou les valeurs possibles de c pour que le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{2}{c} \\ \frac{3}{c} \\ \vdots \\ \frac{n}{c} \end{pmatrix}$ appartienne à F.

   (c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} \\ x \end{pmatrix}$ appartient à F.

(d) Démontrer que si $v \in F$ et $w \in F$, alors $\frac{v+w}{2} \in F$.

3. Dans cette question, on s'intéresse toujours à l'ensemble F défini précédemment, et on pose une matrice P ayant n lignes et n colonnes, telle que pour tout $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1$$

où $p_{i,j}$ désigne le coefficient de la matrice situé à la ligne i et colonne j.
Démontrer que si $v \in F$, alors $Pv \in F$.

Correction

1. (a) On a, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice M :

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Les 3 résultats précédents sont dans $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de vérifier que la somme de leurs coordonnées fait 1. Or, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{16} = \frac{17}{16}$ et $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$ donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in E \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} \notin E \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in E$$

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, puisqu'il y a n termes dans la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \times a$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ est dans F si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a = 1$, c'est-à-dire $na = 1$ et donc $a = \frac{1}{n}$.

(b) Soit $c \neq 0$. On a, par linéarité puis d'après la formule de la somme arithmétique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{c} = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{c}\frac{n(n+1)}{2}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{2}{c} \\ \frac{3}{c} \\ \vdots \\ \frac{n}{c} \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{c} = 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{c}\frac{n(n+1)}{2} = 1$ et donc $c = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} \\ x \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} \quad + x = 1$$

Or $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$ d'après la formule de la somme géométrique.
Ainsi,

$$x = 1 - \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - 2\left(\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^n\right) = 2(\tfrac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(d) Posons $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in F$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in F$.

On sait alors que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

De plus, $\frac{v+w}{2}$ est le vecteurs suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{v_1+w_1}{2} \\ \frac{v_2+w_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{v_n+w_n}{2} \end{pmatrix}$$

La somme de ses coordonnées est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i+w_i}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i && \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} && \text{car } v \in F \text{ et } w \in F \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a donc bien $\frac{v+w}{2} \in F$.

3. *Posons* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in F$*. On sait alors que* $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Exprimons les coordonnées du vecteur Pv*. En notant* C_1, C_2, C_n *les colonnes de* P *on a :*

$$Pv = \sum_{i=1}^{n} v_i C_i = \begin{pmatrix} v_1 p_{1,1} + v_2 p_{1,2} + \cdots + v_n p_{1,n} \\ v_1 p_{2,1} + v_2 p_{2,2} + \cdots + v_n p_{2,n} \\ \vdots \\ v_1 p_{n,1} + v_2 p_{n,2} + \cdots + v_n p_{n,n} \end{pmatrix}$$

En sommant ces coordonnées et en regroupant les termes en v_1*, ceux en* v_2*, etc... on obtient :*

$$v_1(p_{1,1} + p_{2,1} + \cdots + p_{n,1}) + v_2(p_{1,2} + p_{2,2} + \cdots + p_{n,2}) + \cdots + v_n(p_{1,n} + p_{2,n} + \cdots + p_{n,n})$$

Or on suppose dans l'énoncé que $\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1$ *donc :*

$$\begin{aligned} & v_1 \underbrace{(p_{1,1} + p_{2,1} + \cdots + p_{n,1})}_{=1} + v_2 \underbrace{(p_{1,2} + p_{2,2} + \cdots + p_{n,2})}_{=1} + \cdots + v_n \underbrace{(p_{1,n} + p_{2,n} + \cdots + p_{n,n})}_{=1} \\ & = \sum_{i=1}^{n} v_i \\ & = 1 \quad \text{puisque } v \in F \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $Pv \in F$.