Département de Mathématiques d'Orsay
L3 MFA et M1 Mathématiques et Applications
Sujets de Projet et de TER

Table des matières

1 Fonctions sous-harmoniques, théorie du potentiel et problème de Dirichlet

Alano Ancona – alano.ancona@math.u-psud.fr
Niveau : M1
On commencera par des propriétés élémentaires et importantes des fonctions harmoniques et sous-harmoniques dans le plan complexe. On abordera ensuite des problèmes clefs de la théorie du potentiel comme le problème de l’équilibre (existence de potentiel capacitaire) et/ou la résolution du problème de Dirichlet par la méthode de Perron.
Références : Ransford : Potential theory in the complex plane, vol. 28, London Mathematical Society Student Texts.

Lars Ahlfors “Complex analysis” second ed. (ou le chap X du traité de J. B. Conway ”functions of one complex variable I”).

2 Quelques résultats classiques de topologie

Alano Ancona – alano.ancona@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Programme envisagé :
- Ensemble de Cantor : Réalisations classiques ; caractérisations, quotients.
- Théorème de Hahn-Mazurkiewicz : caractérisation topologique des arcs.

Ref. Dugundji, Bourbaki, Hocking and Young, Livres d’exercices, ...

3 Modular forms, Elliptic curves and Modular curves

Johannes Anschuetz – Johannes.Anschuetz@math.cnrs.fr
Niveau : L3
Modular forms are holomorphic functions on the complex upper halfplane, which satisfy certain functional equations coming from Möbius transformations, and they encode a lot of arithmetic informations. From a different perspective, modular forms are sections of line bundles on modular curves, and modular curves themselves parametrize elliptic curves over the complex numbers.
The aim of this project is now to understand the basic definition/properties of modular forms/modular curves/elliptic curves following the first chapter of the book A first course in modular forms” by Diamond and Shurman.

4 Analyse Multirésolution et bases d’ondelettes

Pascal Auscher – pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
La théorie des bases hilbertiennes d’ondelettes est un sujet actif pour bien des applications. Au niveau mathématique, on développe le concept d’analyse multirésolution comme boîte à outils pour leur construction. Il s’agira de comprendre comment construire les analyses multirésolution et en déduire les bases d’ondelettes. Les groupes motivés pour ce stage peuvent aller jusqu’à construire les bases de Daubechies, à support compact. La référence sera un chapitre du livre de Hernandez-Weiss (A first course on wavelets). Le sujet fera manipuler calcul intégral, espaces hilbertiens et analyse (transformée) de Fourier. Il est plus adapté au niveau M1 mais un groupe d’étudiants avec de très bons résultats en L3

peut s'y attaquer.

5 Espaces de Hardy et théorème de factorisation

Pascal Auscher – pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
Ce sujet touche aux espaces de fonctions holomorphes sur le disque unité du plan complexe vérifiant une propriété d'intégrabilité uniformément sur tous les cercles concentriques au cercle unité. Ces espaces s'appellent les espaces de Hardy. Il s'agit de démontrer le théorème d'existence d'une trace au bord au sens d'un limite radiale presque partout et ses applications aux théorèmes de factorisation/représentation avec les fonctions intérieures et un théorème d'unicité (local). La référence est le livre de Rudin, analyse réelle et complexe.

6 Représentation de solutions de l'équation de la chaleur

Pascal Auscher – pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1
L'objectif est de faire démontrer que toute solution (classique) de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$ sur une bande $(0,T) \times \mathbb{R}$, $0 < T \leq \infty$, avec le contrôle $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}))$, $1 < p \leq \infty$, admet une unique valeur initiale $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ et que u est déterminée par u_0 au sens où $u(t,x) = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{t}} G(\frac{x-y}{\sqrt{t}}) u_0(y)\, dy$, $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}$, où G est la Gaussienne usuelle. Le sujet utilise du calcul intégral et la convolution. On commencera par s'assurer de bien connaître la construction des solutions de l'équation la chaleur par convolution avant de passer à la réciproque. Des notes et références seront fournies. Le sujet est adapatable aux deux niveaux L3 et M1.

7 Théorème de Balian-Low et bases de Fourier locales

Pascal Auscher – pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1
La recherche des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ est un sujet fondamental en théorie de la communication. Claude Shannon, un des pères fondateurs, avait démontré un théorème d'échantillonnage permettant de discrétiser des signaux dits à bande limitée. Dans ce stage, on regardera plutôt les tentatives pour obtenir des bases simples dans les limites posées par le principe d'incertitude sur la localisation en temps et en fréquence. Le théorème

de Balian-Low montre une obstruction forte. Pour aller plus loin, on peut regarder les constructions de bases de Fourier locales qui avec une double localisation dans le plan temps-fréquence permettent de contourner l'obstruction. Il y aura des lectures (internet) sur le principe d'incertitude et l'utilisation du livre de Hernandez-Weiss (A first course on wavelets). Calcul intégral, espaces de Hilbert et un minimum d'analyse de Fourier seront utilisés. Le sujet est adaptable aux niveaux L3 et M1.

8 Théorèmes de cohérence relative en théorie des ensembles

Franck Benoist – franck.benoist@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
On ne peut pas démontrer la cohérence de la théorie des ensembles ZF (axiomatique de Zermelo-Fraenkel). On peut toutefois s'intéresser à la question suivante : si on suppose que la théorie ZF est cohérente, l'est-elle toujours si on lui ajoute tel ou tel axiome ? Le but de ce TER sera de démontrer certains de ces théorèmes de cohérence relative par la méthode des modèles intérieurs. On pourra par exemple démontrer la consistance relative de l'axiome de fondation, de l'axiome du choix, de l'hypothèse du continu. Pour boucler la boucle, on pourra aussi démontrer cet analogue pour ZF du second théorème d'incomplétude de Gödel : si ZF est cohérente, elle ne permet pas de démontrer sa propre cohérence.
Référence : "Théorie des ensembles" de Jean-Louis Krivine (chap. 3, 8 et 9)

9 Convergence et entropie en dynamique

Jérôme Buzzi – jerome.buzzi@math.u-psud.fr
Niveau : M1
L'entropie est un invariant de conjugaison fondamental dans l'étude des dynamiques chaotiques. La maximisation de l'entropie permet de distinguer naturellement des mesures candidates à "représenter toute la complexité du système". Des travaux récents se sont attachés à comprendre la concentration des mesures d'entropie proche de ce maximum. On propose de lire l'article suivant (13 pages, mais avec pas mal de références) comme une porte d'entrée au formalisme thermodynamique en dynamique de type hyperbolique :
S. Kadyrov. EFFECTIVE UNIQUENESS OF PARRY MEASURE AND EXCEPTIONAL SETS IN ERGODIC THEORY. Monat. Math. 2015 (disponible sur arxiv)

10 Le problème de Waring et la méthode du cercle

Kevin Destagnol – kevin.destagnol@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3
Il est bien connu par exemple que tous les entiers ne sont pas somme de deux carrés (Fermat) mais que tout entier est somme de 4 carrés (Lagrange). En 1770, Edward Waring pose la question plus générale de savoir si, pour tout entier strictement positif d, il existe un entier s tel que tout entier positif s'écrive comme une somme de s puissances d-èmes (par exemple pour $d = 2$, on a $s = 4$ et cette valeur est minimale). Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbf{N}^s \quad \text{tels que} \quad n = \sum_{i=1}^{s} x_i^d.$$

Hilbert a apporté une réponse positive à cette question en 1909 et la méthode employée, dite *méthode du cercle* a donné depuis de nombreuses autres applications notamment en ce qui concerne la résolution d'équations diophantiennes. Cette méthode repose pourtant sur la formule d'apparence simple et élémentaire suivante

$$\int_0^1 e^{2i\pi\alpha n} \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}$$

Le but de ce TER sera de comprendre comment exploiter cette identité pour donner une preuve du théorème de Hilbert-Waring. On pourra aussi explorer des questions concernant la taille de l'entier $s = s(d)$ minimal qui convient et on pourra éventuellement inclure une partie programmation avec Sage.
Références *The Hardy-Littlewood method* de R.C. Vaughan, Cambridge Tracts in Math., **125**, Cambridge University Press (2003)
Analytics methods for diophantine equations and diophantine inequalities de H. Davenport, University of Michigan, (1962)
Épreuve commune de 6 heures de l'ENS 2007.

11 Les nombres mal approchables et le jeu de Schmidt

Arnaud Durand – arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
Nous proposons d'étudier quelques propriétés remarquables de l'ensemble des nombres réels mal approchables par les rationnels, à l'aide d'un certain jeu introduit par Wolfgang Schmidt en 1966.
Un réel α est dit mal approchable par les rationnels si $|\alpha - p/q| > c/q^2$ pour un certain $c > 0$ et tous les rationnels p/q. On peut montrer assez facilement que l'ensemble formé

par ces réels est de mesure de Lebesgue nulle, mais on voudrait obtenir des informations plus précises concernant sa taille.

Dans cette optique, Schmidt a introduit le jeu suivant, qui fait intervenir deux joueurs, Alice et Bob, associés respectivement à deux paramètres α et β vérifiant $0 < \alpha < 1/2$ et $0 < \beta < 1$. Bob commence par choisir un intervalle fermé B_1. Alice choisit ensuite un intervalle fermé $A_1 \subset B_1$ dont la longueur est α fois celle de B_1. Bob choisit alors un intervalle fermé $B_2 \subset A_1$ de longueur β fois celle de A_1. Ensuite, Alice choisit à nouveau un intervalle fermé $A_2 \subset B_2$ dont la longueur est α fois celle de B_2, et ainsi de suite. L'intersection des intervalles A_j pour $j \geq 1$ est alors réduite à un seul réel. On dit finalement qu'Alice gagne le jeu si ce réel est mal approchable ; sinon, c'est Bob qui gagne le jeu.

Qui va gagner ? Comme les réels mal approchables forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, on peut penser que Bob peut toujours s'arranger pour gagner. En réalité, c'est le contraire qui se passe et on peut démontrer qu'Alice peut toujours mettre en œuvre une stratégie gagnante.

On appelle ensemble (α, β)-victorieux tout ensemble S vérifiant la propriété précédente, selon laquelle Alice peut toujours s'arranger pour que $\bigcap_j A_j$ appartiennent à S. Le résultat ci-dessus revient alors à dire que les réels mal approchables forment un ensemble (α, β)-victorieux. On peut montrer que tout ensemble victorieux possède la puissance du continu (*i.e.* est en bijection avec $\mathbb{R}$), qu'une intersection dénombrable d'ensembles victorieux est aussi un ensemble victorieux et que l'image réciproque d'un ensemble victorieux par une fonction C^1 dont la dérivée ne s'annule jamais est encore un ensemble victorieux.

Toutes ces propriétés permettent par exemple de montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions C^1 dont la dérivée ne s'annule pas, alors l'ensemble des réels α pour lesquels tous les réels $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots$ sont mal approchables possède la puissance du continu. Cela contribue à montrer que, bien que de mesure de Lebesgue nulle, l'ensemble des réels mal approchables peut être considéré comme “gros” en un sens très fort.

Le travail consistera essentiellement en la lecture de l'article suivant : W. Schmidt, On badly approximable numbers and certain games, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**(1):178–199, 1966.

12 Recouvrements aléatoires du cercle

Arnaud Durand – arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr

Niveau : L3 ou M1

On se propose d'étudier la question suivante, posée par Aryeh Dvoretzky en 1956. On considère une suite d'arcs de longueurs fixées, et répartis uniformément et indépendamment au hasard sur le cercle. À quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite des longueurs peut-on affirmer que presque sûrement, tout point du cercle sera recouvert infiniment souvent par ces arcs ?

J.-P. Kahane, Some random series of functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1985. (Chapitre 11) L. Shepp, Covering the circle with random arcs, Israel J. Math., 11 :328–345, 1972.

13 Formel vs analytique

Veronica Fantini – fantini@ihes.fr
Niveau : L3
La résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) du domaine complexe (comme l'équation d'Airy ou de Bessel) peut être faite, soit par des séries divergentes (méthode de Poincaré), soit par une approche analytique (méthode de Laplace). Le but de ce projet est d'étudier ces deux méthodes et les utiliser pour résoudre l'équation de Bessel.

14 La séries de Kontsevich-Zagier

Veronica Fantini – fantini@ihes.fr
Niveau : M1
La série de Kontsevich-Zagier est une q-série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(q)_n = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\,,$$

où $(q)_n = (q;q)_n$ est le symbole de q-Pochhammer. Elle est intéressante dans différents domaines : en théorie de nombres par apport aux formes modulaires (quantiques), pour le polynôme de Jones du noeud de trèfle en topologie, en physique mathématique dans la théorie de Chern–Simons.
Le but de ce projet est de calculer le développement asymptotique de la série de Kontsevich-Zagier quand $q \to 1$ et d'étudier ses propriétés.

15 Le phénomène de Stokes

Veronica Fantini – fantini@ihes.fr
Niveau : L3
Le phénomène de Stokes est caractéristique des équations différentielles ordinaires (EDO) avec une singularité irrégulière. Le but de ce projet est d'étudier cet phénomène avec le point de vue analytique de la sommation de Borel-Laplace.

16 Sommation de Borel-Laplace pour intégrales exponentielles

Veronica Fantini – fantini@ihes.fr
Niveau : M1
La sommation de Borel–Laplace est une technique pour construire une fonction analytique en partant d'une série divergente. Elle est notamment utilisée en physique théorique en théorie perturbative, mais les séries divergentes sont aussi fréquentes en mathématique. Par exemple le développement asymptotique de la fonctionne Gamma est une série divergente. Le but de ce projet, est de démontrer que les développements asymptotiques des intégrales exponentielles en dimension 1 sont Borel-Laplace re-sommables.

17 Inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev sur des graphes

Joseph Feneuil – joseph.feneuil@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3
Soit $0 < \lambda < n$, $1 < p, q < \infty$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{n} = 2.$$

On dit que l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev est satisfaite si on a une constante $C_{p,q,\lambda}$ pour laquelle

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda} dxdi \leq C_{p,q,\lambda} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout $f \in L^p$, $g \in L^q$.
Dans ce projet, on montrera l'inégalité précédente. Puis s'intéressera à étendre ce résultat sur des graphes et à estimer la constante $C_{p,q,\lambda}$ pour des graphes finis et des valeurs de p, q, λ spécifiques.
L'objectif du projet est de réécrire proprement un article de 13 pages qui sera donné. Vous avez besoin de connaitre les espaces L^p et les multiplicateurs de Lagrange, et de ne pas avoir peur des gros calculs.

18 Inégalités de Poincaré

Joseph Feneuil – joseph.feneuil@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
Les inégalités de Poincaré sont un outil essentiel en analyse (e.g. Analyse fonctionnelle, EDPs, analyse géométrique, ...) qui permet de quantifier la connexité d'un ensemble.

L'inégalité de Poincaré sur des boules de R^n est généralement vue en M1, et il y a plusieurs direction d'études possibles - qui pourront être négociées - en voici quelques exemples : Inégalité de Poincaré sur les boules de R^n avec des poids, ou sur des groupes de Lie, sur des variétés Riemanniennes, inégalités de Sobolev-Poincaré, les liens avec capacité ou trace. Les prérequis sont : une connaissance des espaces Lp et de la théorie de la mesure est nécessaire. Avoir vu les espaces de Sobolev serait préférable.

19 Convolution polynomiale et probabilités

Maxime Février – maxime.fevrier@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1
La convolution des mesures de probabilités décrit la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes. Dans ce sujet, on donnera une nouvelle interprétation matricielle de cette convolution, ce qui conduira naturellement à introduire une autre opération de convolution, appelée convolution polynomiale. L'objectif est de mener une étude comparée des propriétés de ces deux opérations. La convolution polynomiale a été introduite par une équipe d'informaticiens théoriques dans le cadre de leur résolution très remarquée en 2013 d'une conjecture de mathématiques datant de 1959.

20 Mesure de Haar sur le groupe unitaire

Maxime Février – maxime.fevrier@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
L'objectif de ce sujet est de définir et étudier une mesure de probabilité remarquable sur le groupe des matrices unitaires, appelée sa mesure de Haar. Il en existe plusieurs définitions : c'est par exemple la loi d'une matrice dont les colonnes sont obtenues par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une famille de vecteurs Gaussiens complexes standards indépendants. On verra ensuite que, du fait des propriétés de cette mesure, le calcul intégral unitaire, c'est-à-dire le calcul de $\int_{U_n} f(U)dU$, où $f : U_n \to \mathbb{C}$ et dU désigne la mesure de Haar sur U_n, est particulièrement élégant.

21 Répartition des racines d'un polynôme aléatoire sous l'effet de la dérivation

Maxime Février – maxime.fevrier@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$. On note $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Si on suppose n grand, comment se répartissent les racines du polynôme dérivé P' ? de P'' ? de $P^{(k)}$? de $P^{([tn])}$? Ce sujet propose d'étudier les réponses apportées à ces questions au cours de la dernière décennie.

22 Spectre des matrices tridiagonales aléatoires

Maxime Février – maxime.fevrier@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1
Une matrice carrée A est dite tridiagonale si ses coefficients $A(i, j)$ tels que $|i - j| > 1$ sont nuls. Les matrices tridiagonales jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques, notamment l'analyse numérique. Une matrice tridiagonale est aléatoire si ses coefficients $A(i, j)$ tels que $|i - j| \leq 1$ sont choisis de manière aléatoire. L'objectif de ce sujet est d'étudier les propriétés des valeurs propres et vecteurs propres de certaines matrices tridiagonales aléatoires remarquables, notamment lorsque la taille des matrices devient grande. On pourra commencer par s'intéresser à ce qu'on sait des valeurs propres et vecteurs propres des matrices tridiagonales non aléatoires.

23 Tester rapidement si un nombre est premier : l'algorithme AKS

Stéphane Fischler – stephane.fischler@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Le but de ce projet est de comprendre l'algorithme d'Agrawal, Kayal et Saxena qui date de 2002 et permet de savoir si un entier n est premier en un temps polynomial en log(n). Il s'agit du premier test déterministe aussi rapide. Les outils sont algébriques (anneaux Z/nZ, corps finis) ou proviennent de la théorie analytique des nombres (répartition des nombres premiers). Ce sujet s'adresse à des étudiants qui ont suivi, suivent ou comptent suivre les cours d'algèbre, d'arithmétique et de MAO calcul formel. Selon le choix des étudiants on pourra aller plus ou moins loin dans les preuves, ou bien implémenter l'algorithme en Sage. Référence : A. Granville, It is easy to determine whether a given integer is prime, Bulletin Amer. Math. Soc. 42, 2004 (disponible en pdf, notamment sur la page web de l'auteur)

24 Transcendance de e et pi

Stéphane Fischler – stephane.fischler@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Le but de ce sujet est d'étudier une preuve de la transcendance de e et pi, démontrée par Hermite et Lindemann à la fin du 19ème siècle. Il pourra s'agir soit de celle détaillée dans le chapitre 1 du livre de A. Baker "Transcendental Number Theory", qui n'utilise essentiellement que des outils élémentaires, soit de celle qui figure en appendice du livre "Algebra" de S. Lang, qui utilise de l'analyse complexe.

25 Bien dessiner un graphe

Amaury Freslon – Amaury.Freslon@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Un graphe est un objet très simple, qu'il est assez facile de dessiner dans le plan. Mais certaines de ses propriétés, comme le fait d'être planaire, ne deviennent manifestes que si le graphe est bien dessiné. Réciproquement, un bon dessin permet de mieux comprendre le graphe, et en particulier ses symétries. Le but du projet sera de comprendre comment produire de façon systématique de bons dessins de certaines familles de graphes, avec comme objectif le résultat suivant : tout graphe planaire 3-connexe peut être dessiné en trois dimensions comme le squelette d'un polyèdre, de sorte que tous les automorphismes du graphe soient des isométries du polyèdre. La preuve utilisera des bandes de caouthouc, des pièces, et de la géométrie élémentaire. Il n'y a pas de prérequis particuliers, le support sera le début du livre "Geometric graph theory" de L. Lovasz.

26 Polynômes à multiplicateurs entiers

Thomas Gauthier – thomas.gauthier1@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
Pour l'étude de la dynamique d'un polynôme complexe, la compréhension du comportement des points périodiques est essentielle. Un point z est dit périodique s'il existe un entier n tel que $f^n(z) = z$. Une quantité importante pour cette compréhension est son multiplicateur, qui est le nombre complexe $(f^n)'(z)$.
Récemment, Ji et Xie ont résolu une conjecture de Milnor en montrant (entre autres) que les seuls polynômes de degré d dont tous les multiplicateurs des points périodiques sont des nombres entiers sont les polynômes z^d et le polynôme de Chebychev de degré d.
L'objet de ce TER est l'étude d'une preuve relativement élémentaire de ce résultat.

27 Introduction au calcul des variations

Patrick Gérard – patrick.gerard@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Le calcul des variations est un domaine des mathématiques né aux XVIIème et XVIIIème siècles et qui vise — au moins à l'origine — à trouver des courbes $t \mapsto x(t)$ joignant deux points fixés de l'espace et minimisant une certaine quantité, qui s'exprime le plus souvent sous la forme d'une intégrale

$$\int_0^1 L(t, x(t), x'(t))\, dt \ .$$

Un exemple simple est le problème de minimisation de la longueur, où $L(t, x, v) = \|v\|$, la norme euclidienne de v, qui, sans autre condition, a pour solution le segment, selon le principe de Fermat. Un exemple beaucoup moins simple, qui a mobilisé entre autres Galilée, les frères Bernoulli, Euler et Lagrange, est le problème du brachistochrone, consistant à trouver une courbe dans un plan vertical sur laquelle un point matériel pesant, placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés. Il a fallu attendre Euler et Lagrange pour comprendre que, de même que la recherche d'extrema d'une fonction différentiable f sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ conduit à la résolution d'une équation de l'annulation de la différentielle $D_x f = 0$, la recherche d'une courbe extrémale en calcul des variations conduit à la résolution d'une équation différentielle, appelée maintenant équation d'Euler–Lagrange. Le but de ce projet est d'établir cette équation d'Euler–Lagrange en toute généralité, et d'étudier un certain nombre d'exemples, issus de la mécanique ou de la géométrie. **Références**

1. I. Gelfand, S. Fomin, *Calculus of Variations.*
2. B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations.*
3. P. Pansu, *Calcul des variations*, disponible sur la toile.

28 Polyèdres réguliers

Frédéric Haglund – frederic.haglund@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Le projet consiste à étudier le début du livre "Regular polytopes", de H.S.M. Coxeter.
Le sujet du livre est la définition et l'étude des polygones/polyèdres convexes réguliers. Au passage sont évoquées de très nombreuses notions de géométrie, de topologie (voire de théorie des groupes). Il faudra comprendre et expliquer les 2 ou 3 premiers chapitres du livre.
Ce projet permet de se familiariser avec de belles notions classiques de géométrie.

29 Quelques notions d'algèbre commutative

David Harari – David.Harari@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Il s'agira de lire quelques chapitres du livre "Introduction to commutative algebra" d'Atiyah/Mac Donald, en traitant notamment les points suivants :
-Eléments entiers sur un anneau.
-Localisation des anneaux et des modules, applications.
-Décomposition en idéaux primaires dans un anneau noethérien, interprétation géométrique.
-Et éventuellement quelques résultats autour de la notion de module plat.

30 Appariement aléatoire

Cyril Letrouit – cyril.letrouit@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3 ou M1
Si je tire indépendamment au hasard N points dans un cube de côté 1, la plupart du temps ces N points approchent-ils bien une "mesure uniforme" sur le cube, et si oui, à quel point ? Cette question d'apparence anodine apparaît dans plusieurs disciplines : physique statistique, machine learning, ou transport optimal par exemple. Si la réponse à ce problème précis est aujourd'hui connue, de nombreuses variantes de ce problème restent cependant mystérieuses.
La littérature sur le sujet est abondante, et l'objectif du mémoire sera d'en comprendre certains aspects, au travers de lectures d'articles et de discussions. En fonction des centres d'intérêt des étudiants, nous pourrons l'aborder avec des outils d'équations aux dérivées partielles, de probabilités ou de combinatoire.

31 Lemme de Noether

Pierre Lorenzon – pierre.lorenzon@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1

32 Théorème des zéros de Hilbert

Pierre Lorenzon – pierre.lorenzon@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3

33 Densités de population

Bertrand Maury – Bertrand.Maury@math.u-psud.fr
Niveau : L3
On dispose de données très riches et précises sur la distribution des populations à l'échelle d'une ville, d'une région, ou d'un pays.
L'objectif de ce projet est de mettre en oeuvre des outils mathématiques (analyse spectrale, ondelettes, recherche de composantes connexes du support, recherche de maxima locaux . . .) pour extraire de ces données brutes des informations sur la nature de l'implantation des populations. Un axe de réflexion pourra être le suivant : peut on à partir de la carte de densité de population identifier et localiser les villes, agglomérations urbaines, villages, . . . ?

34 Modélisation thermique des bâtiments

Bertrand Maury – Bertrand.Maury@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Le chauffage des bâtiments (habitation et bureaux) contribue de façon essentielle à l'émission de gaz à effet de serre. L'objectif de ce projet est l'élaboration, l'étude, et idéalement de la validation, de modèles robustes pour suivre l'évolution de la température dans les différents espaces d'un bâtiment, pour mieux comprendre les facteurs qui entrainent de fortes consommation d'énergie. L'écriture de lois simples conduit à un système discret de type équation de la chaleur discrète, basé sur un opérateur de Laplacien discret.
Au delà de l'étude théorique du système obtenu, il s'agira d'étudier des scénarios visant à limiter la consommation en énergie, en évaluant l'importance relative de différents facteurs. Des étudiant motivés pourraient aller jusqu'à aborder des problématiques de contrôle en boucle fermée (principe de thermostat), pour évaluer l'efficacité de différentes stratégies. Comme pour le projet sur le climat, il s'adresse en priorité à des étudiants désireux de s'investir, au delà des aspects mathématiques et numériques, dans la recherche d'ordres de grandeurs pertinents pour les paramètres du modèle.

35 K-théorie algébrique

Omar Mohsen – omar.mohsen@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
La K-théorie a été introduit par Grothendieck en 1957 pour généraliser le théorème de

Riemann Roch. Depuis elle a été utilisé en topologie algébrique, théorie de représentations, théorie de l'indice, algèbre d'opérateurs, etc ..
Dans ce projet, on va définir la K-théorie algébrique K0, K1, K2 (de Milnor) d'un anneau, et démontrer comme résultats principal la suite exacte entre K0,K1,K2 et calculer K0,K1,K2 d'un corps.
Références :
Milnor Introduction to algebraic K theory
Weibel The K-Book : An Introduction to Algebraic K-theory
Rosenberg Algebraic K-Theory and Its Applications

36 K-théorie topologique et périodicité de Bott

Omar Mohsen – omar.mohsen@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
La K-théorie a été introduit par Grothendieck en 1957 pour généraliser le théorème de Riemann Roch. Depuis elle a été utilisé en topologie algébrique, théorie de représentations, théorie de l'indice, algèbre d'opérateurs, etc ..
Dans ce projet, on va définir la K-théorie topologique K0 et K1 (d'un espace topologique compact et/ou d'une algèbre de Banach), et démontrer comme résultat principal la périodicité de Bott.
Il ya une dizaine de démonstration différentes de la périodicité de Bott voir
https ://mathoverflow.net/questions/8800/proofs-of-bott-periodicity
On va suivre la démonstration élémentaire de Atiyah et Bott.
Références :
Atiyah K theory
Karoubi K theory
Husemoller Fibre bundles (Ici on trouve une démonstration élémentaire de la périodicité de Bott écrite pour les espaces compacts)
Blackadar K-THEORY FOR OPERATOR ALGEBRAS (Ici on trouve la même démonstration qu'on trouve dans Husemoller mais écrite pour les algèbres de Banach)
Murphy C*-Algebras and Operator Theory (La démonstration de Bott ici est différente)

37 La formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Thomas Mordant – thomas.mordant@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3
Le but de ce projet est de comprendre la formule de Baker-Campbell-Hausdorff dans le cadre des groupes et algèbres de Lie, en suivant les cinq premiers chapitres du livre de Hall

”Lie Groups, Lie Algebras, and Representations”.

38 Compréhension et analyse du “model collapse” dans les schémas d’entraînement de modèles de machine learning

Zacharie Naulet – zacharie.naulet@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
Ce projet explore le phénomène de “model collapse”, un risque en machine learning où les performances des modèles se dégradent en consommant des données générées par d’autres IA. Ce problème devient critique à mesure que les contenus publics produits par des IA, telles que ChatGPT, augmentent et se retrouvent réintégrés dans les ensembles d’entraînement des IA de nouvelle génération, créant une boucle de rétroaction qui diminue la diversité et la précision des modèles.
À travers l’étude de l’article d’Apratim Dey and David Donoho. ”Universality of the $\pi^2/6$ pathway in avoiding model” collapse, 2024. https ://arxiv.org/abs/2410.22812
(et des références citées dans cet article), les étudiant.e.s analyseront les deux schémas d’entraînement “jouets” :
- Le schéma d’augmentation, qui réintègre les données réelles et synthétiques à chaque génération d’entraînement ;
- Le schéma de rejet, dans lequel les données synthétiques remplacent progressivement les données réelles dans les générations successives.

Apratim Dey and David Donoho démontrent que le schéma d’augmentation limite efficacement la dégradation des performances en montrant que le risque de test est universellement borné par $\frac{\pi^2}{6}$ fois le risque dans la situation où seules les données réelles sont utilisées.
Les étudiants devront lire l’article, identifier les concepts mathématiques clés, et expliquer les résultats pour mieux comprendre le phénomène de “model collapse” et les stratégies de prévention.

39 Distribution des valeurs propres du laplacien : Loi asymptotique de Weyl

Stéphane Nonnenmacher – Stephane.Nonnenmacher@math.u-psud.fr
Niveau : M1
On s’intéresse au spectre de l’opérateur $-\Delta_\Omega$ (Laplacien positif) sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec conditions aux bords de Dirichlet.
Cet opérateur est auto-adjoint et positif sur $L^2(\Omega, dx)$, et admet un spectre purement discret $\mathrm{Spec}(-\Delta) = \{0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots\}$ fait de valeurs propres de multiplicités

finies, et satisfaisant $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
On voudrait des informations quantitative sur ce spectre ; on introduit alors la *fonction de comptage* spectrale $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, définie par

$$\mathcal{N}(\Lambda) = \#\left\{n \in \mathbb{N}; \lambda_n \leq \Lambda\right\}.$$

Inspiré par les conjectures des physiciens Lorentz et Sommerfeld, H.Weyl a montré en 1911 que cette fonction de comptage admet une asymptotique dans la *limite de haute fréquence* $\Lambda \to \infty$:

$$\mathcal{N}(\Lambda) = C_d \mathrm{Vol}(\Omega)\Lambda^{d/2}(1 + o(1)), \qquad \Lambda \to \infty,$$

avec C_d une constante universelle ne dépendant que de la dimension d, et $\mathrm{Vol}(\Omega)$ est le volume de Ω. Autrement dit, la densité asymptotique des valeurs propres ne dépend que du volume du domaine Ω, mais pas de sa forme.
Ce résultat de *géométrie spectrale* a été montré de diverses manières, en utilisant des outils analytiques différents :

- la preuve originale de Weyl utilise des méthodes variationnelles pour les spectres d'opérateurs autoadjoints ; celles-ci permettent de comparer le spectre de Δ_Ω à celui des laplaciens de Dirichlet et de Neumann sur une union de petits cubes disjoints pavant un domaine proche de Ω.
- des preuves ultérieures utilisent le semigroupe de la chaleur sur Ω, ou du groupe des ondes sur Ω.

Je propose plutôt une lecture de la seconde méthode, utilisant l'asymptotique du semi-groupe de la chaleur sur Ω. On trouvera une preuve détaillée du cas des domaines euclidiens $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans

- C.Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles : Cours et problèmes résolus*, Dunod

Les étudiants pourront également analyser le problème de comptage spectral sur des domaines particuliers (rectangles, disque dans $\mathbb{R}^2$), sur lesquels on dispose d'informations plus explicites sur le spectre (λ_n).
En fonction de leurs connaissances en géométrie riemannienne, ils pourront également s'intéresser au cas similaire de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_g sur une variété riemannienne compacte (X, g), pour lequel un asymptotique de Weyl similaire existe. Là aussi, l'étude de certains cas particuliers (tores, sphères) peut être intéressant.

40 Introduction à la théorie de la persistance

Nina Otter – nina.otter@universite-paris-saclay.fr
Niveau : M1
L'analyse topologique des données (TDA) est un domaine de la science des données à l'intersection de l'algèbre, de la topologie, de la géométrie, des statistiques et de l'apprentissage

automatique. Ce stage est une introduction à la théorie de la persistance, l'une des principales méthodes de l'analyse topologique des données, et est bien adapté aux étudiants qui ont suivi ou suivent des cours de topologie algébrique.
Au cours de ce stage, les étudiants découvriront le théorème fondamental de l'homologie persistante, les principaux résultats de stabilité et quelques-unes des principales applications aux données du monde réel, en particulier aux données variables dans le temps.
Les références pour ce stage incluent les livres et articles suivants :
Persistence Theory : From Quiver Representations to Data Analysis, S. Oudot, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 209, 2015.
The structure and stability of persistence modules, F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, S. Oudot, Springer, 2016 https ://arxiv.org/abs/1207.3674
A roadmap for the computation of persistent homology, N. Otter, M. Porter, U. Tilllmann, P. Grindrod, H. Harrington, EPJ Data Science, 2017,
https ://epjdatascience.springeropen.com/articles/10.1140/epjds/s13688-017-0109-5

41 Empilement de cercles

Pierre Pansu – pierre.pansu@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Quel lien y a t'il entre cartographie et empilements de cercles dans le plan ? C'est l'objet du livre
Kenneth Stephenson, "Introduction to Circle Packing : The Theory of Discrete Analytic Functions", Cambridge University Press (2005).
Le but de l'immersion est d'avancer un peu dans le livre, en évitant les choses trop savantes, et de jouer avec le logiciel développé par l'auteur :
http ://circlepack.com/software.html
La théorie des fonctions analytiques (holomorphes) n'est pas un prérequis.

42 Prédiction linéaire

Philippe Rambour – philippe.rambour@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3
Un processus stationnaire étant donné l'objectif est d'approcher “le mieux possible” la variable aléatoire X_0 (qui correspond au moment présent) comme combinaison linéaire des variables aléatoires X_n, n strictement négatif (le passé). On verra que sous certaines conditions ce problème se ramène à un problème de polynômes orthogonaux et de projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

On se basera beaucoup sur l'article de H. J. Landau "Maximum entropy and the moment problem" in Bulletin (New Serie) of the American Mathematicical Society, Volume 16, Number 1, January 1987.

43 Spectre et pseudo-spectre des matrices

Ophélie Rouby – ophelie.rouby@universite-paris-saclay.fr
Niveau : L3
Dans ce sujet, on s'intéresse à la représentation numérique des valeurs propres d'une matrice. Lorsqu'on représente numériquement le spectre d'une matrice, il peut arriver que le résultat obtenu par l'ordinateur soit très différent du résultat réel et attendu. Ce phénomène peut être expliqué à l'aide de la notion de pseudo-spectre d'une matrice, c'est cette notion que nous proposons d'étudier dans ce sujet.
Référence : L.N. Trefethen, M. Embree Spectra and Pseudospectra - The behavior of non-normal matrices and operators.

44 1 + 2 + 3 + 4 + ... = -1/12

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
La somme dans le titre nécessite bien entendu une interprétation pour donner sens. Le but du mémoire sera de étudier comment traiter le problème dans un cadre rigoureux, qui implique régularisation et renormalisation (une méthode notamment utilisé par les physiciens).
La référence principale sera le site web de Terrence Tao :
https ://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/

45 Application du théorème de Baire : Prolongement continu d'une fonction

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Soit (E, d) un espace métrique complet et $Q \subset E$ un sous-ensemble dense. Rappellons qu'un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Soit $f : Q \to \mathbb{R}$ une fonction

continue définie sur Q. Montrer que si Q n'est pas un G_δ on peut toujours prolonger f continument sur un ensemble strictement plus grand que Q.
Décrire une preuve et donner des exemples. Montrer également que si Q est un G_δ on peut construire une fonction continue sur Q non-prolongeable à un ensemble strictement plus grand.
Discuter l'exemple suivant : Si $E =]0,1]$, $d(x,y) = |x-y|$ (espace non-complets) et $f : \mathbb{Q} \cap E \to \mathbb{R}$ est continue, est-ce que on peut prolonger f sur un ensemble strictement plus grand ?
Références : Notes qui seront fournies + internet.

46 Théorème de Perron-Frobenius et la métrique de Hilbert

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Le fameux théorème de Perron-Frobenius dit qu'une matrice carrée A avec tout élément strictement positif possède une valeur propre simple, strictement plus grande que la valeur absolue de toute autre valeur propre. Le but de ce mémoire est d'aborder une démonstration qui utilise que A induit une contraction stricte de la métrique projective d'Hilbert.
Des notes pour comprendre la preuve (courte) seront fournies et la connaissance de la géométrie projective n'est pas un prérequis.

47 Autour du théorème de Poincaré-Hopf en dimension 2

Michel Rumin – michel.rumin@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Le théorème de Poincaré-Hopf établit une relation entre les points critiques d'un champs de vecteur sur un espace donné et sa topologie.
Il montre par exemple qu'il n'est pas possible de peigner une sphère sans faire d'épi. De la même façon, il donne une relation entre le nombre de sommets, de cols et de lacs sur un île.
La démonstration dans le plan et la sphère est accessible avec des outils de calcul différentiel et de topologie de licence de math, comme par exemple l'indice d'une courbe fermée par rapport à un point. Une fois la stratégie de preuve et les idées globales dégagées, je propose dans ce stage de laisser un maximum d'autonomie au groupe "d'étudiants-chercheurs" pour compléter les arguments. Cela nécessite de bien maîtriser différents outils de calcul différentiel (de niveau L3 magistère de math) et d'aimer réfléchir par soi-même.

48 Estimation de la mesure de Hausdorff des ensembles nodaux de fonctions harmoniques

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : M1
L'ensemble nodal d'une fonction u est simplement l'ensemble des points où elle s'annule. Lorsque u est une fonction harmonique non triviale cet ensemble est petit. L'objet de ce stage est de fournir une estimation précise de sa mesure de Hausdorff d-1 dimensionnelle à l'aide de quantités géométriques liées à u. La preuve utilise des outils classiques d'analyse, la théorie de la mesure, des estimations sur les fonctions harmoniques, les fonctions holomorphes...Un texte détaillé sera fourni aux volontaires.

49 Etude de l'atome d'hydrogène

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Dans ce stage on étudiera en détail la modélisation mathématique de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène c'est à dire celui correspondant à l'état quantique de plus basse énergie. C'est l'état le plus stable.
Cette modélisation utilise des outils classiques d'analyse : analyse fonctionnelle, espaces de Sobolev, fonctions holomorphes etc... Un document détaillé sera fourni aux étudiants.

50 Etude de l'équation de Burgers

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : M1
C'est une équation aux dérivées partielles non linéaire qui intervient en dynamique des gaz. On se propose de décrire la théorie de Cauchy dans le cadre des fonctions dérivables puis dans celui des espaces de Sobolev. (TER destiné à ceux qui ont suivi un cours de distributions.)

51 Etude mathématique des ondes de surface

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
En 1813, répondant à une question-concours de l'académie des Sciences, Augustin-Louis

Cauchy a jeté les bases d'une théorie mathématique des ondes de surface (les vagues) utilisant des résultats antérieurs d'Euler. Son modèle permet, par exemple, de comprendre les effets dévastateurs des tsunamis. On se propose de décrire son mémoire en utilisant le langage d'aujourd'hui.

52 La méthode des caractéristiques

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Il s'agit d'une méthode permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^n$, de la forme

$$F(x, u(x), \partial_x u(x)) = 0,$$

dans le cas où toutes les données (et la solution) sont à valeurs réelles. Les outils mis en oeuvre proviennent du calcul différentiel classique, des rudiments de géometrie différentielle (champs de vecteurs, sous variétés de $\mathbb{R}^n$ ainsi que de la théorie des équations différentielles.