

# Initiation à l'Instrumentation - Cours 2024/2025

---

Marie Poirier-Quinot

[marie.poirier-quinot@universite-paris-saclay.fr](mailto:marie.poirier-quinot@universite-paris-saclay.fr)

Kevin Dupraz

[kevin.dupraz@universite-paris-saclay.fr](mailto:kevin.dupraz@universite-paris-saclay.fr)

Guillaume Agnus

[guillaume.agnus@universite-paris-saclay.fr](mailto:guillaume.agnus@universite-paris-saclay.fr)

Philippe Lecoeur

[philippe.lecoeur@universite-paris-saclay.fr](mailto:philippe.lecoeur@universite-paris-saclay.fr)



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Le Régime Continu - Cours</b>	<b>5</b>
<b>1 Définitions et Principes Généraux</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions topologiques et convention . . . . .	7
1.1.1 Le courant - les charges et leur déplacement . . . . .	7
1.1.2 Potentiel, tension, force électromotrice . . . . .	9
1.1.3 Référentiel . . . . .	11
1.1.4 Dipôle . . . . .	13
<b>2 Lois de la physique - conservation de la charge - lois de Kirchoff</b>	<b>15</b>
2.1 Dipôle et convention d'orientation . . . . .	15
2.2 Réseau . . . . .	17
2.3 Branche . . . . .	17
2.4 Loi des noeuds - conservation de la charge . . . . .	18
2.5 Loi des mailles - conservation de l'énergie . . . . .	19
<b>3 Dipôles élémentaires</b>	<b>21</b>
3.1 La caractéristique d'un dipôle . . . . .	21
3.2 Les dipôles passifs . . . . .	22
3.2.1 Résistance . . . . .	22
3.2.2 La loi d'Ohm . . . . .	23
3.2.3 Association de résistances . . . . .	23
3.3 Les dipôles actifs . . . . .	27
3.3.1 Générateur de tension . . . . .	28
3.3.2 Générateur de courant . . . . .	29
3.3.3 Sources réelles de tension- générateur de Thévenin . . . . .	30
3.3.4 Sources réelles de courant- générateur de Norton . . . . .	31
3.3.5 Pont diviseur de tension . . . . .	32
3.3.6 Pont diviseur de courant . . . . .	33
3.3.7 Association de générateurs . . . . .	34
3.3.8 Equivalence de source . . . . .	39

3.4	Théorèmes généraux . . . . .	42
3.4.1	Théorème de superposition . . . . .	42
3.4.2	Théorème de Thevenin . . . . .	42
3.4.3	Théorème de Norton . . . . .	43
3.4.4	Équivalence Thevenin Norton, équivalence de source ou de modèle . . . . .	43
3.4.5	Analyse d'un circuit . . . . .	43
<b>4</b>	<b>À retenir</b>	<b>49</b>
4.1	Définitions et Principes Généraux . . . . .	49
4.2	Lois de la physique - conservation de la charge - lois de Kirchoff . . . . .	50
4.2.1	Loi des noeuds - conservation de la charge . . . . .	51
4.2.2	Loi des mailles - conservation de l'énergie . . . . .	51
4.3	Dipôles élémentaires . . . . .	52
4.3.1	Les dipôles passifs . . . . .	52
4.3.2	La loi d'Ohm - adaptation des potentiels . . . . .	52
4.3.3	Association de résistances . . . . .	52
4.3.4	Les dipôles actifs - sources réelles de tension - générateur de Thévenin . . . . .	53
4.3.5	Les dipôles actifs - sources réelles de courant - générateur de Norton . . . . .	54
4.3.6	Pont diviseur de tension . . . . .	54
4.3.7	Pont diviseur de courant . . . . .	55
4.3.8	Association de générateurs de tension . . . . .	56
4.3.9	Association de générateurs de courant . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Régime Continu - Exercices en cours</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Régime Continu - Exercices à la maison</b>	<b>75</b>
<b>II</b>	<b>Le régime Variable : régime transitoire et régime forcé</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Introduction aux régimes variables - Pour aller plus loin</b>	<b>93</b>
7.1	quelques conventions... . . . . .	96
7.2	régime transitoire et régime forcé (encore appelé régime permanent ou régime établi) . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Régime transitoire</b>	<b>99</b>
8.1	Régime transitoire d'un système du premier ordre, $n=1$ . . . . .	100
8.1.1	Équation différentielle . . . . .	101
8.1.2	Solution en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ) . . . . .	102
8.1.3	Conditions initiales ou de continuités . . . . .	103
8.1.4	Solution finale . . . . .	103
8.1.5	Temps caractéristique $\tau$ . . . . .	103
8.1.6	Pour aller plus loin . . . . .	104
8.1.7	Régime permanent . . . . .	104
8.1.8	Étude énergétique . . . . .	107
8.2	Régime transitoire d'un système du second ordre, $n=2$ . . . . .	107

---

8.2.1	Réponse indicielle . . . . .	108
8.2.2	Résolution de l'équation différentielle - solution générale . . . . .	111
<b>9</b>	<b>À retenir</b>	<b>115</b>
9.1	Régime transitoire . . . . .	115
9.1.1	Régime transitoire du 1 <sup>er</sup> . . . . .	116
9.1.2	Régime transitoire du 2 <sup>d</sup> ordre . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Représentation des Signaux et Outils Mathématiques</b>	<b>119</b>
10.1	Décomposition d'un signal périodique . . . . .	119
10.2	Caractéristiques d'un signal sinusoïdal . . . . .	122
10.2.1	La Phase . . . . .	123
10.2.2	La valeur moyenne . . . . .	124
10.2.3	La valeur efficace . . . . .	125
10.3	Représentation complexe . . . . .	128
10.3.1	Les nombres complexes . . . . .	128
10.4	Impédance complexe . . . . .	131
10.4.1	Résistance . . . . .	132
10.4.2	Bobine ou inductance . . . . .	133
10.4.3	Condensateur ou capacité : . . . . .	136
10.5	Association d'impédances complexes . . . . .	140
10.5.1	En série . . . . .	141
10.5.2	En parallèle . . . . .	141
<b>11</b>	<b>Représentation des signaux - Exercices en cours</b>	<b>143</b>
<b>12</b>	<b>Régime sinusoïdal permanent forcé</b>	<b>153</b>
12.1	régime permanent forcé dans le cas des systèmes particuliers ... les systèmes filtrant	153
12.2	Etude de la fonction de transfert - le diagramme de Bode . . . . .	155
12.2.1	Le gain en dB . . . . .	156
12.2.2	La Phase . . . . .	158
12.2.3	Cas du filtre passe bas du premier ordre . . . . .	159
12.2.4	autres représentation . . . . .	163
12.2.5	En résumé . . . . .	164
<b>13</b>	<b>Filtres d'ordre n</b>	<b>167</b>
13.1	Les quadripôles . . . . .	167
13.1.1	Détermination de l'impédance d'entrée $Z_e$ . . . . .	168
13.1.2	Détermination de la tension à vide $E_s$ . . . . .	169
13.1.3	Détermination de l'impédance de sortie $Z_s$ . . . . .	170
13.2	Cascade de filtres et adaptation . . . . .	171
13.3	filtre en cascade - synthèse . . . . .	174
13.4	les principaux filtres d'odre 2 . . . . .	177
<b>14</b>	<b>Système filtrant - Exercices en cours</b>	<b>183</b>

<b>III Amplificateurs Opérationnels - Filtre Actifs</b>	<b>193</b>
<b>15 L'amplificateur Opérationnel</b>	<b>195</b>
15.1 Théorème de Millman . . . . .	197
15.2 Généralités (on commence toujours par cela) . . . . .	198
15.3 Régime saturé . . . . .	201
15.3.1 Étude de cas : le trigger de Schmitt . . . . .	202
15.4 Régime linéaire . . . . .	203
15.4.1 Étude de cas : montage amplificateur non-inverseur . . . . .	203
<b>16 Les montages de base avec des AO en régime linéaire</b>	<b>207</b>
16.1 Les montages amplificateurs . . . . .	207
16.1.1 Suiveur - adaptation en tension . . . . .	207
16.1.2 Amplificateur inverseur . . . . .	208
16.1.3 Amplificateur non-inverseur . . . . .	208
16.2 Les montages sommateurs . . . . .	208
16.2.1 Sommateur inverseur . . . . .	209
16.2.2 Le montage différentiel . . . . .	209
16.3 Les filtres actifs . . . . .	210
16.3.1 Les filtres du premier ordre . . . . .	210
16.3.1.1 Filtre passe-bas . . . . .	210
16.3.1.2 Filtre passe-haut . . . . .	211
16.3.1.3 Filtre intégrateur . . . . .	212
16.3.1.4 Filtre déivateur . . . . .	213
16.3.2 Les filtres du second ordre . . . . .	214
16.3.2.1 Filtre passe-bande . . . . .	214
16.3.2.2 Filtre coupe-bande (ou réjecteur) . . . . .	216
16.3.3 Les structures de bases du second ordre . . . . .	217
16.3.3.1 Structure de Rauch . . . . .	217
Les admittances usuelles : . . . . .	218
Cas du déivateur : . . . . .	219
Cas du filtre passe-bande : . . . . .	219
16.3.3.2 Structure de Sallen & Key . . . . .	220
Structure de base de Sallen & Key : . . . . .	220
Structure générale de Sallen & Key : . . . . .	221
<b>17 À retenir</b>	<b>225</b>
17.1 Les amplificateur opérationnels (AO) . . . . .	225
17.2 Le théorème de Millman . . . . .	227
17.3 Calcul de le fonction de transfert d'un montage à base d'AO . . . . .	227
17.4 Les montages de base avec des AO en régime linéaire . . . . .	228
<b>IV Amplificateurs Opérationnels - Exercices</b>	<b>231</b>
<b>18 Exercices de cours</b>	<b>233</b>

*Parce qu'il faut bien commencer un jour.*



# Introduction

LE BUT de cette entrée en matière est de vous familiariser, en douceur, avec le monde de l'électricité. Pour cela nous reprendrons du début les définitions, conventions, principes nécessaires pour comprendre de quoi il s'agit. Je sais, personne n'aime *a priori* l'électronique, mais si vous avez eu l'occasion de randonner en montagne, de faire de la plongée ou de regarder une rivière, vous devriez vous en sortir.

Afin de démysterifier une bonne fois pour toutes les légendes, voici typiquement la représentation simple de ce qu'on appelle un circuit en électronique (figure reprise du très fameux site internet *xkcd*, que je vous invite à aller visiter).

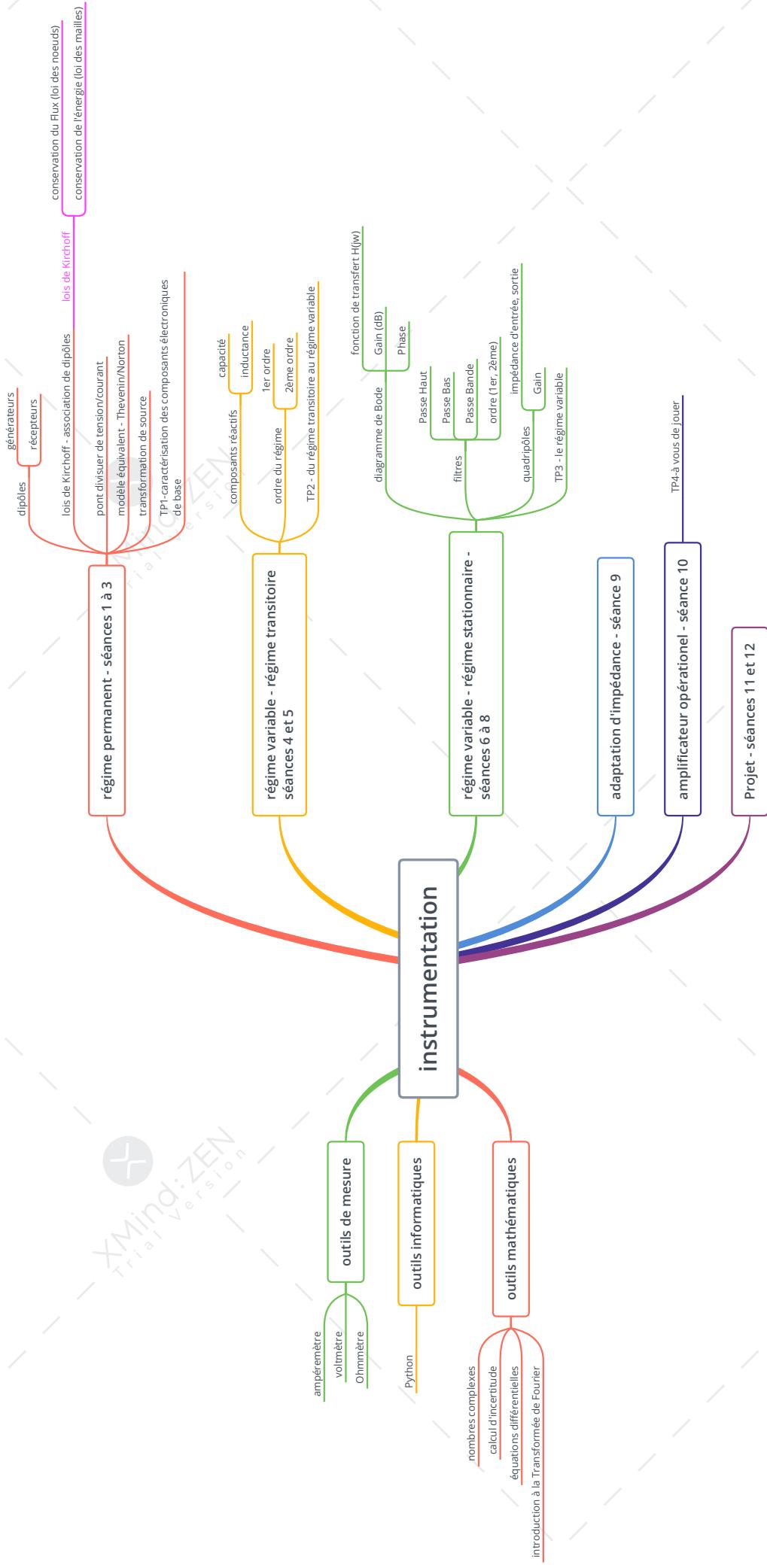
Je me permettrai parfois des raccourcis et des simplifications, afin de vous rendre les choses accessibles. En conséquence, certains des éléments introduits ne seront pas rigoureusement justes (au sens de la physique) et pourraient faire bondir certains de mes collègues (qui manqueraient cruellement d'imagination).

On commence rarement par gravir l'Everest, commencer par de plus petits sommets peut s'avérer plus efficace, enrichissant et beaucoup plus intéressant (au moins on profite mieux du chemin, et on évite de passer son temps à se demander ce qu'a bien pu devenir son poumon droit, subitement disparu lors de la première montée).

LE BUT de ce cours est donc de vous familiariser avec les notions suivantes :

- Appréhender le vocabulaire relatif à l'électrocinétique
- Savoir ce qu'est une différence de potentiel
- Comprendre les mécanismes de la conduction électrique
- Apprendre les notions fondamentales relatives aux grandeurs électriques
- Connaître les conventions appliquées à un circuit électrique
- Connaître les lois fondamentales de l'électrocinétique : loi de noeud, loi de maille

- Connaître les branchements des appareils de mesure
- Connaître les dipôles linéaires en régime continu : récepteur (conducteur ohmique), générateur
- Savoir appliquer les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm
- Calculer les résistances équivalentes
- Savoir reconnaître et utiliser les ponts diviseurs de tension et de courant dans un circuit
- Connaître et savoir appliquer les théorèmes de Thévenin et de Norton
- Savoir associer les générateurs de tension et de courant
- Connaître et savoir utiliser les transformations de source
- Apprendre à simplifier un circuit électrique
- Être capable de faire l'étude d'un réseau en régime continu
- Être capable de mettre en oeuvre la méthodologie nécessaire pour étudier un réseau linéaire en régime continu



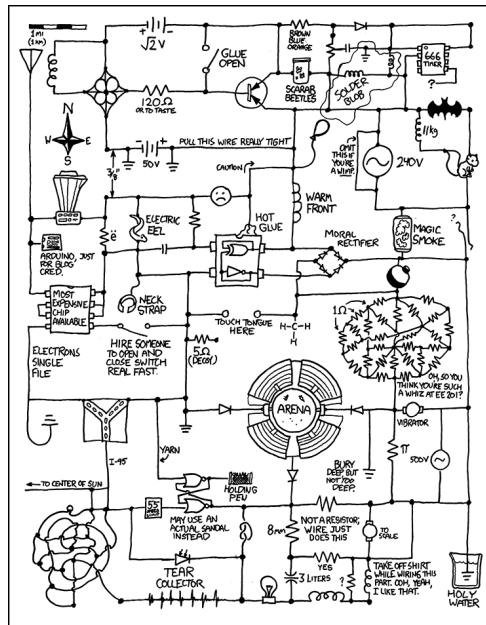


FIGURE 1 – Exemple typique de circuit électrique que nous étudierons au cours de l'année

## Première partie

### Le Régime Continu - Cours



# Chapitre 1

## Définitions et Principes Généraux

### 1.1 Définitions topologiques et convention

#### 1.1.1 Le courant - les charges et leur déplacement



FIGURE 1.1 – Element de l'atome portant une charge négative. *Noter son allure sympathique.*

DANS LE CADRE DE L'ÉLECTROCINÉTIQUE, nous ne nous intéressons pas au mouvement individuel des charges. De la même manière, quand vous nagez, c'est le mouvement d'ensemble des molécules d'eau qui vous intéresse (ex : les vagues, les courants, les baïnes<sup>1</sup>), pas franchement le mouvement de chacune des molécules d'eau.

Bref, dans un circuit, le courant électrique correspond à un mouvement ordonné des porteurs de charge (dans notre cas, on s'intéressera uniquement aux électrons, que je vous ai représenté sur la figure 1.1). On ne tiendra pas compte des mouvements microscopiques désordonnés de ces charges.

---

1. Une baïne est une dépression temporaire ou mare résiduelle ressemblant à une piscine naturelle formée entre la côte et un banc de sable. Lorsque la marée recouvre la baïne, l'eau s'échappe violemment vers l'aval selon un système de vidange.



FIGURE 1.2 – Un courant électrique est un déplacement cohérent d'ensemble de porteurs de charges électriques, on a bien dit cohérent !!!.

UN COURANT ÉLECTRIQUE est un déplacement d'ensemble de porteurs de charges électriques, généralement des électrons, au sein d'un matériau. Ces déplacements sont imposés par l'action de la force électromagnétique, dont l'interaction avec la matière est le fondement de l'électricité (cf. figure 1.2)

Une charge élémentaire  $dq$  qui traverse une section  $S$  d'un conducteur pendant un intervalle de temps  $dt$  crée un courant électrique d'intensité  $i$ , exprimé en Ampère (A) telle que :

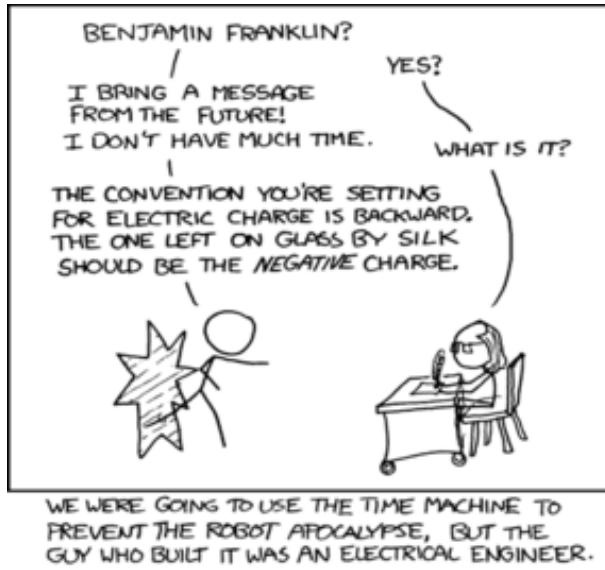
$$i = \frac{dq}{dt}$$

*N.B. :* J'en profite pour vous parler de l'homogénéité des équations, ici on apprend que des Ampères sont homogènes avec de  $\frac{[\text{Coulombs}]}{[\text{temp}]}$ , qu'on peut également écrire :

$$[\text{A}] = \frac{[\text{C}]}{[\text{T}]}.$$

*N.B. 2 :* Petite anecdote que vous devez probablement connaître. Historiquement, les scientifiques ont pensé que les particules qui se déplaçaient dans les métaux étaient chargées positivement<sup>2</sup> et ont défini en conséquence un sens conventionnel du courant comme étant le sens de déplacement des charges positives. Plus tard on a mis en évidence que ce sont très majoritairement les électrons, particules chargées négativement, qui se déplacent dans les métaux et qui permettent la circulation des courants électriques.

2. Comme quoi, nul n'est à l'abri de se tromper... Il n'y a que ceux qui ne font rien qui ne se trompent jamais !

FIGURE 1.3 – Courant et convention, source [www.xkcd.com](http://www.xkcd.com)

Le courant qui traverse le corps humain peut être dangereux, suivant son intensité, comme détaillé dans le tableau 1.1.

Intensité	Effet
0.5 mA	c'est le seuil de perception, ça chatouille comme on dit
10 mA	contractions musculaires, seuil de non lâcher, maximum 3-4 minutes
30 mA	seuil de la paralysie respiratoire, maximum 20-30 secondes
75 mA	seuil de fibrillation cardiaque irréversible, maximum 2 à 5 secondes
1000 mA	arrêt cardiaque, maximum 30 à 100 ms

TABLE 1.1 – Ordre de grandeur des tensions rencontrées dans la vie de tous les jours.

### 1.1.2 Potentiel, tension, force électromotrice

*Potentiel, différence de potentiel, tension ou force électromotrice (fem)*, en première approximation nous considérerons que ces termes représentent la même chose.

LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE<sup>3</sup>, exprimé en volts (symbole : V), est l'une des grandeurs définissant l'état électrique d'un point de l'espace. Il correspond à l'énergie potentielle électrostatique que posséderait une charge électrique unitaire située en ce point, c'est-à-dire à l'énergie potentielle (mesurée en joules) d'une particule chargée en ce point divisée par la charge (mesurée en coulombs) de la particule.

3. il existe également un potentiel gravitationnel. Si  $E_p = m.g.h$ , alors  $\frac{E_p}{m}$  est la capacité du champ gravitationnel à transmettre de l'énergie à une masse quelconque à une hauteur h

On appelle *tension électrique* la différence de potentiel entre deux points *A* et *B* d'une portion d'un circuit électrique. Elle s'exprime comme le potentiel électrique, en Volts.

*N.B. :* Comme toute définition en physique, il est important de comprendre le concept de base. Si une pile est calibrée à 6 Volts, cela signifie qu'elle est prête à fournir 6 joules d'énergie à chaque Coulomb<sup>4</sup> qui se déplace d'une borne à l'autre.

LA DIFFÉRENCE DE POTENTIEL ÉLECTRIQUE (ddp) entre deux points de l'espace ou d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique, ou de trouver plusieurs tensions inconnues dans un circuit électrique ou électronique (par exemple dans le circuit représenté figure 1.4).

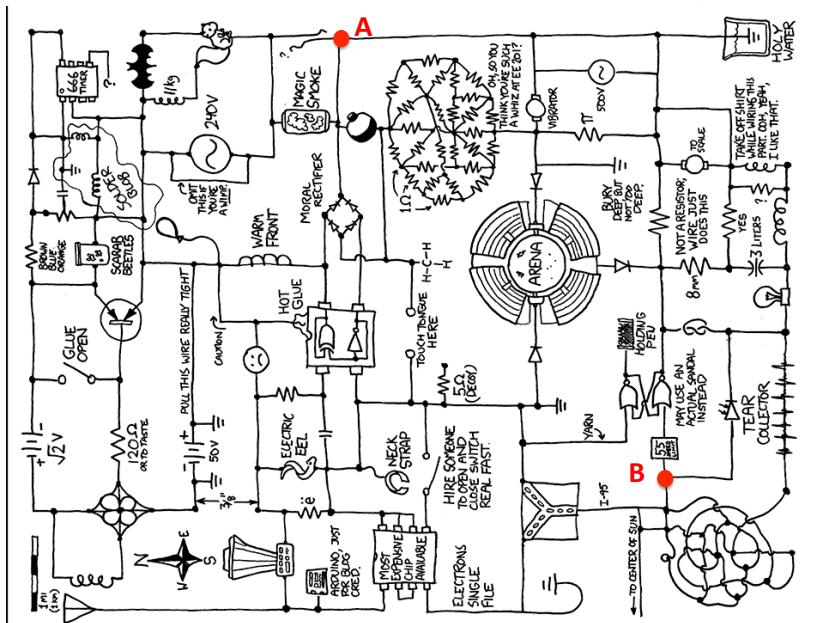


FIGURE 1.4 – Exemple de circuit électrique simple et de mesure de tension entre deux potentiels *A* et *B*.



FIGURE 1.5 – Dans cet exemple, qui n'a évidemment rien de physique, on considère que le potentiel de l'électron est relié à sa taille, ici 3 V (le haut de sa tête) à partir de 0 (ses pieds). Un potentiel n'a de sens que s'il est référencé.

4. L'unité de la charge électrique est le *Coulomb* (C). La charge d'un électron est de  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C

Applications	Valeurs
Circuit imprimé	< 5 V
Électroménager	230 V
Allumage moteur	25 kV
Ligne haute tension	300 kV

TABLE 1.2 – Ordre de grandeur des tensions rencontrées dans la vie de tous les jours.

Une analogie simple pour comprendre cette notion de potentiel électrique est de considérer l'altitude d'un point dans l'espace (par exemple votre tête). La différence de potentiel entre votre tête et vos pieds sera votre taille (en mètres). La différence de potentiel entre votre tête et le sol sera votre taille + un petit quelque chose (talons aiguilles, tabouret, escabeau, etc.). Le tableau 1.2 donne des valeurs typiques de tensions issues de la vie de tous les jours.

### 1.1.3 Référentiel

Dans le cas de la tension ou de la *force électromotrice*(fem), il est essentiel de savoir par rapport à quoi la mesure est réalisée. Quand l'information n'est pas donnée, c'est généralement que la mesure se fait par rapport à 0 V. La question qui se pose alors est : à quoi correspond 0 V ?

Revenons à notre analogie avec l'eau. Si une rivière s'écoule, c'est que sa source est plus haute que son embouchure. Elle s'écoule *toujours* du potentiel le plus haut (la plus haute altitude) vers son potentiel le plus bas (généralement cette histoire s'achève dans la mer).

Reprenons, l'eau s'écoule d'un point *A* vers un point *B* parce qu'elle perd de l'altitude. Dans notre cas, l'altitude est remplacée par le potentiel électrique.

Le courant électrique s'écoule donc du point de potentiel électrique le plus haut au point de potentiel le plus bas.



FIGURE 1.6 – Panorama (de gauche à droite) sur les neuf pics du mont Rose, le Liskamm, Castor, son jumeau Pollux, le Breithorn (à droite de la chaîne de falaises) et le Petit Cervin.

Ce qui compte pour l'écoulement d'une rivière, ce n'est finalement pas l'altitude absolue de la source ni celle de son embouchure, mais la différence entre les deux. De la même manière, pour le courant électrique seule compte la différence de potentiel entre  $A$  et  $B$ .

Le niveau de la mer a été choisi (arbitrairement) comme ayant une altitude nulle. La référence absolue des potentiels (0 V) est la *terre*. Cela correspond à une connexion physique au sol. La terre est représentée par le symbole  sur un schéma électrique. Dans un circuit électrique, la référence des potentiels est généralement prise à la *masse* .

Dans le monde des rivières il existe des altitudes positives (Mont Rose, 4634 m - figure 1.6), et négatives par rapport au niveau de la mer (l'Etang de Lavalduc, à Fos sur Mer : -10 m, la mer morte : -429 m, les fosses des Mariannes : -11034 m).

De la même manière, les potentiels peuvent être définis positifs ou négatifs en fonction du référentiel (cf. figure 1.7). Ainsi, le sens dans lequel on mesure la tension est important. Prenons deux points  $A$  et  $B$ , qui ont respectivement un potentiel de 0 V et de 3 V. Si on mesure la différence de potentiel en partant de  $A$  pour arriver à  $B$  (donc pour passer de 0 à 3 V), on aura une différence de potentiel de +3 V. Si en revanche on part de  $B$  pour arriver en  $A$ , on passe de 3 V à 0 V, ce qui correspond à une tension de -3 V.

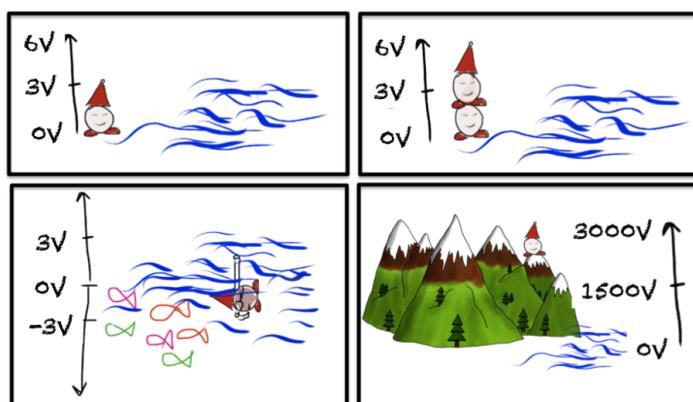


FIGURE 1.7 – Une dernière façon d'illustrer cette notion de référentiel avec des différences de potentiel (ddp) positive ou négative.

### 1.1.4 Dipôle

Le *dipôle électrique* est un composant électrique possédant deux bornes. Par exemple, les lampes, les interrupteurs, les générateurs, les piles, les diodes, les DEL, les résistances et les moteurs sont des dipôles. On distingue en général deux sortes de dipôles :

- Les *générateurs* qui peuvent produire du courant électrique - *dipôles actifs*.
- Les *récepteurs* qui reçoivent le courant électrique - *dipôles passifs*.

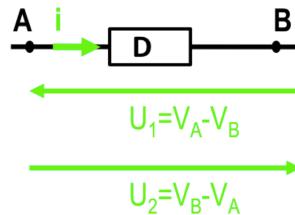


FIGURE 1.8 – Soit D un dipôle, on note  $u$  la tension à ses bornes et  $i$  le courant circulant qui le traverse.

Comme on peut l'observer sur la figure 1.8, on notera systématiquement  $U_{AB}$  la différence de potentiel aux bornes  $AB$  d'un dipôle  $D$  généré par le courant  $i$ . La tension aux bornes  $A$  et  $B$ , du dipôle  $D$  peut s'écrire de deux façons identiques :

- $U_1 = U_{AB} = V_A - V_B$  qui se lit *la tension entre les points A et B est égale au potentiel mesuré en A moins le potentiel mesuré en B*
- $U_2 = U_{BA} = V_B - V_A$  qui se lit *la tension entre les points B et A est égale au potentiel mesuré en B moins le potentiel mesuré en A*

Ainsi, naturellement  $U_{AB} = -U_{BA}$ .

On appelle *caractéristique électrique* d'un dipôle, la courbe représentative reliant  $u$  et  $i$ , c'est-à-dire la fonction  $u = f(i)$  ou  $i = g(u)$ , avec  $u$  : la tension aux bornes du dipôle et  $i$  : le courant circulant qui traverse le dipôle. Elle peut prendre deux formes, selon qu'on mesure le courant en fonction de la tension, ou la tension en fonction du courant.

Cette notion sera extensivement discutée dans la suite du cours (cf 3.1).

*N.B. :* une caractéristique n'a de sens que si un schéma du dipôle comportant les conventions choisies (sens de  $i$  et de  $U$ ) figurent dessus. En effet, inverser la flèche associée à la convention prise pour le courant revient à retourner l'axe des abscisses  $x$  de la caractéristique du dipôle.

*N.B. 2 :* Vous devez ABSOLUMENT retenir le point suivant : le courant circule au travers d'un fil de connexion. En revanche, la *tension aux bornes* de ce fil est toujours *nulle*.

## Chapitre 2

# Lois de la physique - conservation de la charge - lois de Kirchoff

LES LOIS DE KIRCHHOFF sont les lois fondamentales de l'électrocinétique. La loi des noeuds relative à l'intensité du courant à un noeud, exprime la conservation de la charge ; i.e. il ne peut pas y avoir accumulation de charges en un point du circuit en régime stationnaire.

La loi des mailles, relatives aux tensions dans les différentes branches d'une maille, exprime la conservation de l'énergie. Ces lois sont valables dans les *régimes quasi-stationnaires*, approximation toujours valide en régime continu (notre cas ici).

### 2.1 Dipôle et convention d'orientation

Comme nous l'avons vu précédemment, la différence de potentielles entre deux points  $A$  et  $B$  d'un circuit peut s'écrire de deux façons différentes. Ceci donne deux conventions : la *convention récepteur* et la *convention générateur*

LA CONVENTION GÉNÉRATEUR est telle que les flèches courant et tension sont dans le *même sens* aux bornes du générateur (cf. figure 2.1(a)).

Aux bornes d'un générateur le courant circule dans le sens des potentiels croissants. Donc si la flèche indiquant le sens du courant va de  $B$  vers  $A$ , alors  $V_A > V_B$  et  $U_{AB} = V_A - V_B > 0$ . En convention générateur, la tension aux bornes d'un générateur est positive.

LA CONVENTION RÉCEPTEUR est telle que les flèches courant et tension sont *en sens inverses* (cf. figure 2.1(b)).

Aux bornes d'un récepteur le courant circule dans le sens des potentiels décroissants. Donc si la flèche indiquant le sens du courant va de  $A$  vers  $B$ , alors  $V_A > V_B$  et  $U_{AB} = V_A - V_B > 0$ . En convention récepteur, la tension aux bornes d'un récepteur est positive.

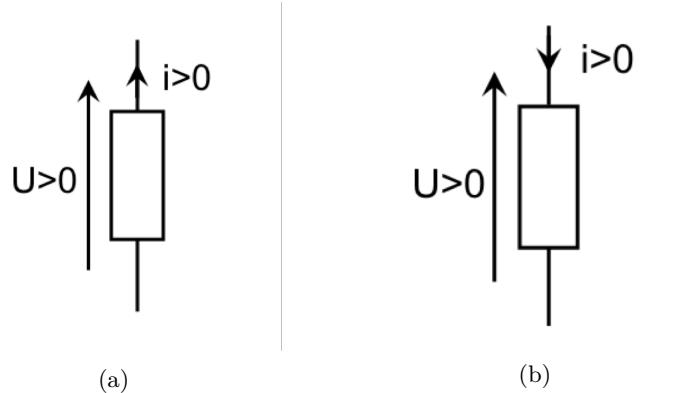


FIGURE 2.1 – (a.) Convention générateur appliquée sur un générateur. (b.) Convention récepteur appliquée sur un récepteur.

Une autre façon de voir les choses consiste à se pencher sur la puissance échangée dans un dipôle. LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE  $P$  caractérise l'énergie électrique échangée par unité de temps<sup>1</sup> :

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

On se rappelle également que dans un dipôle  $P$ , en Watt, consommée ou dissipée s'exprime telle que :

$$P = UI$$

On en déduit :

- Un générateur fournit naturellement de l'énergie. Donc la Puissance qu'il délivre est positive. Il faut donc que  $U$  et  $I$  soient orientés dans le même sens.
- Un récepteur quant à lui consomme de l'énergie. Donc la puissance qu'il délivre sera négative. Il faut donc que  $U$  et  $I$  soient orientés dans des sens opposés.

*N.B. :* Il est essentiel de comprendre que les grandeurs physiques peuvent s'exprimer les unes en fonction des autres ( $[W] = [J]/[T]$ ,  $[W] = [V][A]$ ). Nous pouvons décider de les exprimer en fonction du système international (S.I.), dans notre cours, nous privilierons  $[V]$ ,  $[A]$  et  $[\Omega]$ .

1. *N.B. :* l'homogénéité de l'équation, une puissance en watt est proportionnelle à une variation d'énergie (en joules) par unité de temps (en secondes) ou encore :  $[W] = \frac{[J]}{[T]}$ .

## 2.2 Réseau

UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE ou circuit est un ensemble de dipôles liés entre eux (cf. figure 2.2).

Si ce réseau est accessible de l'extérieur par deux bornes, il constitue lui-même un dipôle. S'il est accessible par 3 bornes on l'appellera tripôles et dans le cas général multipôles.

La figure 2.2 représente un réseau de dipôles.

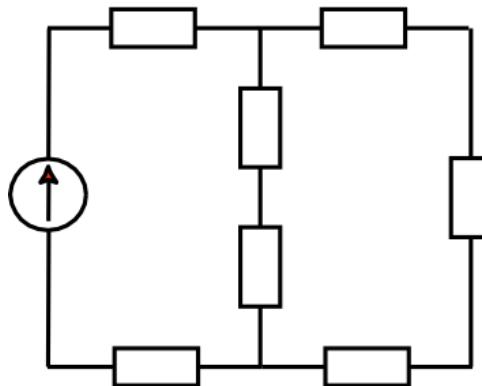


FIGURE 2.2 – Réseau de dipôles. Chaque rectangle ou cercle représente un dipôle.

## 2.3 Branche

UNE BRANCHE est un ensemble de dipôles connectés bout à bout et parcourus par le même courant (cf. figure 2.3).

La figure 2.3 représente les différentes branches (en rouge) de ce réseau de dipôles.

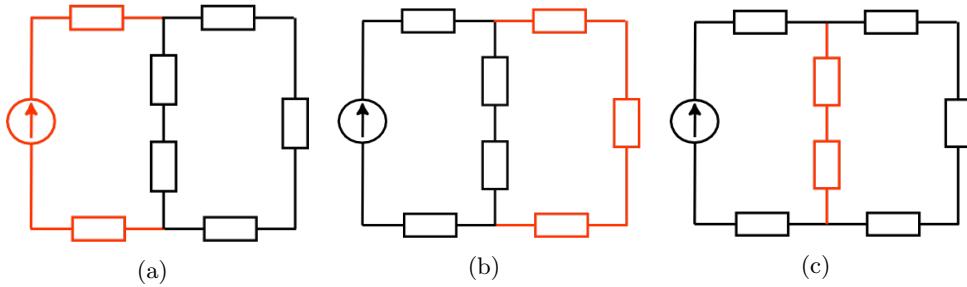


FIGURE 2.3 – Circuit électrique - en rouge sont représentées 3 branches différentes.

## 2.4 Loi des noeuds - conservation de la charge

UN NOEUD est un point commun d'au moins trois pôles : jonction entre au moins trois fils de connexion.

Dans un réseau, on nomme et on oriente le *courant* dans chaque branche. On peut alors appliquer la loi des noeuds, en un noeud du circuit.

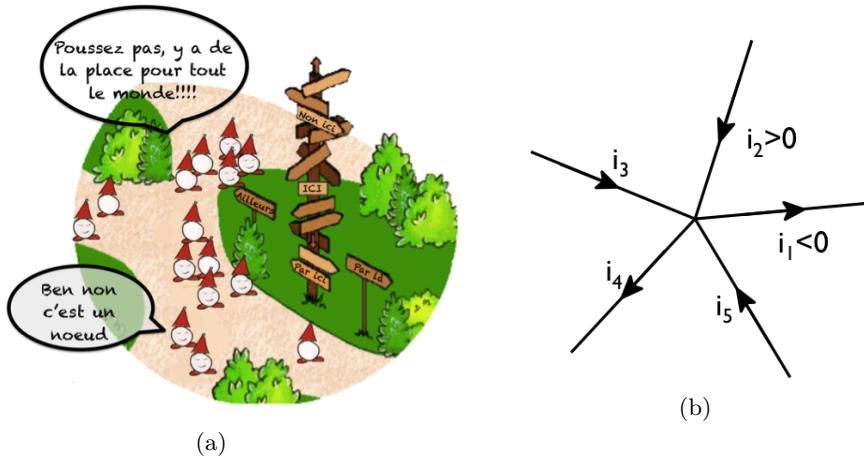


FIGURE 2.4 – (a) Conservation de la charge, tout ce qui rentre doit définitivement ressortir. C'est un grand principe connu de tous. (b) Exemple d'un noeud.

LA LOI DES NOEUDS s'exprime de la façon suivante : la somme des intensités des courants qui arrivent à un noeud est égale à la somme des intensités qui partent de ce noeud, ou encore, la somme algébrique des intensités des courants en un noeud est nulle :

$$\sum_1^N i_k \epsilon_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = \pm 1$$

Sur le schéma figure 2.4(b), l'application de la loi des noeuds donne :

$$i_2 + i_3 + i_5 - i_1 - i_4 = 0$$

ou encore

$$i_2 + i_3 + i_5 = i_1 + i_4$$

## 2.5 Loi des mailles - conservation de l'énergie

UNE MAILLE est un ensemble de branches constituant une boucle fermée et ne passant qu'une seule fois en un même noeud. Dans la figure 2.5, deux des trois mailles de notre réseau sont représentées en rouge.

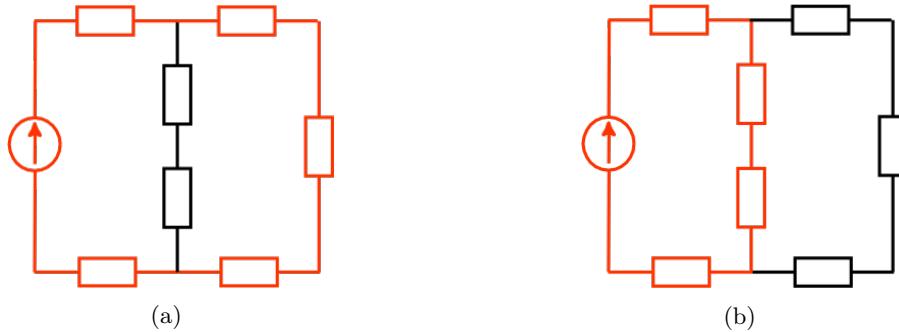


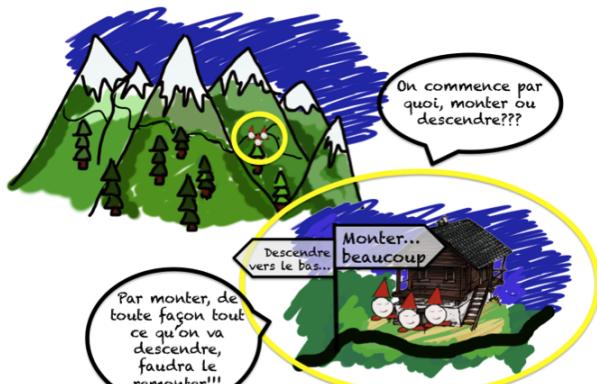
FIGURE 2.5 – En rouge, 2 mailles du réseau

LA LOI DES MAILLES s'exprime de la façon suivante : la somme des tensions prises dans un même sens le long d'une maille orientée est égale à la somme des tensions prises dans l'autre sens de cette même maille, ce qui peut également se dire : la somme algébrique des tensions dans une maille est nulle :

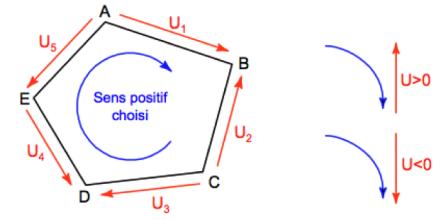
$$\sum_1^N U_k \epsilon_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = \pm 1$$

Sur le schéma de la figure 2.6(b), l'application de la loi des mailles donne :

$$u_1 + u_3 - u_2 - u_4 - u_5 = 0 \text{ ou encore } u_1 + u_3 = u_2 + u_4 + u_5$$



(a)



(b)

FIGURE 2.6 – (a) l'apéro est resté au chalet... on n'a plus le choix que d'y retourner.  
 (b) maille orientée

La flèche bleue oriente le circuit. Toutes les tensions dans le même sens que cette flèche sont comptées négativement. Les autres sont positives.

Une autre façon de concevoir la maille est celle de la randonnée en montagne (oui je sais, beaucoup de mes analogies font référence à la montagne). Imaginez partir en randonnée à la journée (i.e. vous ne prenez ni tente, ni duvet, seulement un pique-nique). Bien obligé de retourner au point de départ !

# Chapitre 3

## Dipôles élémentaires

Modèle ou non de la réalité, les dipôles sont les briques de base d'un circuit électrique.

### 3.1 La caractéristique d'un dipôle

On appelle la **CARACTÉRISTIQUE D'UN DIPÔLE** la courbe  $U = f(I)$  qui représente l'évolution de la tension aux bornes de ce dipôle en fonction de l'intensité du courant  $I$  qui le traverse.

La caractéristique est dite *statique* lorsque cette courbe est indépendante du temps. Un dipôle est dit *linéaire* lorsque la relation  $U = f(I)$  est linéaire au sens mathématique (proportionnalité et additivité). Par exemple dans le cas du régime continu, on peut écrire :

$$U = aI + b$$

avec  $a$  homogène à des ohms ( $\Omega$ ), et  $b$  homogène à une tension (V).

La figure 3.1 illustre 3 caractéristiques différentes pour 3 dipôles différents  $D_1, D_2$  et  $D_3$ . Les conventions (le sens) de  $i$  et  $U$  sont bien représentées. La première caractéristique correspond à la tension  $U$  aux bornes du dipôle en fonction du courant  $i$  circulant dans le dipôle. La deuxième caractéristique correspond au courant  $i$  en fonction de la tension  $U$ . Vous remarquerez que la caractéristique du dipôle  $D_1$  (figure 3.1(a)) n'a rien de particulier si ce n'est qu'elle est bijective. En revanche les caractéristiques des dipôle  $D_2$  (figure 3.1(b)) et  $D_3$  (figure 3.1(c)) sont affines<sup>1</sup> (droites), et d'ordonnée à l'origine nulle ( $U = 0$  quand  $i = 0$ ) dans le cas de  $D_3$ .

---

1. fonction affine est une fonction d'une variable réelle de la forme  $x \rightarrow ax + b$  avec  $a$  et  $b$  réels

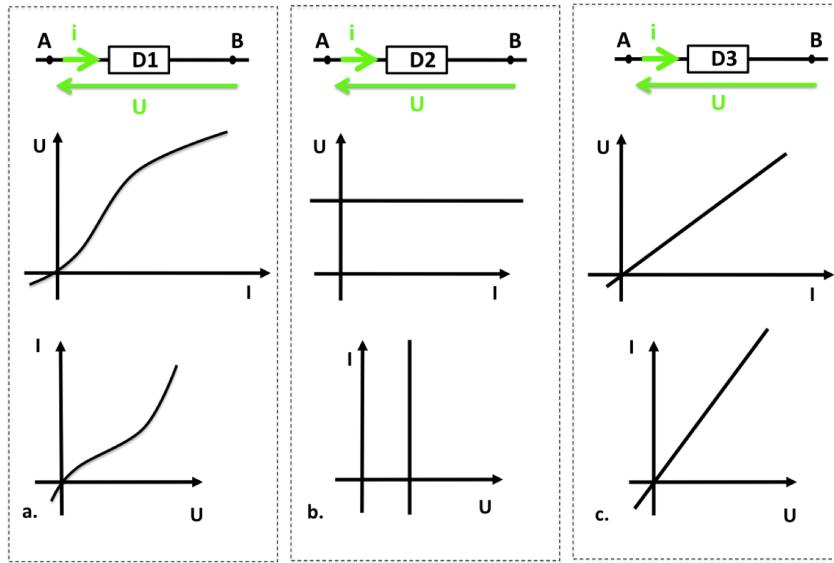


FIGURE 3.1 – Di un dipôle,  $u$  la tension à ses bornes et  $i$  le courant circulant qui le traverse

## 3.2 Les dipôles passifs

### 3.2.1 Résistance

LA RÉSISTANCE  $R$ , exprimée en Ohms ( $\Omega$ ), d'un fil conducteur cylindrique, de section  $S$  ( $[L]^2$ ) et de longueur  $l$  ( $[L]$ ) peut s'écrire<sup>2</sup> :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}$$

avec  $\rho$  la résistivité exprimée en  $[\Omega][L]$ . La figure 3.2 représente les deux conventions, américaine et européenne, de représentation de la résistance. Au cours du semestre nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre.

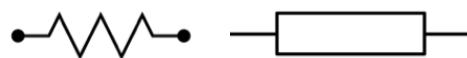


FIGURE 3.2 – Schéma représentatif de la résistance

2. On notera l'homogénéité de l'équation :  $[\Omega] = \frac{[\Omega] \cdot [L] \cdot [L]}{[L]^2}$

### 3.2.2 La loi d'Ohm

LA LOI D'OHM est une relation algébrique, qui relie la tension  $U$ , aux bornes d'un dipôle de résistance,  $R$ , et l'intensité du courant  $I$ , qui la traverse :

$$U = R.I$$

La caractéristique d'un dipôle résistif  $R$  (l'évolution de la tension à ses bornes quand elle est traversée par un courant d'intensité  $i$ ) est représentée sur la figure 3.3.

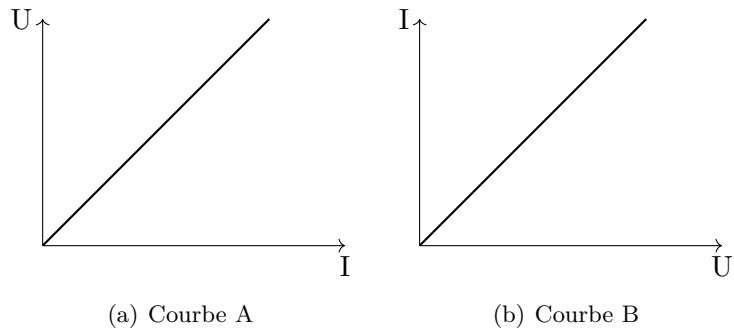


FIGURE 3.3 – Caractéristique d'une résistance  $R$ , pente  $R$  dans le cas de gauche (a),  $\frac{1}{R}$  dans le cas de droite (b)

Quelques remarques :

- Dans les cas que nous rencontrerons, la résistance d'un fil sera considérée comme négligeable, donc la chute de potentiel à ses bornes (la ddp, ou la tension à ses bornes) sera considérée comme nulle
- On notera l'homogénéité de l'équation :  $[V] = [\Omega][A]$
- En convention récepteur ; i.e. quand le courant et la tension sont de sens opposés, la loi d'Ohm s'écrit :  $U = R.I$
- En convention générateur ; i.e. quand le courant et la tension sont de même sens, la loi d'Ohm s'écrit :  $U = -R.I$

### 3.2.3 Association de résistances

Dans ce paragraphe, plusieurs outils vous sont présentés vous permettant d'associer des résistances ensemble. Dans quel but ? L'idée est de pouvoir simplifier les circuits afin d'en rendre

leur compréhension plus simple. Au lieu d'étudier le circuit de la figure 3.4(a), vous pourrez vous contenter de chercher à comprendre comment celui de la figure 3.4(b) fonctionne.

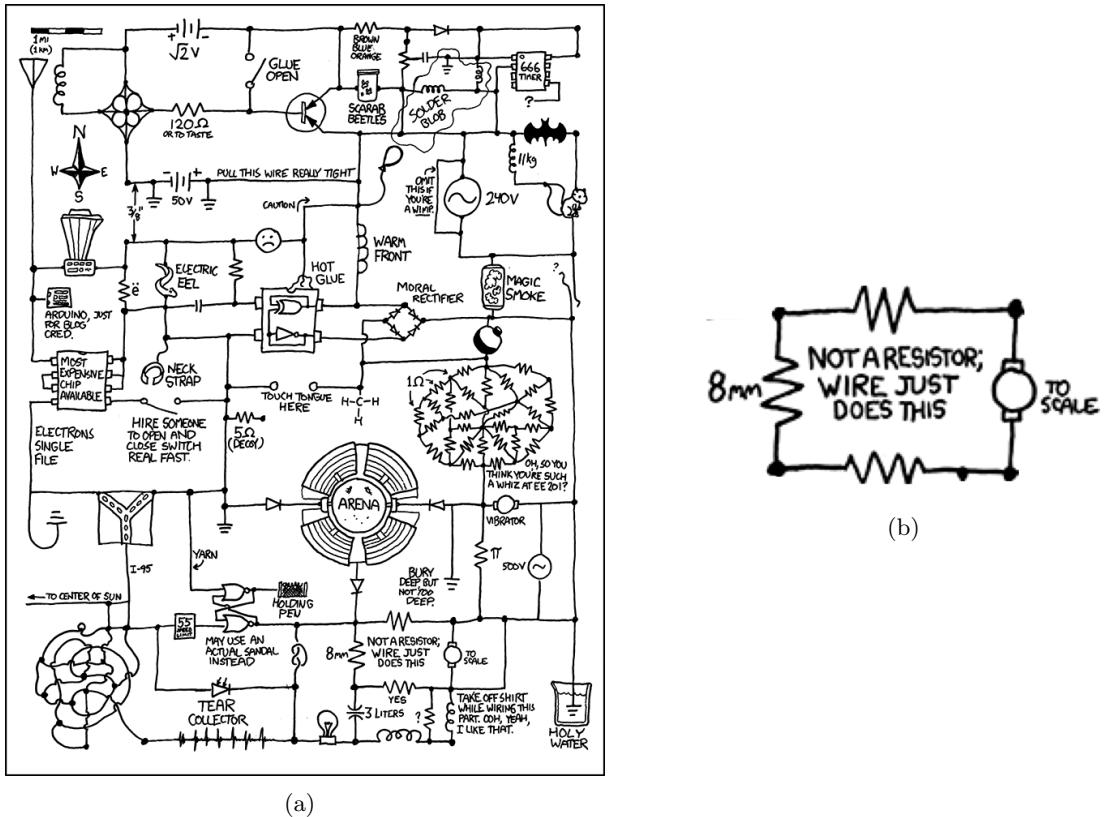


FIGURE 3.4 – Circuit électrique avant simplification et après

## Association en série

DES DIPÔLES SONT ASSOCIÉS EN SÉRIE si le courant qui les traverse est identique. En d'autre terme, ils appartiennent à la même branche (cf. figure 3.5).

L'ASSOCIATION EN SÉRIE de N résistances ( $R_1, R_2 \dots R_N$ ) est équivalente à une résistance  $R_{tot}$  égale à la somme des résistances.

$$R_{tot} = \sum_1^N R_k$$

Dans le cas de la figure 3.5,

$$R_{tot} \equiv R_1 + R_2,$$

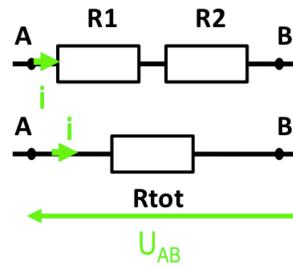


FIGURE 3.5 – Association de résistances en série

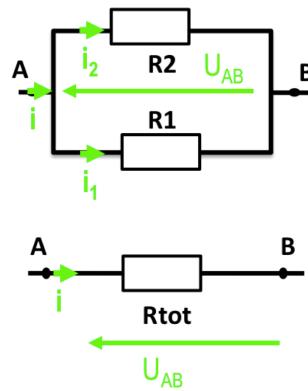


FIGURE 3.6 – Association de résistances en parallèle

**Démonstration :** La tension  $U_{AB}$  peut s'écrire à partir de la loi des mailles<sup>3</sup> :

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2) \cdot I = R_{tot} \cdot I$$

L'ordre relatif des résistances ( $R_1$  avant  $R_2$  ou inversement) n'a aucune importance, ce qui compte c'est la chute de potentiel (ddp, ou tension) aux bornes de l'ensemble.

### Association en parallèle

DES DIPÔLES SONT ASSOCIÉS EN PARALLÈLE ou dérivation s'ils ont le même potentiel à leurs bornes. En d'autre terme, ils sont soumis à la même tension (cf. figure 3.6).

3. On notera l'homogénéité de l'équation finale :  $[V] = [\Omega][A]$ .

L'ASSOCIATION EN PARALLÈLE de N résistances ( $R_1, R_2 \dots R_N$ ) est équivalente à une résistance  $R_{tot}$  égale à :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \sum_1^N \frac{1}{R_k}$$

Dans le cas de la figure 3.6,

$$R_{tot} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

**Démonstration :** On cherche à exprimer  $R_{tot}$  en fonction des paramètres  $R_1$  et  $R_2$ . La loi des noeuds en  $A$  donne<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ \text{or} \\ i_1 &= \frac{U_{AB}}{R_1} \text{ et } i_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} \\ \text{d'où} \\ i &= \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} = U_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ i &= \frac{U_{AB}}{R_{tot}} \end{aligned}$$

*N.B. :* dans le cas particulier où  $R_1 \ll R_2$  (cf. figure 3.7), on se retrouve dans le cas où  $R_2$  est "court-circuitée" par  $R_1$ . Dans ce cas  $R_{tot} = R_1$ .

Une autre façon d'appréhender les choses est d'imaginer que les électrons ont le choix de passer par un chemin très résistant ( $R_2$ ) ou par un chemin qui ne résiste pas du tout ( $R_1$ ). Les électrons sont de petits êtres fragiles et fainéant (bon, cela n'a jamais été démontré formellement, mais il en va des électrons comme de la nature humaine), ils choisiront naturellement le chemin facile.

La figure 3.8 est un exemple d'association de résistances :

- sur le circuit (b),  $R_1$  et  $R_2$  sont en série, et remplacées par une résistance équivalente  $R_1 + R_2$
- sur le circuit (c),  $(R_1 + R_2)$  et  $R_3$  sont en parallèle, et remplacées par une résistance équivalente  $R_{tot} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{(R_1 + R_2) + R_3}$

4. On notera l'homogénéité de l'équation finale  $[A] = \frac{[V]}{[Ω]}$ .

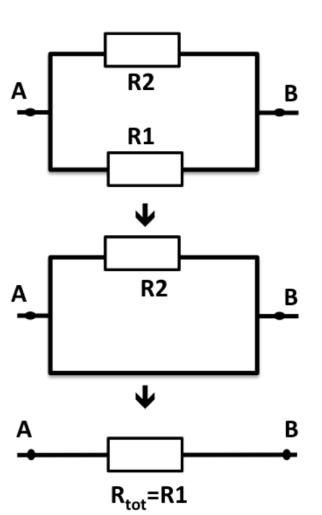
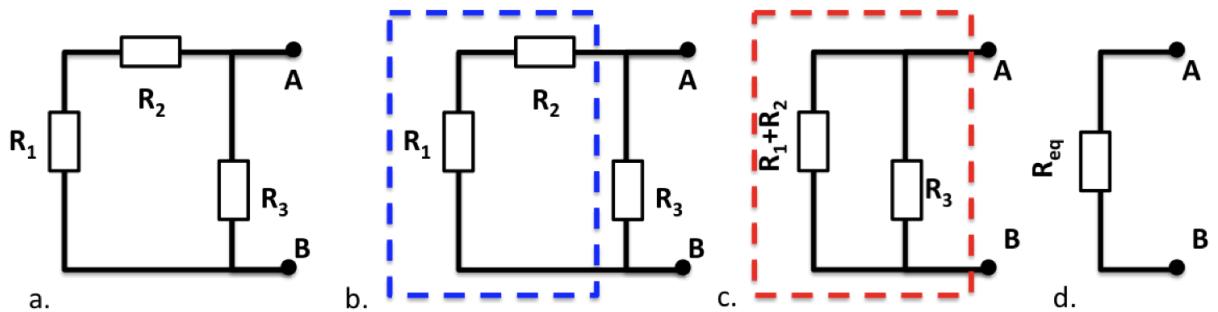
FIGURE 3.7 – Association de résistances en parallèle, cas où  $R_1 \ll R_2$ 

FIGURE 3.8 – Association de résistances

**Attention :** il est faux de penser que les résistances sont forcément associées en série ou en parallèle. Et il arrive souvent qu'on ne puisse pas simplifier un schéma. Si deux résistances ne sont ni traversées par un même courant, ni ne sont soumises à la même tension, alors on ne peut pas les remplacer par une résistance équivalente.

### 3.3 Les dipôles actifs

UN GÉNÉRATEUR est un dipôle qui *fournit* de l'énergie électrique à partir d'autres formes d'énergie (chimique dans les piles par exemple). Par opposition, quand un dispositif utilise de l'énergie électrique et la transforme, c'est un RÉCEPTEUR.

UN GÉNÉRATEUR est un dipôle *actif*. Il existe deux types de générateur en électricité :

- les générateurs de tension
- les générateurs de courant

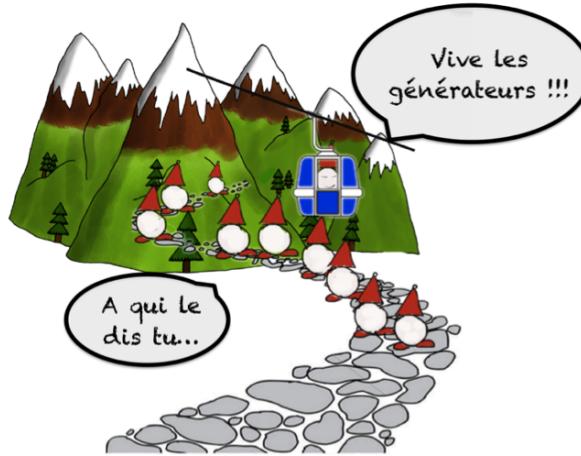


FIGURE 3.9 – Générateur

#### GÉNÉRATEUR, TÉLÉPHÉRIQUE ET POMPE À EAU

Revenons à nos analogies avec la montagne ou encore l'eau et faisons la même analogie entre un générateur et un "téléphérique" ou une "pompe". Nous avons vu que le courant s'écoule puisqu'il descend les potentiels électriques, de la même manière que les élèves descendant de la montagne ou l'eau s'écoule, parce qu'ils/elle perdent de l'altitude. Une fois arrivés à l'altitude la plus basse, le téléphérique ramène les électrons montagnards à l'altitude la plus haute, la pompe à eau ramène l'eau à l'altitude la plus haute. *En électricité, l'équivalent de ce téléphérique ou de cette pompe à eau est un générateur.*

#### 3.3.1 Générateur de tension

UN GÉNÉRATEUR DE TENSION IDÉAL est un dipôle actif qui délivre une tension constante  $E$  quelle que soit l'intensité débitée à ses bornes. On appelle *force électromotrice* ou *fem* la tension  $E$  délivrée par le générateur. Elle s'exprime en Volt (V).

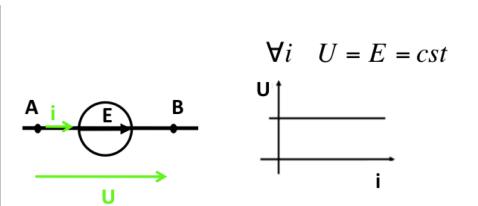


FIGURE 3.10 – Générateur idéal de tension, représentation et caractéristique

*N.B. :* Un générateur idéal de tension, pouvant délivrer une tension constante quelque soit le courant demandé n'existe pas. Cette représentation est un modèle idéal, et nous reviendrons par la suite à la représentation d'un générateur réel.

*N.B. 2 :* Pour éteindre une source de tension, i.e. qu'elle ne fournisse plus d'énergie, il suffit de la remplacer par un interrupteur fermé : un fil (nous avons vu précédemment que la tension aux bornes d'un fil pouvait être considérée comme nulle).

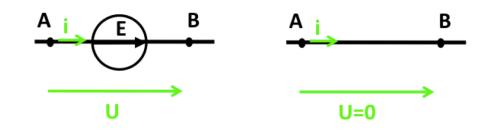


FIGURE 3.11 – Générateur idéal de tension éteint - court circuit

### 3.3.2 Générateur de courant

UN GÉNÉRATEUR DE COURANT IDÉAL est un dipôle actif qui délivre un courant d'intensité  $I_0$  quelle que soit la tension  $U$  à ses bornes.

$$\forall U \quad i = I_0 = \text{cst}$$

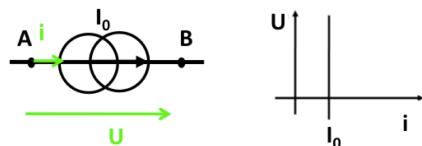


FIGURE 3.12 – Générateur idéal de courant, représentation et caractéristique

*N.B. :* Pour éteindre une source de courant, i.e. qu'elle ne fournisse plus d'énergie, il suffit de la remplacer par un interrupteur ouvert (le courant ne sait pas bien circuler dans l'air, sauf en cas d'orage).

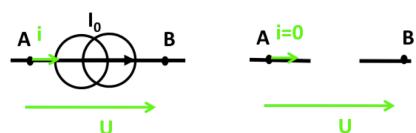


FIGURE 3.13 – Générateur idéal de courant éteint - circuit ouvert

### 3.3.3 Sources réelles de tension- générateur de Thévenin

On peut modéliser un GÉNÉRATEUR DE TENSION RÉEL par un générateur de tension idéal de fem  $E$  en série avec une résistance interne  $r_g$  (en Ohm) (cf. figure 3.14). On appelle ce modèle la *représentation de Thévenin*.

La tension  $AB$  aux bornes du générateur de Thevenin est :

$$U_{AB} = E - r_g \cdot i$$

où  $i$  est le courant délivré par le générateur.

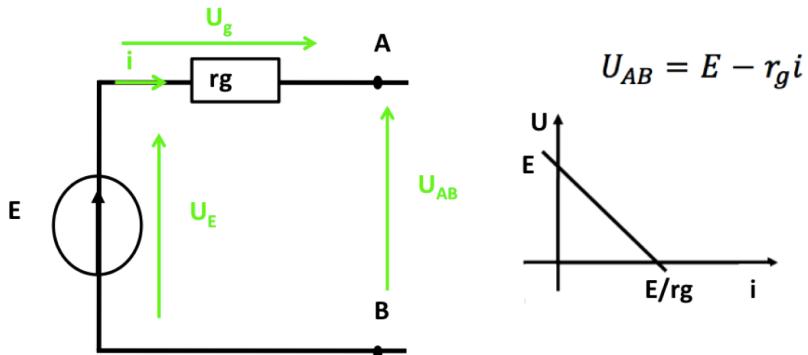


FIGURE 3.14 – Générateur réel de tension

**Démonstration :** La tension aux bornes de la résistance interne  $r_g$  est

$$U_g = -r_g \cdot i$$

La tension aux bornes du générateur idéal de tension est  $U_E = E$ . La tension aux bornes du générateur réel est donc :

$$U_{AB} = U_E + U_g = E - r_g \cdot i$$

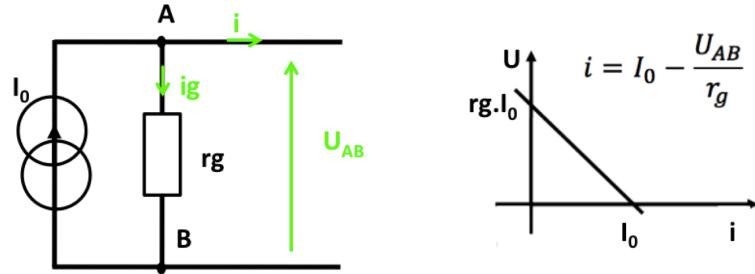


FIGURE 3.15 – Générateur réel de courant

### 3.3.4 Sources réelles de courant- générateur de Norton

On peut modéliser un GÉNÉRATEUR DE COURANT RÉEL(cf. figure 3.15) par un générateur de courant idéal associé en parallèle avec une résistance interne  $r_g$  (en Ohm). On appelle ce modèle la *représentation de Norton*.

L'intensité du courant délivré par le générateur de Norton est :

$$i = I_0 - \frac{U_{AB}}{r_g}$$

où  $U_{AB}$  est la tension aux bornes du générateur.

**Démonstration :** La loi des noeuds en  $A$  s'écrit

$$I_0 = i + i_g$$

La loi d'Ohm aux bornes de  $r_g$  vaut :

$$U_{AB} = r_g \cdot i_g,$$

donc

$$i_g = \frac{U_{AB}}{r_g}$$

L'intensité du courant  $i$  vaut donc

$$i = I_0 - i_g = I_0 - \frac{U_{AB}}{r_g}$$

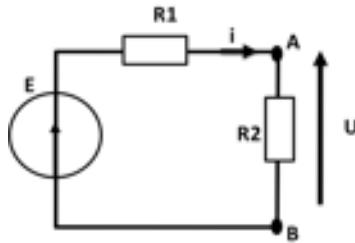


FIGURE 3.16 – Pont diviseur de tension

### 3.3.5 Pont diviseur de tension

LE PONT DIVISEUR DE TENSION (figure 3.16) découle de l'association en série de deux résistances. Il permet de calculer la tension aux bornes de chacune des résistances quand celles-ci sont associées en série dans une branche. Dans notre cas,  $U$  est la tension aux bornes de  $R_2$ ,  $E$  la tension délivrée par le générateur de tension.

$$U = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot E$$

**Démonstration :** On cherche à exprimer  $U$  en fonction des paramètres du circuit  $E$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Soit  $U_1$  la tension aux bornes de la résistance  $R_1$ , d'après la loi de maille, on peut écrire :

$$E - U_1 - U = 0 \text{ d'où } U_1 = E - U$$

Or d'après la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 \cdot i \text{ d'où } i = \frac{U_1}{R_1} \\ U &= R_2 \cdot i = \frac{R_2 \cdot U_1}{R_1} \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$U = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

**Cas particuliers :** Dans le cas où  $R_2 = 0$ ,  $U_{AB} = 0$ . On peut remplacer  $R_2$  par un fil, or nous avons vu que la tension aux bornes d'un fil est nulle.

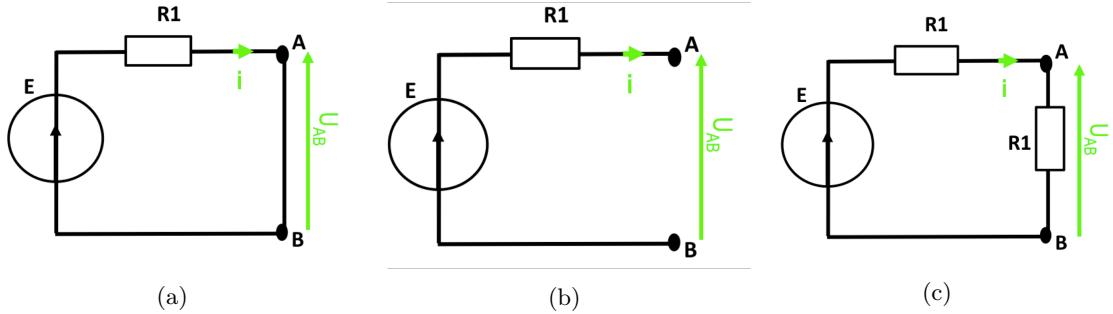


FIGURE 3.17 – Cas particuliers de ponts diviseur de tension,  $R_2 = 0$ ,  $R_2$  tend vers l'infini et  $R_2 = R_1$

Dans le cas où  $R_2$  tend vers l'infini,  $U_{AB} = E$ . On peut remplacer  $R_2$  par un interrupteur ouvert, or le courant ne peut pas circuler quand l'interrupteur est ouvert. Dans ce cas  $i = 0$  et donc  $U_{AB} = E$  car il ne peut pas y avoir de chute de potentiel aux bornes de  $R_1$ .

Dans le cas où  $R_1 = R_2$ , on aura  $U_{AB} = \frac{E}{2}$ .

IL FAUT SAVOIR reconnaître un pont diviseur de tension dans un circuit et pouvoir déterminer la tension aux bornes de chaque résistance. Pour cela, il suffit d'appliquer la relation du pont diviseur de tension. Cette relation est très utilisée.

### 3.3.6 Pont diviseur de courant

LE PONT DIVISEUR DE COURANT (figure 3.18) découle de l'association en parallèle de deux résistances. Il permet de calculer l'intensité du courant circulant dans chacune des résistances quand celles-ci sont associées en parallèle. Dans notre cas,  $U$  est la tension aux bornes de  $R_1$  et  $R_2$ ,  $I_0$  le courant délivré par le générateur de courant et  $I$  le courant circulant dans  $R_2$ .

$$I = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \cdot I_0$$

**Démonstration :** On cherche à exprimer  $I$  en fonction des paramètres du circuit  $I_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Loi des noeuds :

$$I_0 = I_1 + I \text{ d'où } I_1 = I_0 - I$$

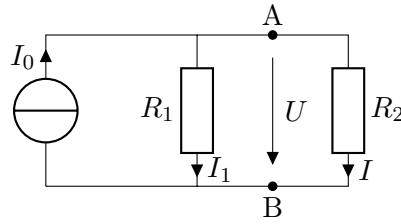


FIGURE 3.18 – Pont Diviseur de courant

Loi d'Ohm :

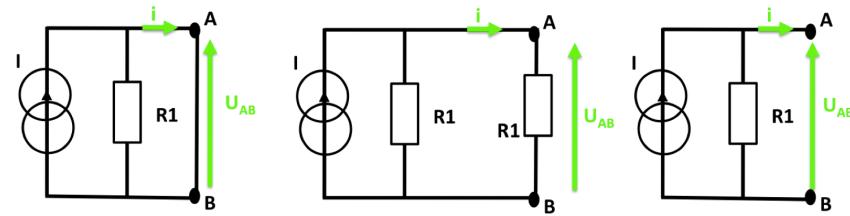
$$U = R_1 I_1 = R_1 (I_0 - I) \text{ et } U = R_2 I$$

donc

$$R_1 (I_0 - I) = R_2 I$$

On en conclut que :

$$I = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

FIGURE 3.19 – Cas particuliers de ponts diviseur de courant,  $R_2 = 0$ ,  $R_2$  tend vers l'infini et  $R_2 = R_1$ 

**Cas particuliers :** Dans le cas où  $R_2 = 0$ ,  $I = I_0$ . On peut remplacer  $R_2$  par un fil, qui va court circuiter la résistance  $R_1$ . Le courant généré par le générateur de courant a le choix entre circuler dans  $R_1$  ou dans le fil, chemin beaucoup plus simple... il ne résiste pas.

Dans le cas où  $R_2$  tend vers l'infini,  $I = 0$ . On peut remplacer  $R_2$  par un interrupteur ouvert, or le courant ne peut pas circuler quand l'interrupteur est ouvert.

Dans le cas où  $R_1 = R_2$ , on aura  $I = \frac{I_0}{2}$ . La moitié du courant circule dans  $R_1$  et l'autre moitié dans  $R_2$ .

### 3.3.7 Association de générateurs

Il est parfois très utile de pouvoir simplifier un circuit électrique, et pour cela d'associer des générateurs (avec plusieurs générateurs n'en faire plus qu'un, ou encore modéliser un ensemble

de générateurs par un seul).

Les *générateurs de tension* s'associent lorsqu'ils sont placés en série, et les *générateurs de courant* lorsqu'ils sont placés en parallèle.

LE GÉNÉRATEUR DE THEVENIN EN SÉRIE : l'association de  $N$  générateurs de Thevenin de fem  $E_k$  et de résistance internes  $r_k$  est équivalente à *un seul* générateur de Thevenin de fem  $E_{eq}$  égale à la somme de toutes les fem  $E_k$  et de résistance interne  $r_{eq}$  égale à la somme de toutes les résistances internes  $r_k$ .

$$E_{eq} = \sum_1^N E_k$$

$$r_{eq} = \sum_1^N r_k$$

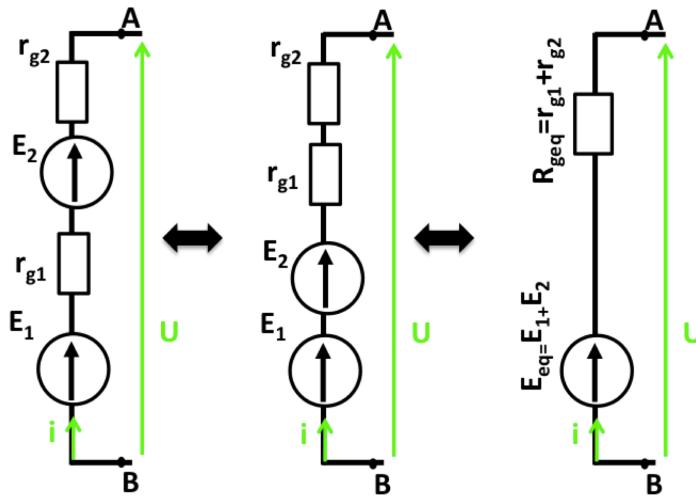


FIGURE 3.20 – Association de deux générateurs de Thevenin en série

**Exemple 1 :** On veut déterminer l'intensité du courant  $i$  dans le schéma électrique suivant (figure 3.21)) :

On cherche d'abord la résistance équivalente à  $R_3$  et  $R_4$  (en rouge sur la figure 3.21). Les deux résistances sont en série. La résistance équivalente est :

$$R_{eq} = R_3 + R_4$$

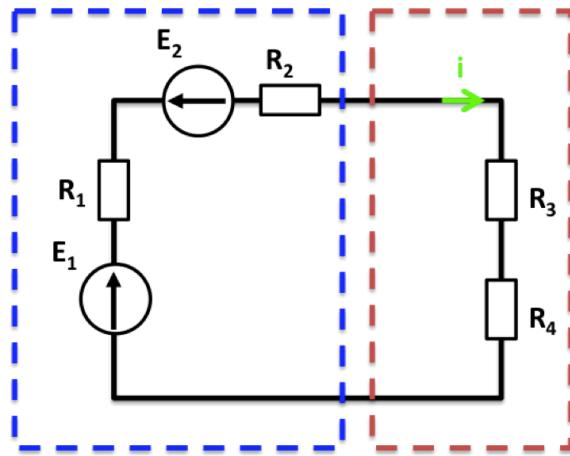


FIGURE 3.21 – Exemple 1

Le générateur de Thévenin ( $E_T, r_T$ ) équivalent aux générateurs ( $E_1, R_1$ ) et ( $E_2, R_2$ ) en série est (figure 3.21, en bleu) :

$$\begin{aligned} E_T &= E_1 - E_2 \\ r_T &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Le circuit peut être représenté de la manière suivante :

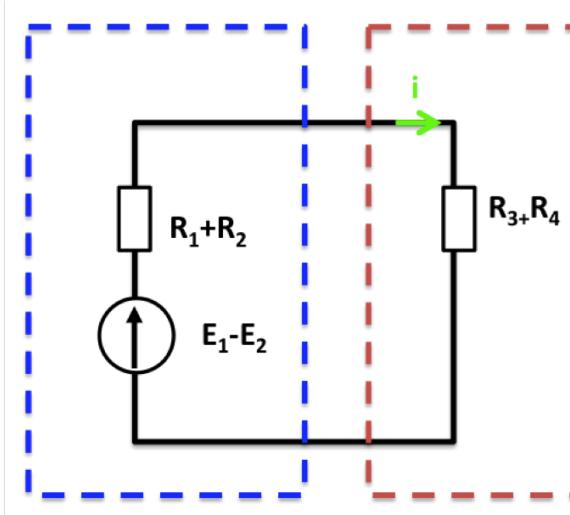


FIGURE 3.22 – Exemple 1 - circuit simplifié

On peut écrire la loi des mailles :

$$E_1 - E_2 - (R_1 + R_2).i_1 - R_{eq}.i_1 = 0$$

d'où<sup>5</sup> :

$$i_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_{eq}}$$

**Exemple 2 :** On veut déterminer l'intensité du courant  $i_1$  dans le schéma électrique suivant :

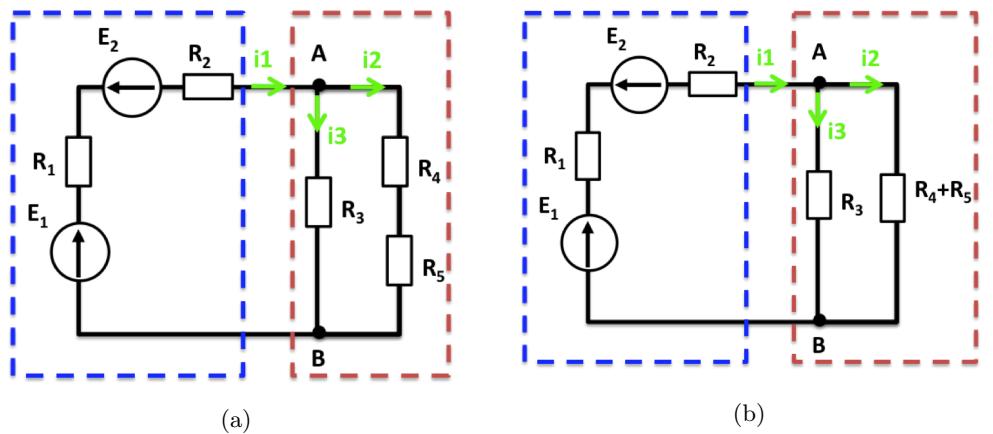


FIGURE 3.23 – Exemple 2

On cherche d'abord la résistance équivalente à  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R_5$  (encadrées en rouge figure 3.23(a)). Attention, les résistances  $R_3$ ,  $R_5$  ne sont pas en parallèle.

Les résistances  $R_4$  et  $R_5$  sont en série, donc la résistance équivalente  $R_{eq1}$  est (cf. figure 3.23(b)) :

$$R_{eq1} = R_4 + R_5$$

Les résistances  $R_3$  et  $R_{eq1}$  sont en parallèle, donc la résistance équivalente  $R_{eq}$  est<sup>6</sup> :

$$R_{eq} = \frac{R_{eq1} \cdot R_3}{R_{eq1} + R_3} = \frac{(R_4 + R_5) \cdot R_3}{R_4 + R_5 + R_3}$$

Le générateur de Thévenin ( $E_T, r_T$ ) équivalent aux générateurs  $(E_1, R_1)$  et  $(E_2, R_2)$  en série est :

$$\begin{aligned} E_T &= E_1 - E_2 \\ r_T &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Le circuit peut être représenté de la manière suivante (cf. figure 3.24) :

5. On notera l'homogénéité de cette équation finale  $[A] = \frac{[V]}{[\Omega]}$ .

6. On notera l'homogénéité de l'équation  $[\Omega] = \frac{[\Omega]^2}{[\Omega]} = [\Omega]$ .

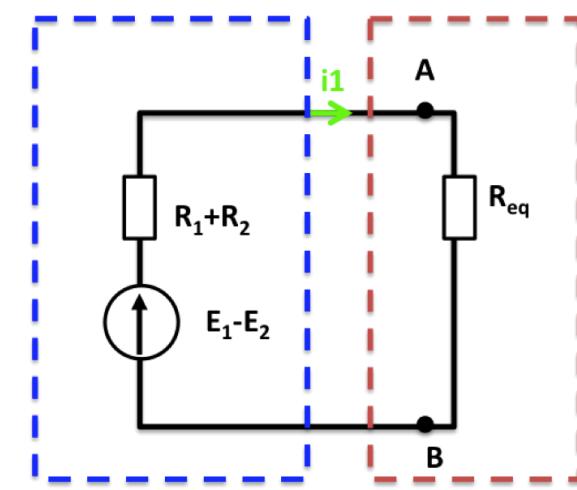


FIGURE 3.24 – Exemple 2- circuit simplifié

Le circuit se réduit à une seule maille. On peut écrire la loi des mailles<sup>7</sup> :

$$E_1 - E_2 - (R_1 + R_2).i_1 - R_{eq}.i = 0$$

d'où

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_{eq}}$$

Il est parfois très utile de simplifier un circuit afin de réduire le nombre de mailles du montage et d'en comprendre plus facilement le fonctionnement en lui appliquant les lois de Kirchoff. Attention, ne perdez pas l'information lors de cette simplification. Par exemple dans l'exemple ci-dessus,  $i_2$  et  $i_3$  disparaissent du circuit, ou encore les valeurs des tensions aux bornes de  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R_5$ . Nous pouvons seulement accéder au courant circulant dans la résistance équivalente et la tension à ses bornes.

7. On notera l'homogénéité de l'équation  $[A] = \frac{[V]}{[\Omega]}$ .

LE GÉNÉRATEUR DE NORTON EN PARALLÈLE : l'association de  $N$  générateurs de Norton délivrant un courant d'intensité  $I_k$  et de résistance internes  $r_k$  est équivalent à *un seul* générateur de Norton délivrant un courant d'intensité  $I_{eq}$  égale à la somme des intensités  $I_k$  et de conductance interne (inverse de la résistance)  $\frac{1}{r_{eq}}$  égale à la somme de toutes les conductances internes  $\frac{1}{r_k}$  (cf. figure 3.25).

$$I_{eq} = \sum_1^N I_k$$

$$\frac{1}{r_{eq}} = \sum_1^N \frac{1}{r_k}$$

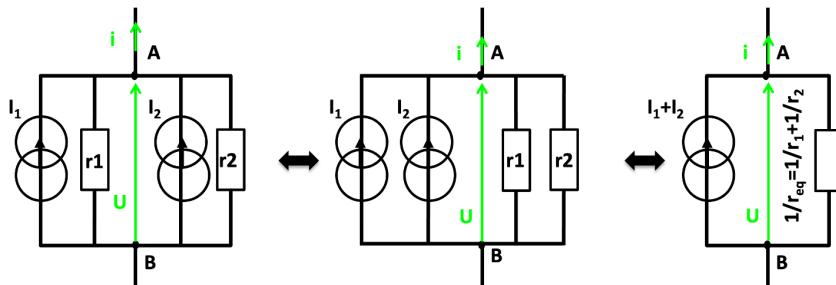


FIGURE 3.25 – Association de deux générateurs de Norton en parallèle

### 3.3.8 Equivalence de source

Quel que soit le générateur réel, il peut être vu comme un générateur de courant réel  $OU$  comme un générateur de tension réel. Les représentations de Thévenin et de Norton sont équivalentes, elles sont des modèles de générateurs réels, et l'on peut passer de l'une des représentations à l'autre à condition que :

- les résistances internes  $R_k$  des deux représentations soient égales,
- la fem du générateur de Thévenin  $E_T$  et l'intensité du courant du générateur de Norton  $I_N$  soient reliées par l'équation :

$$E_T = R_k \cdot I_N$$

Dans les cas représentés (figure 3.26),  $U_{AB}$  et  $i$  sont identiques dans les deux circuits. Finalement peut importe quelle représentation est choisie, en sortie nous avons les mêmes caractéristiques  $U_{AB}$  et  $i$ . Nous choisirons donc la représentation qui simplifie au mieux le circuit.

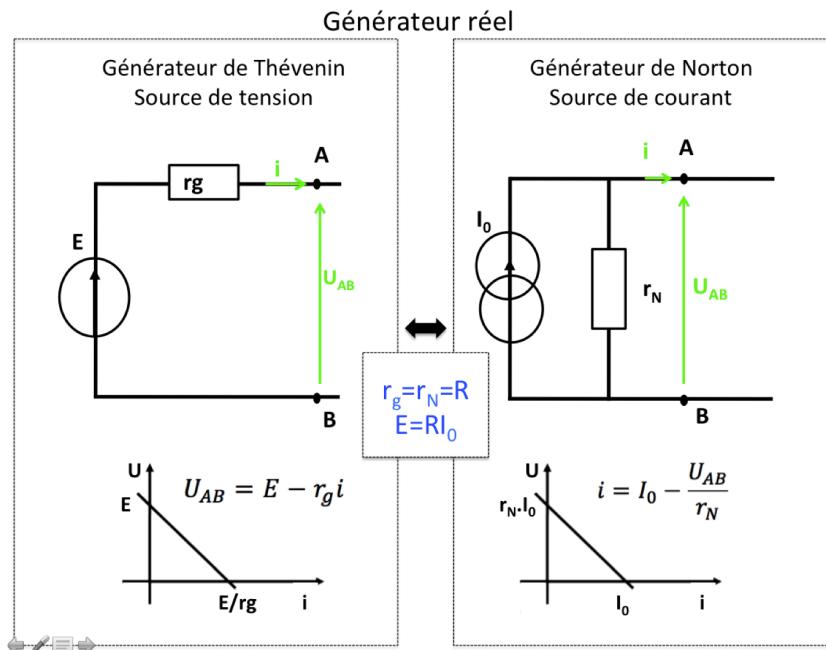


FIGURE 3.26 – Modélisation d'un générateur réel

**Exemple :** Dans l'exemple suivant (figure 3.27(a)), nous montrons comment utiliser les équivalences de sources pour simplifier un circuit. Le but ici est de connaître la valeur du courant  $i$  qui traverse la résistance  $R_4$ .

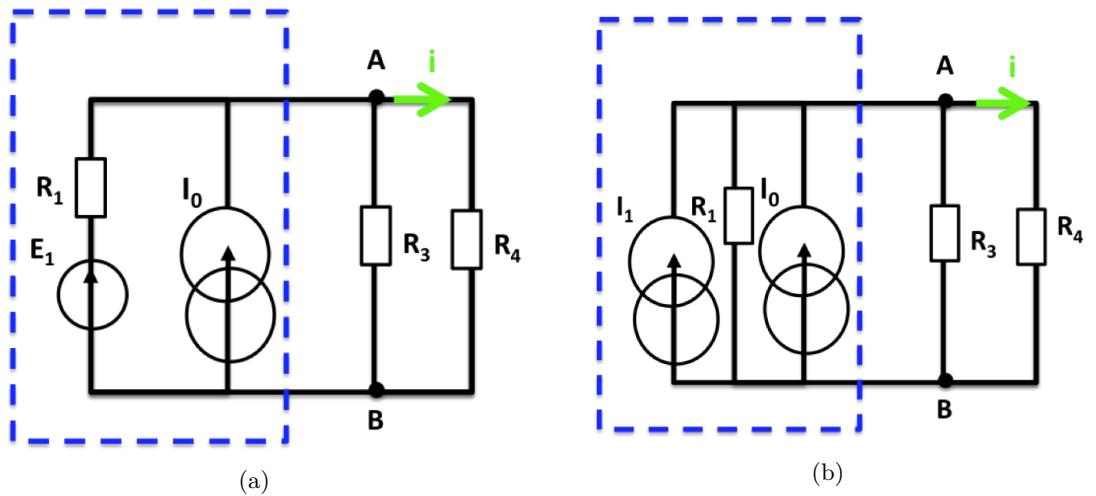


FIGURE 3.27 – (a) Exemple de circuit à étudier, (b) équivalence de source (Thevenin - Norton)

Le générateur de Thévenin (ou de tension)  $E$  en série avec  $R_1$  est remplacé par son générateur de Norton équivalent délivrant un courant  $I_1$  en parallèle avec  $R_1$  (cf. figure 3.27(b)). Mais pour cela on s'assure que :

$$I_1 = \frac{E}{R_1}$$

Une fois les deux générateurs de courant  $I_1$  et  $I_0$  en parallèle (cf. figure 3.28(a)), nous appliquons les lois d'association de générateur en les remplaçant par le générateur de courant équivalent, délivrant un courant d'intensité  $I_1 + I_0$ .

Ensuite  $R_1$  et  $R_3$  sont en parallèles et sont donc remplacées par la résistance équivalente  $R_{eq}$  (cf. figure 3.28(b))<sup>8</sup>.

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

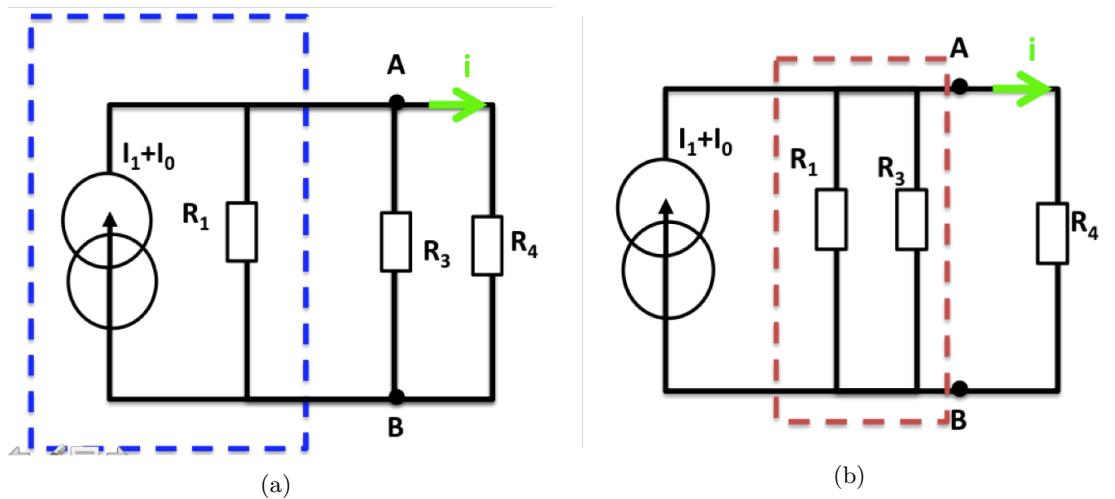


FIGURE 3.28 – (a) Exemple de circuit , (b) Exemple de circuit

Finalement nous reconnaissons un pont diviseur de courant (figure 3.29(a)), et pouvons donc définir  $i$  comme<sup>9</sup> :

$$i = (I_0 + I_1) \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_4}$$

Qu'on peut également écrire<sup>10</sup> :

$$i = \frac{(I_0 + \frac{E}{R_1}) \cdot R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_3}$$

Il est également possible de représenter ce circuit sous sa forme de générateur de Thevenin équivalent (figure 3.29(b)). Pour cela il faudra prendre soin à conserver la même valeur de résistance  $R_{eq}$  qui sera mise en série avec un générateur équivalent délivrant une tension de valeur<sup>11</sup> :

$$E_{eq} = (I_1 + I_0) \cdot R_{eq}$$

8. On notera l'homogénéité de l'équation  $[\Omega] = \frac{[\Omega]^2}{[\Omega]} = [\Omega]$ .

9. On notera l'homogénéité de l'équation  $[A] = [A] \frac{[\Omega]}{[\Omega]}$ .

10. On notera l'homogénéité de l'équation  $[A] = \frac{([A] + \frac{V}{[\Omega]}) \cdot [\Omega]^2}{[\Omega]^2}$ .

11. On notera l'homogénéité de l'équation  $[V] = [A] \cdot [\Omega]$

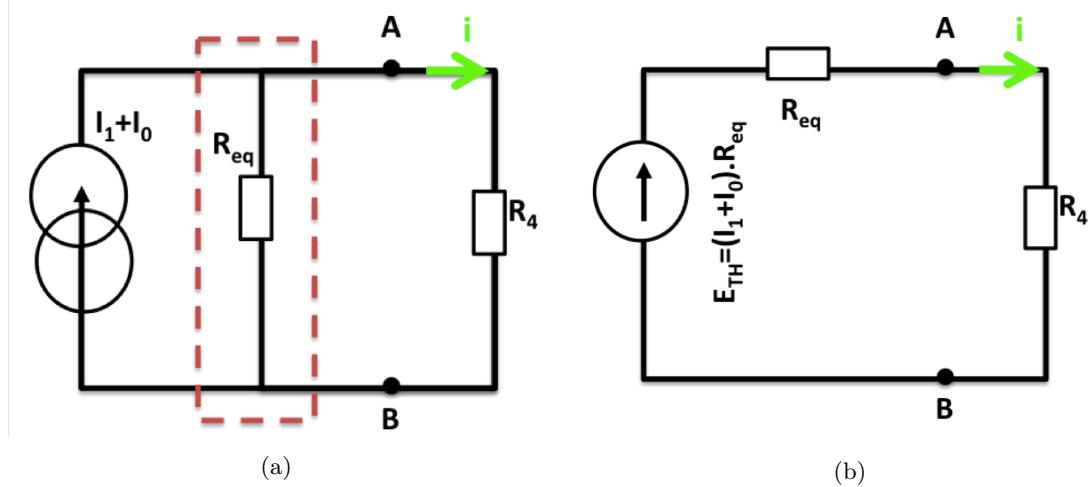


FIGURE 3.29 – (a) Exemple de circuit , (b) Exemple de circuit

### 3.4 Théorèmes généraux

### 3.4.1 Théorème de superposition

Dans un circuit linéaire à plusieurs générateurs, continus ou variables, le courant électrique, dans chaque branche ou impédance, est égal à la somme des courants  $I$  que produiraient seul, chacun des générateurs, les autres étant éteints (les sources de tension sont remplacées par un court-circuit et les sources de courant par un circuit ouvert).

### 3.4.2 Théorème de Thevenin

Soit un circuit composé de plusieurs sources de tension ou de courant et de plusieurs résistances possédant deux bornes  $A$  et  $B$  entre lesquelles est raccordée une charge  $R_c$  :

- La tension de Thévenin  $E_{th}$  est la tension calculée ou mesurée, entre les bornes  $A$  et  $B$  lorsque la charge  $R_c$  est déconnectée (tension à vide, le courant ne peut pas circuler entre  $A$  et  $B$ ).
  - La résistance de Thévenin  $R_{th}$  est la résistance calculée, ou mesurée, entre les bornes  $A$  et  $B$  lorsque la charge  $R_c$  est déconnectée et que les sources sont éteintes : les sources de tension indépendantes sont remplacées par un court-circuit et les sources de courant indépendantes par un circuit ouvert.

*N.B. :* Ce théorème est une propriété électronique qui se déduit principalement des propriétés de linéarité et du principe de superposition qui en découle. Il s'utilise pour convertir une partie

d'un réseau complexe en un dipôle plus simple. Un réseau électrique linéaire vu de deux points est équivalent à un générateur de tension parfait dont la force électromotrice est égale à la différence de potentiels à vide entre ces deux points, en série avec une résistance égale à celle que l'on mesure entre les deux points lorsque les générateurs indépendants sont rendus passifs.

*N.B. 2 :* Remarque très importante, l'équivalent de Thévenin n'est utilisable que « vu de l'extérieur » entre les bornes  $A$  et  $B$ , *i.e.* pour déterminer le fonctionnement du système à l'extérieur du dipôle. En aucun cas il ne peut être utilisé pour tirer des conclusions à l'intérieur du dipôle.

### 3.4.3 Théorème de Norton

Soit un circuit composé de plusieurs sources de tension ou de courant et de plusieurs résistances possédant deux bornes  $A$  et  $B$  entre lesquelles est raccordée une charge  $R_c$  :

- Le courant de Norton  $I_N$  est le courant de court-circuit, calculé ou mesuré, entre les bornes  $A$  et  $B$  lorsque la charge  $R_c$  est court-circuitée.
- La résistance de Norton  $R_N$  est la résistance calculée, ou mesurée, entre les bornes  $A$  et  $B$  lorsque la charge  $R_c$  est déconnectée et que les sources sont éteintes : les sources de tension indépendantes sont remplacées par un court-circuit et les sources de courant indépendantes par un circuit ouvert.

### 3.4.4 Equivalence Thevenin Norton, équivalence de source ou de modèle

modèle de Thevenin	modèle de Norton
tension [V]	courant [A]
résistance $R$ [ $\Omega$ ]	conductance $G$ [ $\Omega^{-1}$ ]
charge électrique $Q = CU$	$\phi = Li$
maille	noeud
association série	association parallèle

### 3.4.5 Analyse d'un circuit

Cette section s'attache à vous donner plusieurs méthodes vous permettant d'analyser un circuit, en déterminant la valeur des intensités et les tensions dans chaque branche. Pour cela munissez-vous de crayons de couleur (des stylos feront tout aussi bien l'affaire) <sup>12</sup>.

12. Cette recette est un peu comme la recette du gâteau au yaourt, une recette simple, inratable, et plutôt efficace au final.

Nous cherchons à calculer le courant  $i$  qui circule dans  $R_4$  dans le circuit suivant (cf. figure 3.30) :

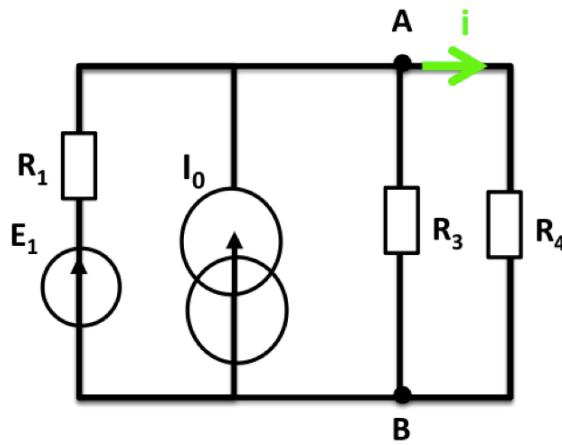


FIGURE 3.30 – Exemple de circuit

- (a) Pour commencer, le premier conseil est de ne pas perdre de vue ce que vous cherchez ! Notez le donc en haut de votre feuille, au dessus du circuit que vous allez reproduire sur une feuille de brouillon. Et pour être certain de finir l'exercice, identifiez les paramètres du circuit en fonction desquels la variable recherchée sera exprimée.
- (b) Recopier donc le schéma de la figure 3.30 sur votre feuille (de brouillon ou non)  $i$  sera une fonction de  $E_1, I_0, R_1, R_3$  et  $R_4$ , ou encore

$$i = f(E_1, I_0, R_1, R_3, R_4)$$

S'il reste une autre variable dans l'expression de  $i$ , c'est que vous n'avez pas terminé l'exercice.

- (c) Repérer d'une lettre chaque noeud du circuit. Les noeuds  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont repérés (cf. figure 3.31).
- (d) Choisir un sens arbitraire du courant dans chaque branche, et le dessiner dans chacune des branches. Les courants sont représentés en vert (cf. figure 3.31).
- (e) Ecrire la loi des noeuds pour chaque noeud:
  - loi des noeuds en  $C$ :  $i_1 + I_0 = i + i_3$
  - loi des noeuds en  $A$ :  $i_1 + I_0 = i + i_3$

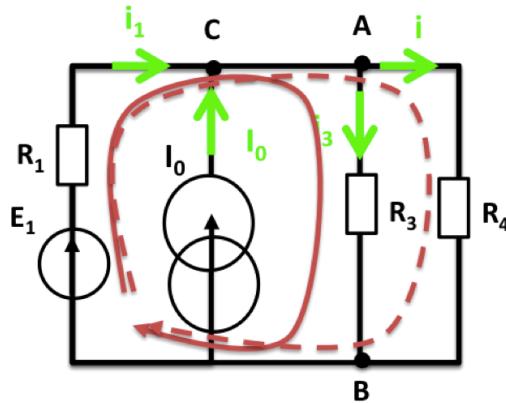


FIGURE 3.31 – Exemple de circuit

Ces deux équations ne sont clairement pas indépendantes. Cela permet de prendre conscience que les noeuds  $C$  et  $A$  sont équivalents.

- (f) dessiner pour chaque dipôle la tension en faisant attention à bien suivre les conventions discuter précédemment. Les tensions sont représentées aux bornes de chaque dipôle en bleu (cf. figure 3.32).

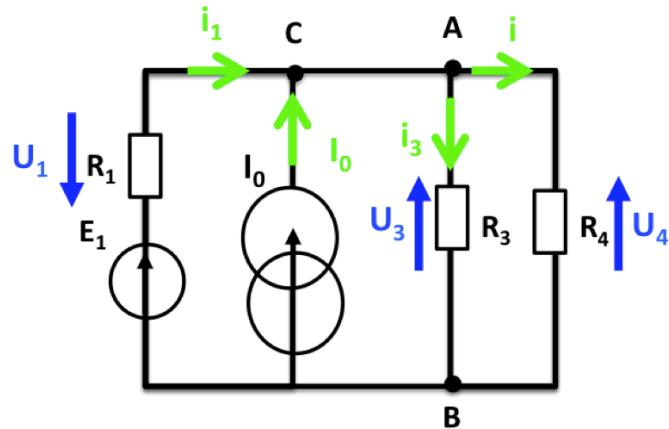


FIGURE 3.32 – Exemple de circuit

- (g) Ecrire les lois des mailles pour chaque maille. Les mailles sont repérées en rouge (cf. figure 3.31).

Loi des mailles dans la maille "rouge - trait plein"

$$E_1 - U_1 - U_3 = 0$$

Loi des mailles dans la maille "rouge - pointillé"

$$E_1 - U_1 - U_4 = 0$$

et

$$U_3 = U_4 = U_{AB}$$

(h) Ecrire les lois d'Ohm.

$$U_1 = R_1 \cdot i_1$$

$$U_3 = R_3 \cdot i_3$$

$$U_4 = R_4 \cdot i$$

(i) Au final vous allez vous rendre compte qu'il y a beaucoup d'équations. Ne conservez que celles qui sont indépendantes. Vous devez avoir autant d'équations que d'inconnues, ou que de mailles. Vérifier bien que tous les dipôles apparaissent au moins une fois dans les équations que vous avez gardées. Normalement vous avez N équations avec N inconnues au moins (si le problème est bien posé).

$$U_3 = U_4 = R_3 \cdot i_3 = R_4 \cdot i$$

d'où

$$i = i_3 \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

(j) Repérer les éléments connus du circuit (résistances, générateurs) et les éléments inconnus. Si vous avez des difficultés, écrire en rouge les inconnues recherchées, en vert les éléments connus et laisser en noir les éléments inconnus que vous ne cherchez pas. Ici rappelons nous que  $i_3$  est un élément non connu dans le circuit et qui ne nous intéresse pas spécialement. Les éléments connus sont  $E_1$ ,  $I_0$  et l'ensemble des résistances  $R_1$ ,  $R_3$  et  $R_4$ , qui elles sont connues.

Repronons...

D'après la loi des noeuds :

$$i_3 = i_1 + I_0 - i$$

- (k) Résoudre les équations linéaires. Il ne reste à ce niveau là qu'à exprimer  $i_1$  en fonction des paramètres du circuit. En reprenant la deuxième loi des mailles :

$$\begin{aligned} U_1 &= E_1 - U_4 \\ R_1 \cdot i_1 &= E_1 - R_4 \cdot i \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1 - R_4 \cdot i}{R_1} \\ \text{et} \\ i_3 &= \frac{E_1 - R_4 \cdot i}{R_1} + I_0 - i = I_0 + \frac{E_1}{R_1} - i \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R_1}\right) \end{aligned}$$

pour finir

$$i = i_3 \cdot \frac{R_3}{R_4} = \left(I_0 + \frac{E_1}{R_1} - i \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R_1}\right)\right) \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

il ne reste plus qu'à extraire  $i$  de l'équation et de l'exprimer en fonction de  $E_1$ ,  $I_0$ ,  $R_1$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .

$$i = \frac{\left(I_0 + \frac{E_1}{R_1}\right) \cdot \frac{R_3}{R_4}}{1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_1}}$$

Et si on simplifie<sup>13</sup> :

$$i = \frac{\left(I_0 + \frac{E_1}{R_1}\right) \cdot R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_3}$$

Et si vous êtes un minimum CURIEUX, OU OBSERVATEUR, vous aurez repéré que ce circuit (cf. figure 3.30) et le circuit étudié dans le paragraphe précédent (cf. figure 3.21) sont identiques. Le courant qui circule dans  $i$  est bien identique ! Vous avez à votre disposition plusieurs approches vous permettant de répondre à la question de l'intensité du courant  $i$  qui circule dans la résistance  $R_4$ .

---

13. On notera l'homogénéité de l'équation  $[A] = \frac{([A] + \frac{V}{[\Omega]}) \cdot [\Omega]^2}{[\Omega]^2}$ .



# Chapitre 4

## À retenir

### 4.1 Définitions et Principes Généraux

Une charge élémentaire  $dq$  qui traverse une section  $S$  d'un conducteur pendant un intervalle de temps  $dt$  crée un courant électrique d'intensité  $i$ , exprimé en Ampère (A) telle que :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

On appelle *tension électrique* la différence de potentiel entre deux points A et B d'une portion d'un circuit électrique. Elle s'exprime comme le potentiel électrique, en Volts.

Le *dipôle électrique* est un composant électrique possédant deux bornes. Par exemple, les lampes, les interrupteurs, les générateurs, les piles, les diodes, les DEL, les résistances et les moteurs sont des dipôles. On distingue en général deux sortes de dipôles :

- Les *générateurs* qui peuvent produire du courant électrique - *dipôles actifs*.
- Les *récepteurs* qui reçoivent le courant électrique - *dipôles passifs*.

## 4.2 Lois de la physique - conservation de la charge - lois de Kirchoff

LA CONVENTION GÉNÉRATEUR est telle que les flèches courant et tension sont dans le *même sens* aux bornes du générateur (cf. figure 4.1(a)).

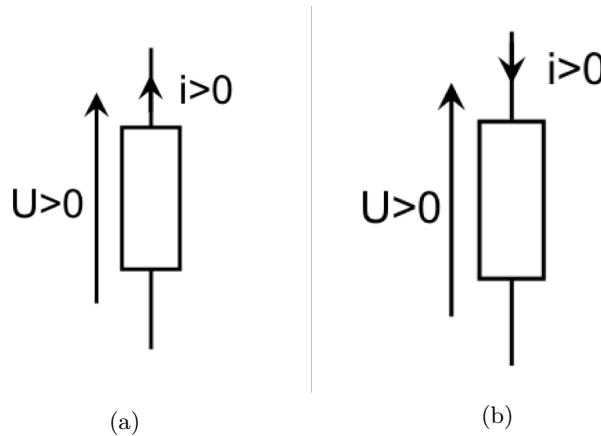


FIGURE 4.1 – a. la convention générateur appliquée à ses bornes. Dans ce cas on considère que les flèches indiquent le sens positif, b.a convention récepteur appliquée à ses bornes. Dans ce cas on considère que le courant et la tension sont positifs

LA CONVENTION RÉCEPTEUR est telle que les flèches courant et tension sont *en sens inverses* (cf. figure 4.1(b)).

LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE caractérise l'énergie électrique échangée par unité de temps. La *puissance électrique*  $P$ , en Watt, consommée ou dissipée s'exprime telle que :

$$P = UI$$

Un générateur fournit naturellement de l'énergie. Donc la Puissance qu'il délivre est positive. Il faut donc que  $U$  et  $I$  soient orientés dans le même sens.

Un récepteur quant à lui consomme de l'énergie. Donc la puissance qu'il délivre sera négative. Il faut donc que  $U$  et  $I$  soient orientés dans des sens opposée.

#### 4.2.1 Loi des noeuds - conservation de la charge

LA LOI DES NOEUDS s'exprime de la façon suivante : la somme des intensités des courants qui arrivent à un noeud est égale à la somme des intensités qui partent de ce noeud, ou encore, la somme algébrique des intensités des courants en un noeud est nulle :

$$\sum_1^N i_k \epsilon_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = \pm 1$$

#### 4.2.2 Loi des mailles - conservation de l'énergie

LA LOI DES MAILLES s'exprime de la façon suivante : la somme des tensions prises dans un même sens le long d'une maille orientée est égale à la somme des tensions prises dans l'autre sens de cette même maille, ce qui peut également se dire : la somme algébrique des tensions dans une maille est nulle :

$$\sum_1^N U_k \epsilon_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = \pm 1$$

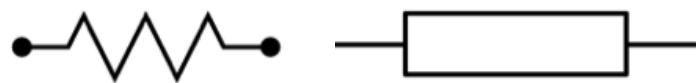


FIGURE 4.2 – schéma représentatif de la résistance

## 4.3 Dipôles élémentaires

### 4.3.1 Les dipôles passifs

LA RÉSISTANCE  $R$ , exprimée en Ohms ( $\Omega$ ), d'un fil conducteur cylindrique, de section  $S$  ( $[L]^2$ ) et de longueur  $l$  ( $[L]$ ) s'exprime comme :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}$$

Où  $\rho$  est la résistivité, en  $\Omega \cdot m$  .

### 4.3.2 La loi d'Ohm - adaptation des potentiels

LA LOI D'OHM est une relation algébrique, qui relie la tension  $U$ , aux bornes d'un dipôle de résistance,  $R$ , et l'intensité du courant  $I$ , qui la traverse :

$$U = R \cdot I$$

### 4.3.3 Association de résistances

L'ASSOCIATION EN SÉRIE de  $N$  résistances ( $R_1, R_2, \dots, R_N$ ) est équivalente à une résistance  $R_{tot}$  égale à la somme des résistances.

$$R_{tot} = \sum_1^N R_k$$

L'ASSOCIATION EN PARALLÈLE de  $N$  résistances ( $R_1, R_2, \dots, R_N$ ) est équivalente à une résistance  $R_{tot}$  égale à ....

$$\frac{1}{R_{tot}} = \sum_1^N \frac{1}{R_k}$$

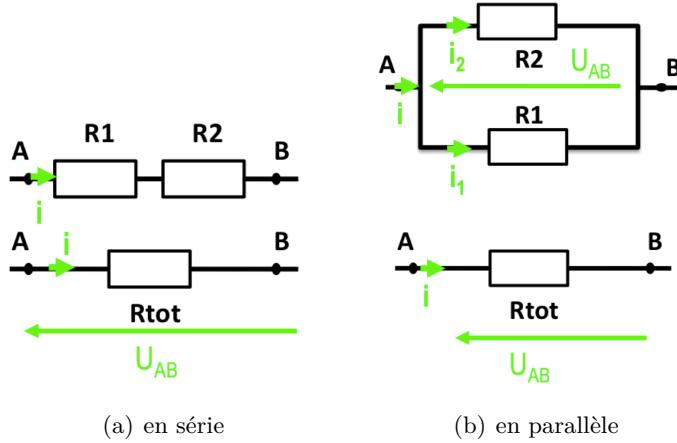


FIGURE 4.3 – Association de résistances

#### 4.3.4 Les dipôles actifs - sources réelles de tension - générateur de Thévenin

On peut modéliser un GÉNÉRATEUR DE TENSION RÉEL par un générateur de tension idéal de fem  $E$  en série avec une résistance interne  $r_g$  (en Ohm) (cf. figure 4.4). On appelle ce modèle la *représentation de Thévenin*.

La tension AB aux bornes du générateur de Thevenin est :

$$U_{AB} = E - r_g \cdot i$$

où  $i$  est le courant délivré par le générateur.

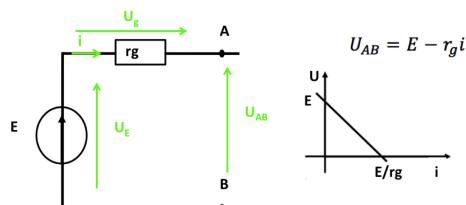


FIGURE 4.4 – Générateur réel de tension

### 4.3.5 Les dipôles actifs - sources réelles de courant - générateur de Norton

On peut modéliser un GÉNÉRATEUR DE COURANT RÉEL (cf. figure 4.5) par un générateur de courant idéal associé en parallèle avec une résistance interne  $r_g$  (en Ohm). On appelle ce modèle la *représentation de Norton*.

L'intensité du courant délivré par le générateur de Norton est :

$$i = I_0 - \frac{U_{AB}}{r_g}$$

où  $U_{AB}$  est la tension aux bornes du générateur.

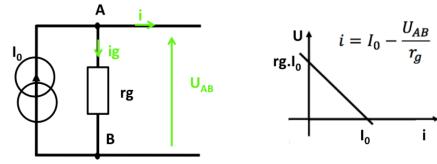


FIGURE 4.5 – générateur réel de courant

### 4.3.6 Pont diviseur de tension

LE PONT DIVISEUR DE TENSION (figure 4.6) découle de l'association en série de deux résistances. Il permet de calculer la tension aux bornes de chacune des résistances quand celles-ci sont associées en série dans une branche. Dans notre cas,  $U$  est la tension aux bornes de  $R_2$ ,  $E$  la tension délivrée par le générateur de tension.

$$U = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot E$$

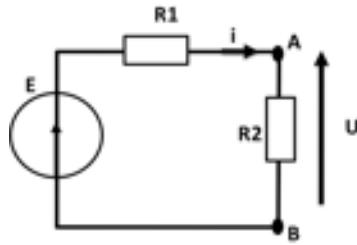


FIGURE 4.6 – Pont diviseur de tension

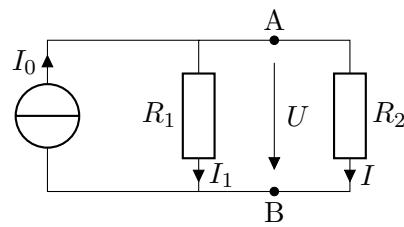


FIGURE 4.7 – Pont Diviseur de courant

#### 4.3.7 Pont diviseur de courant

LE PONT DIVISEUR DE COURANT (figure 4.7) découle de l'association en parallèle de deux résistances. Il permet de calculer l'intensité du courant circulant dans chacune des résistances quand celles-ci sont associées en parallèle. Dans notre cas,  $U$  est la tension aux bornes de  $R_1$  et  $R_2$ ,  $I_0$  le courant délivré par le générateur de courant et  $I$  le courant circulant dans  $R_2$ .

$$I = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \cdot I_0$$

### 4.3.8 Association de générateurs de tension

LE GÉNÉRATEUR DE THEVENIN EN SÉRIE : l'association de  $N$  générateurs de Thevenin de fem  $E_k$  et de résistance internes  $r_k$  est équivalent à *un seul* générateur de Thevenin de fem  $E_{eq}$  égale à la somme de toutes les fem  $E_k$  et de résistance interne  $r_{eq}$  égale à la somme de toutes les résistances internes  $r_k$ .

$$E_{eq} = \sum_1^N E_k$$

$$r_{eq} = \sum_1^N r_k$$

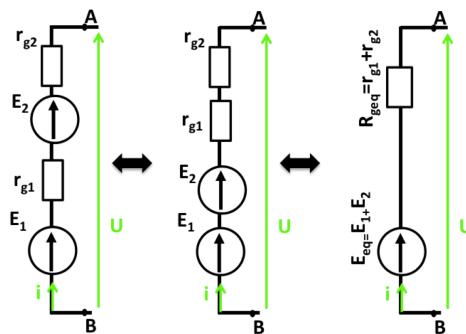


FIGURE 4.8 – association de deux générateurs de Thevenin en série

### 4.3.9 Association de générateurs de courant

LE GÉNÉRATEUR DE NORTON EN PARALLÈLE : l'association de  $N$  générateurs de Norton délivrant un courant d'intensité  $I_k$  et de résistance internes  $r_k$  est équivalent à *un seul* générateur de Norton délivrant un courant d'intensité  $I_{eq}$  égale à la somme des intensités  $I_k$  et de conductance interne (inverse de la résistance)  $\frac{1}{r_{eq}}$  égale à la somme de toutes les conductances internes  $\frac{1}{r_k}$  (cf. figure 4.9).

$$I_{eq} = \sum_1^N I_k$$

$$\frac{1}{r_{eq}} = \sum_1^N \frac{1}{r_k}$$

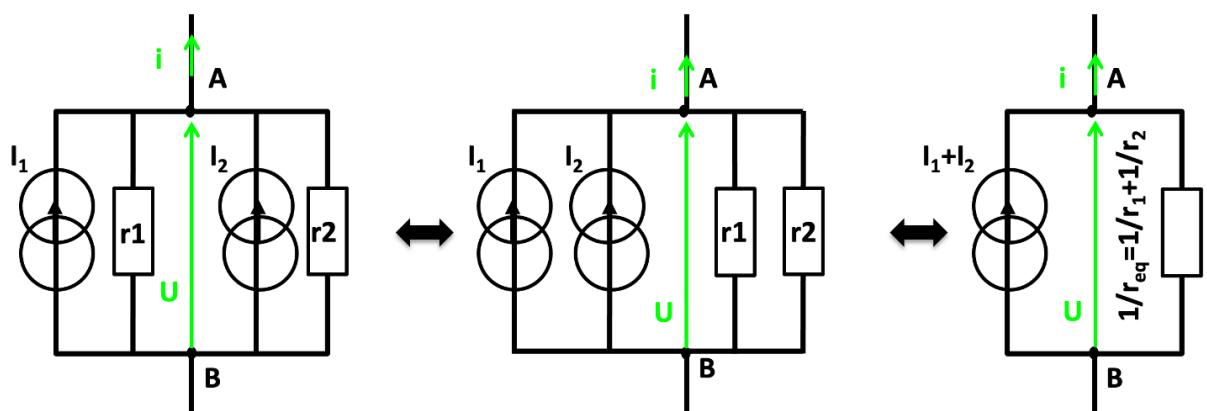


FIGURE 4.9 – association de deux générateurs de Norton en parallèle



## Chapitre 5

# Régime Continu - Exercices en cours

Cochez les propositions exactes :

### Exercice 1 : QCM - AAV1

La tension aux bornes d'un fil :

- Est nulle
- Est infinie
- Est inconnue

### Exercice 2 : Vrai ou Faux - AAV1

1. Le potentiel électrique est toujours positif.
2. La tension aux bornes d'un fil est toujours nulle.
3. Le potentiel électrique est toujours négatif.
4. Le potentiel électrique de la terre vaut 0V.
5. Le signe de la tension aux bornes d'un dipôle dépend du sens dans lequel on la mesure.
6. Le courant le long d'un fil vaut toujours 1A .

### Exercice 3 : Donner la définition de... - AAV1

- La tension
- Le courant

N'oubliez pas de préciser les unités

### Exercice 4 : Questions de révisions - AAV1

1. Qu'est ce qu'une maille dans un circuit électrique ?
2. Quel est le principe du courant continu ?
3. Que dit le principe de continuité du courant à propos de l'accumulation des charges en un point d'un circuit électrique ?

### Exercice 5 : Loi de Khirchof - loi des mailles - AAV1/2/3/4

On considère le circuit suivant (figure 5.1) :

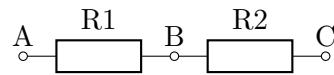


FIGURE 5.1 – Exercice 5

1. Flécher les tensions  $U_{BA}$ ,  $U_{BC}$  et  $U_{AC}$ .

2. On donne la liste de potentiels suivante :

$V_A$	$V_B$	$V_C$
-1 V	6 V	12 V

Donner la valeur des tensions  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  et  $U_{AC}$ .

3. Déterminer la relation qui lie ces trois tensions.

### Exercice 6 : Loi de Khirchof - loi des noeuds - AAV1/2/3/4

Quelle est l'intensité du courant  $I_4$  dans ce circuit (figure 5.2), dans les cas où  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $I_3$  valent les valeurs du tableau suivant ?

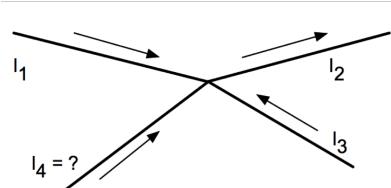
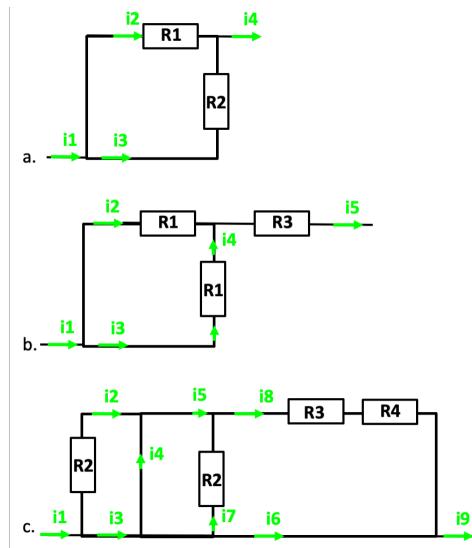


FIGURE 5.2 – Exercice 6

$I_1$	$I_2$	$I_3$
2 A	3 A	-5 A
-5 mA	1 A	2 A
3 A	1 mA	-10 A
100 A	1 A	-5 A
4 A	-6 A	7 A

### Exercice 7 : Loi des noeuds - AAV4

On considère les schémas suivants (figure 5.2). Mettre en évidence chacun des noeuds. Combien y en a t'il ?



- Pour le circuit (a), on donne les intensités de courant suivantes :  $i_1 = 3 \text{ A}$  et  $i_2 = 2 \text{ A}$ .
- Pour le circuit (b), on donne les intensités de courant suivantes :  $i_1 = 3 \text{ A}$ .
- Pour le circuit (c), on donne les intensités de courant suivantes :  $i_1 = 3 \text{ A}$ .

Déterminer toutes les intensités des circuits.

FIGURE 5.3 – Exercice 7

### Exercice 8 : courant et résistance - AAV2/3/4

Une batterie et 4 lampes identiques sont branchées de la façon suivante, cf. figure 5.4. Ranger le courant mesuré au 9 points (de a à h), du plus intense au plus faible.

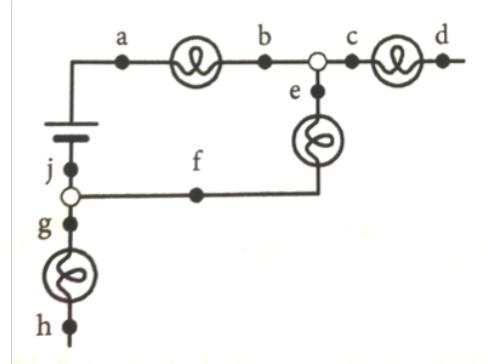
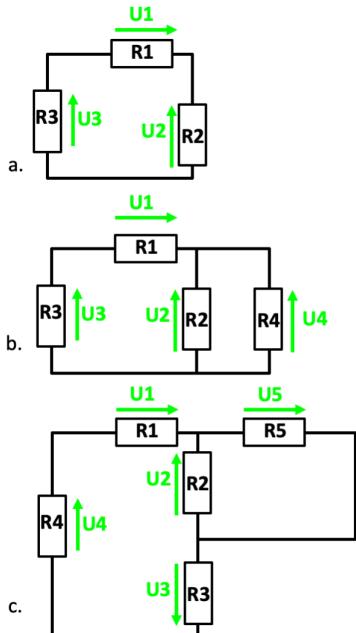


FIGURE 5.4 – Exercice 8

### Exercice 9 : Loi des mailles - AAV4



On considère le schéma suivant (figure 5.5). Mettre en évidence chacune des mailles. Combien y en a t'il ?

- Dans le cas (a), on donne les tensions suivantes :  $U_2 = -3 \text{ V}$  et  $U_3 = 4 \text{ V}$ .
- Dans le cas (b), on donne les tensions suivantes :  $U_2 = -3 \text{ V}$  et  $U_3 = 4 \text{ V}$ .
- Dans le cas (c), on donne les tensions suivantes :  $U_2 = -3 \text{ V}$ ,  $U_3 = 4 \text{ V}$  et  $U_4 = 6 \text{ V}$ .

Déterminer toutes les tensions du circuit.

FIGURE 5.5 – Exercice 9

### Exercice 10 : QCM2 - AAV2

Une source idéale de tension délivre :

- Une intensité fixe indépendante de la tension
- Une tension fixe indépendante du courant
- Une tension dépendante du courant

- 
- Un courant dépendant de la tension

### Exercice 11 : QCM3 AAV2

Une source idéale de courant délivre :

- Une intensité fixe indépendante de la tension
- Une tension fixe indépendante du courant
- Une tension dépendante du courant
- Un courant dépendant de la tension

### Exercice 12 : Résistance et loi d'Ohm AAV1

Deux câbles sont constitués du même matériaux. Si les deux sont à la même température, mais l'un a deux fois le diamètre et trois fois la longueur de l'autre, lequel des deux à la plus grande résistance et de quel facteur ?

### Exercice 13 : QCM AAV4

Je possède une résistance  $R_1$  et je souhaite y ajouter une résistance  $R_2$  afin d'obtenir une résistance totale supérieure à  $R_1$ . Je dois :

- Mettre  $R_2$  en série avec  $R_1$
- Mettre  $R_2$  en dérivation avec  $R_1$
- Tout dépend de la valeur de  $R_2$

### Exercice 14 : Résistance et loi d'Ohm AAV3/4

La figure suivante (figure 5.6) représente le courant au travers par une diode d'émission en fonction de la DDP à ses bornes. Quelle est la résistance de la diode pour une DDP de 3 V ?

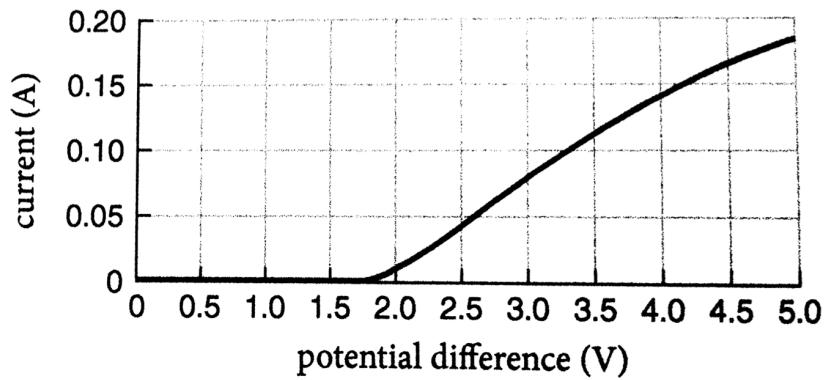
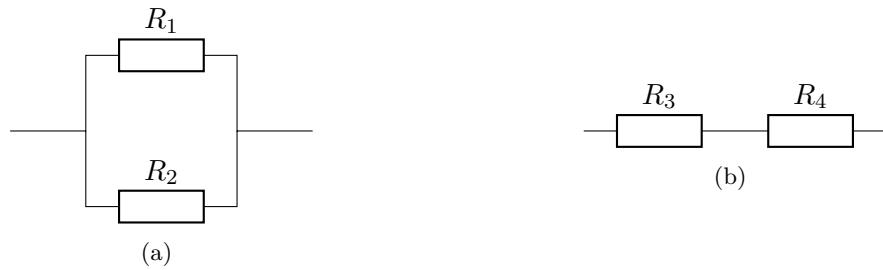


FIGURE 5.6 – Exercice 14

### Exercice 15 : Association de résistances - AAV4

Exprimez puis calculez la résistance équivalente dans les deux cas :

FIGURE 5.7 – (Exercice 15)  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$  et  $R_4 = 220 \Omega$ .

### Exercice 16 : Association de résistances - AAV4

La figure 5.8 représente trois circuits composés de 4 résistances identiques, chacune ayant une valeur  $R$ . Quel est le circuit dont la résistance équivalente est la plus grande ? la plus petite ?

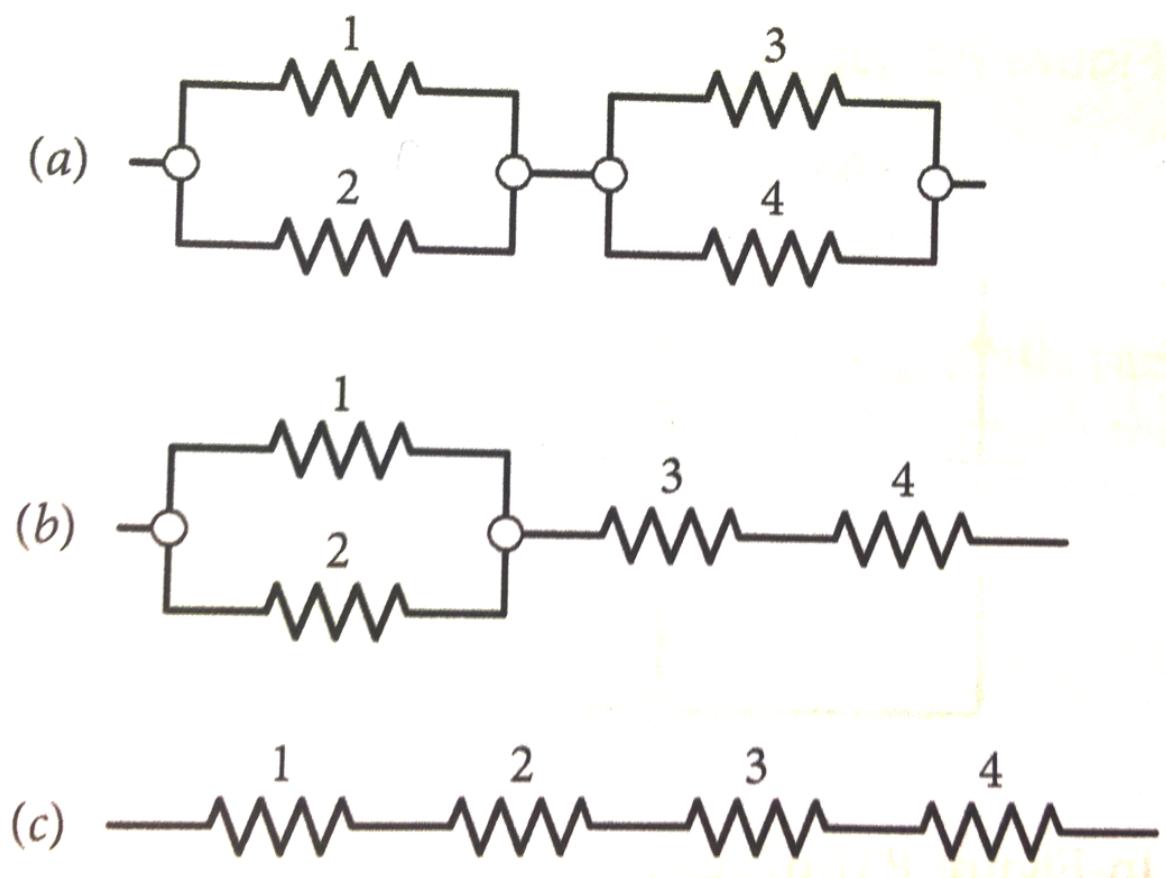


FIGURE 5.8 – Exercice 16

**Exercice 17 : Caractéristiques de sources - AAV4/5**

1. Dans les figures présentées figure 5.9, laquelle correspond à une source réelle de tension ?
2. Représenter sur le graphique la tension à vide et le courant de court-circuit.
3. Représenter le schéma d'une source réelle de tension. Quel est le lien entre la résistance interne, la tension à vide et le courant de court-circuit ?
4. Même question avec la source de courant.

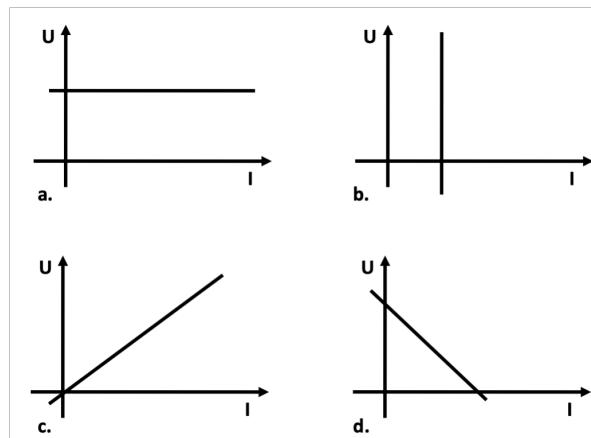


FIGURE 5.9 – Exercice 17

## Exercice 18 : Effet des instruments de mesures sur la mesure

On souhaite évaluer l'effet des instruments de mesures comme l'ampermètre et le voltmètre, sur la mesure. Pour cela on réalise les deux montages figure 5.10.

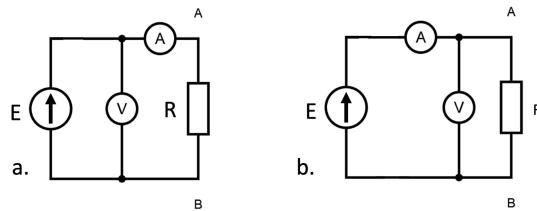


FIGURE 5.10 – Exercice 18

1. A votre avis, la tension  $U_{mes}$  par le voltmètre et le courant  $I_{mes}$  mesuré par l'ampèremètre seront ils identiques. Pour répondre à cette question on va étudier les deux circuits en remplaçant l'ampèremètre et le voltmètre par des résistances, respectivement  $r_A$  et  $r_v$ .
2. Dessiner les schémas équivalents.
3. Faire apparaître  $I_{mes}$  et  $U_{mes}$ ,  $I_v$  le courant circuitant dans le voltmètre,  $I_R$  celui circuitant dans la résistance,  $U_R$  la tension aux bornes de la résistance et  $U_A$  la tension aux bornes de l'ampèremètre.
4. Donner les expressions analytiques de  $I_{mes}$ ,  $U_{mes}$ ,  $I_v$ ,  $I_R$ ,  $U_R$  et  $U_A$  en fonction de  $E$ ,  $r_A$ ,  $r_v$  et  $R$ .
5. Calculer les dans le cas où  $r_A = 1 \text{ m}\Omega$ ,  $r_v = 1 \text{ M}\Omega$ , dans le cas où  $R = 10 \Omega$  et celui où  $R = 100 \text{ k}\Omega$ .
6. Conclure sur votre première hypothèse.

## Exercice 19 : Caractéristique UI et point de fonctionnement - AAV4

Dans la figure 5.11 :

1. Fléchez les tensions aux bornes des résistances et représenter le sens du courant  $I$ , en utilisant les conventions adaptées (générateur ou récepteur).
2. Donnez l'expression et la valeur du courant  $I$  circulant dans ce circuit.

3. Donnez l'expression et la valeur de la tension aux bornes de la résistance  $R_1$ <sup>1</sup>. Comment nomme-t-on ce type de circuit ?
4. Exprimez maintenant  $U$  en fonction de  $I$ ,  $E$ ,  $R_1$  et tracer sa caractéristique  $UI$ <sup>2</sup>.
5. Exprimez la tension  $U$  en fonction de  $I$  et  $R_2$  et tracer sa caractéristique  $UI$  sur le même graphe.
6. Faites apparaître le point de fonctionnement (en vérifiant la cohérence avec la question numéro 3).

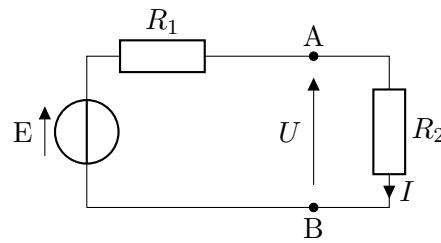


FIGURE 5.11 – (Exercice 19)  $E = 10$  V,  $R_1 = 470 \Omega$  et  $R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega$

## Exercice 20 : Notion de masse

On considère le circuit figure 5.12 :

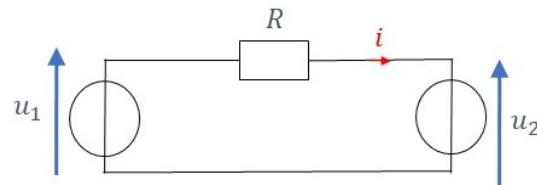


FIGURE 5.12 – Exercice 20

Les générateurs délivrant  $u_1$  et  $u_2$  sont appelés respectivement  $G_1$  et  $G_2$  et sont des sources de tension idéales.

1. Indiquez où se trouve la masse sur ce schéma si on implémente ce circuit avec  $G_1$  qui n'est pas flottant et  $G_2$  flottant.
2. Si je fais une mesure du courant qui rentre dans la masse au niveau du générateur délivrant  $u_1$ , vais-je mesurer :  $i$ ,  $0$  ou  $-i$ .

1. Indications :  $\frac{267}{470} \approx 0.57$ ,  $\frac{470}{267} \approx 1.76$ ,  $\frac{220}{267} \approx 0.82$ .

2. attention,  $R_2$  ne doit pas apparaître dans cette équation puisqu'on cherche à déterminer  $U$  en général et non dans le cas particulier où  $R_2$  serait branchée

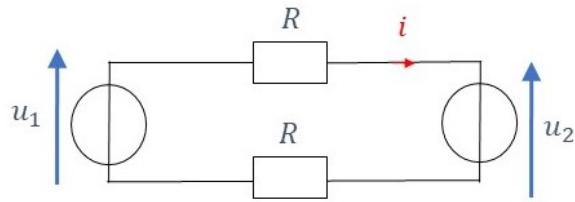


FIGURE 5.13 – Exercice 20

3. Si je fais une mesure du courant qui rentre dans la masse au niveau du générateur délivrant  $u_2$ , vais-je mesurer :  $i$ ,  $0$  ou  $-i$ .

En réalité, vous connectez deux générateurs qui ne sont pas flottants dans ce circuit.

4. Le circuit précédent est-il modifié ? Quel est alors le courant  $i$  dans le circuit ? Toujours avec ces deux générateurs qui ne sont pas flottants, on suppose que vous inversez les branchements du générateur  $G_2$ .
5. Dessinez le schéma électrique correspondant. Que va-t-il se passer ?

On considère maintenant le schéma figure 5.13 :

6. Dessinez le schéma correspondant au cas où au moins un des générateurs est flottant. Déterminez alors le courant  $i$  dans le circuit.
7. Dessinez le schéma correspondant au cas où les deux générateurs sont raccordés à la masse. Déterminez alors le courant  $i$  dans le circuit et comparez au résultat de la question 6.
8. Conclusion : est-il possible ou non d'implémenter le circuit ci-dessus avec deux générateurs non flottants ?

### Exercice 21 : Pont diviseur de courant - AAV4

On s'intéresse au circuit suivant (cf. figure 5.14) :

1. Exprimer  $I$  puis  $U$  en fonction de  $I_0$ ,  $R_N$  et  $R_L$ .

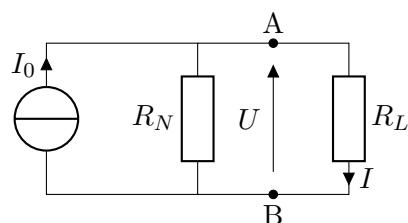


FIGURE 5.14 – Exercice 21

2. Calculer  $U$  et  $I$  pour les valeurs suivantes :

- $R_L = 0,01R_N$
- $R_L = 0,5R_N$
- $R_L = R_N$
- $R_L = 100R_N$

3. Tracer la caractéristique  $U = f(I)$  puis y repérer les différents points de fonctionnement obtenus pour les différentes valeurs de  $R_L$ .

### Exercice 22 : Pont diviseur de tension, encore... - AAV4

Votre responsable de stage vous donne ce circuit incomplet (figure 5.15) et vous charge de déterminer les valeurs maximale et minimale de courant qui pourront être délivrés par la batterie. Vous devez fermer le circuit par une résistance du laboratoire. En fouillant, vous trouvez une armoire pleine de résistances dont les valeurs varient de très faible à très élevée.

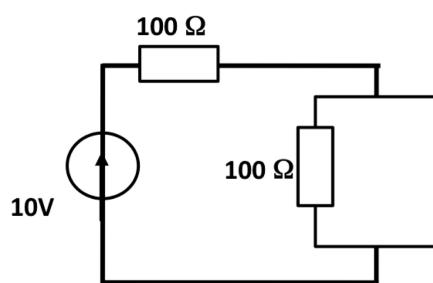


FIGURE 5.15 – Exercice 22

### Exercice 23 : Simplification de circuit et caractéristique - AAV2/3/4

On s'intéresse au circuit suivant (figure 5.16) :

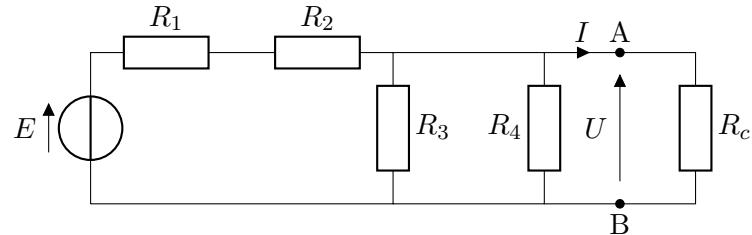


FIGURE 5.16 – Exercice 23

1. Exprimer  $U$  en fonction de  $E$ ,  $I$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , et  $R_4$ . (Penser aux équivalences de résistances pour vous simplifier la vie)<sup>3</sup>.
2. Exprimer  $U$  en fonction de  $I$  et  $R_c$ .
3. Tracer la caractéristique  $U = f(I)$ .

### Exercice 24 : Modèles et Thévenin et Norton - AAV5

On s'intéresse aux circuits suivants (figure 5.17) :

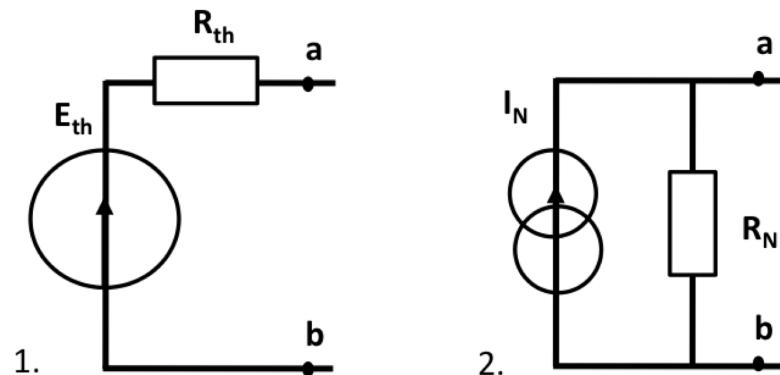


FIGURE 5.17 – (Exercice 24)  $E_{th} = 10 \text{ V}$  et  $R_{th} = 50 \Omega$

3. et au pont diviseur de tension

1. Parmi ces deux circuits, identifiez le circuit de Thévenin et le circuit de Norton.
2. Rappeler la caractéristique  $U = f(I)$  d'une source réelle de tension (schéma (1)), en indiquant sur votre graphique la tension à vide  $E_{th}$  et le courant de court-circuit  $I_{cc}$ . Quelle relation lie  $E_{th}$ ,  $R_{th}$  et  $I_{cc}$  ?
3. Dans le cas du circuit (2), que valent la tension  $U$  et l'intensité du courant  $I_N$  :
  - (a) à vide ?
  - (b) lorsqu'on court-circuite  $a$  et  $b$  ?
4. D'après les questions 2, 3 et 4, comment choisir  $I_N$  et  $R_N$  pour que la source (1) ait la même caractéristique que la source (2) (expression littérale et calcul) ?

### Exercice 25 : Equivalence de sources - AAV5

On s'intéresse au circuit suivant (figure 5.18) :

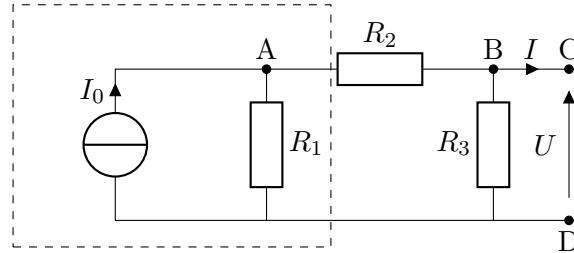


FIGURE 5.18 – (Exercice 25)  $I_0 = 500 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$  et  $R_3 = 200 \Omega$

1. La source en pointillé correspond-t-elle au modèle de Thévenin ou de Norton ?
2. En utilisant l'équivalence Thévenin-Norton, transformez cette source pour obtenir une source réelle de tension à vide  $U_0$  et de résistance interne  $r$ . On exprimera  $U_0$  et  $r$  en fonction de  $I_0$  et  $R_1$ .
3. Redessinez le schéma avec la nouvelle source.
4. Exprimez la résistance  $R_{eq}$  équivalente à  $r$  et  $R_2$ . Redessinez le schéma avec cette résistance équivalente.
5. En utilisant l'équivalence Thévenin-Norton, remplacez la source  $(U_0, R_{eq})$  par une source réelle de courant  $(I_N, R_N)$ . On exprimera  $I_N$  et  $R_N$  en fonction de  $U_0$  et  $R_{eq}$ .

6. Exprimez la résistance  $R$  équivalente à  $R_N$  et  $R_3$  en fonction de  $R_N$  et  $R_3$ . Exprimez la ensuite en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .
7. Calculez  $I_N$  et  $R$ .

### Exercice 26 : AAV5

1. Mettez l'ensemble des circuits (figure 5.19(b)) sous la forme d'un générateur de Thévenin ou d'un générateur de Norton entre les points  $a$  et  $b$  (cf. figure 5.19(a)). Donnez systématiquement les valeurs de  $E_{th}$ ,  $R_{th}$ ,  $I_N$  et  $R_N$  sous forme analytique et sous forme numérique.
2. Calculez le courant  $I$  circulant dans une résistance  $R_L$  et la différence de potentiel  $U_{AB}$ <sup>4</sup>.  $R_L$  prend les valeurs :  $0 \Omega$ ,  $10 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ,  $1 \text{ k}\Omega$  et  $1 \text{ M}\Omega$ .

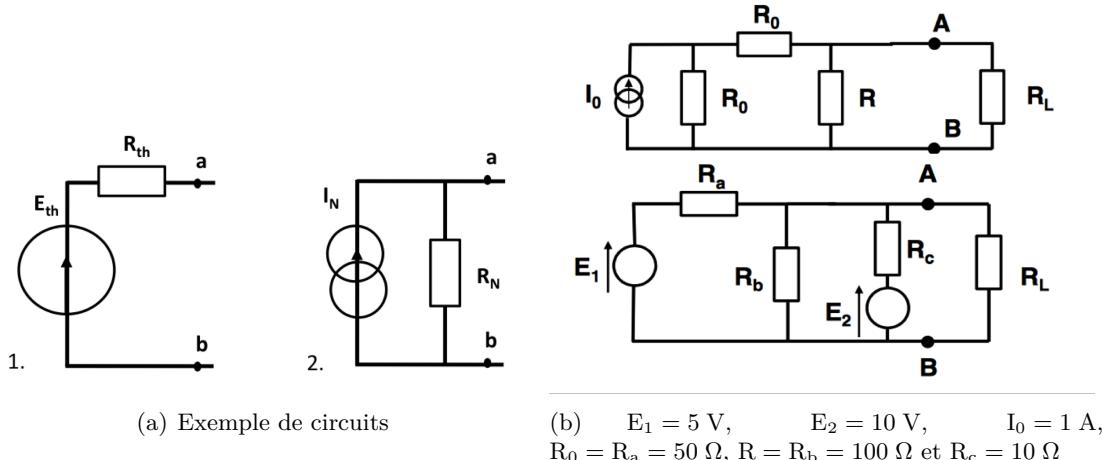


FIGURE 5.19 – Exercice 26

### Exercice 27 : AAV5

On cherche à déterminer le courant qui circule dans la résistance  $R_C$  (cf. figure 5.20) lorsque  $U_A = 4 \text{ V}$ ,  $U_B = 12 \text{ V}$ ,  $R_A = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_B = 6 \text{ k}\Omega$ , et  $R_C = 6 \text{ k}\Omega$ .

Déterminez ce courant en utilisant successivement :

— la loi des noeuds et la loi des mailles

4. Vous avez évidemment la possibilité d'utiliser le circuit simplifier pour calculer  $U_{AB}$  et  $I$ , en pensant « pont diviseur de tension » ou « pont diviseur de courant ».

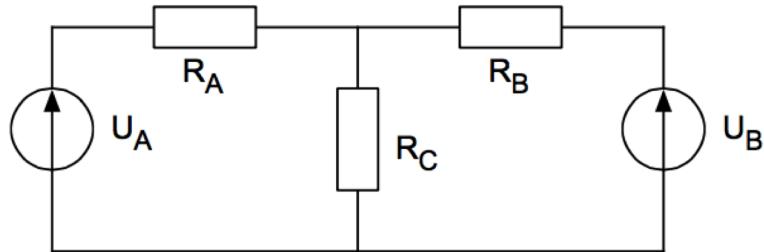


FIGURE 5.20 – Exercice 27

- en mettant le circuit sous la forme d'un générateur de Norton
- en mettant le circuit sous la forme d'un générateur de Thévenin

### Exercice 28 : Pour faire un peu de physique - comme ça - AAV4/5

Vous avez à votre disposition une alimentation continue de 6 V et un jeu de résistances de  $100 \Omega$ . Comment faire pour obtenir une tension de 2 V et un courant de 40 mA entre un point *A* et *B* de ce montage ?

- Proposer un montage en mentionnant les valeurs des dipôles impliqués

Si on branche entre *A* et *B* un appareil électrique de résistance interne  $R$ , que va devenir  $U$  ?

- si  $R = 1 \text{ M}\Omega$
- si  $R = 10 \text{ m}\Omega$

## Chapitre 6

# Régime Continu - Exercices à la maison

### Exercice 1 : AAV 1/2/3/4

Quelle est l'intensité du courant  $I_4$  dans ce circuit (figure 6.1), dans les cas où  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $I_3$  valent les valeurs du tableau suivant ?

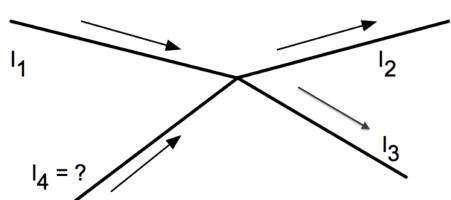


FIGURE 6.1 – Exercice 1

$I_1$	$I_2$	$I_3$
2 A	3 A	-5 A
-5 mA	1 A	2 A
3 A	1 mA	-10 A
100 A	1 A	-5 A
4 A	-6 A	7 A

### Exercice 2 : AAV 2/3

Déterminez  $V_B$  pour les cas suivants (cf. figure 6.2), et exprimer  $V_{AB}$  et  $V_{CB}$  :

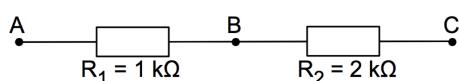
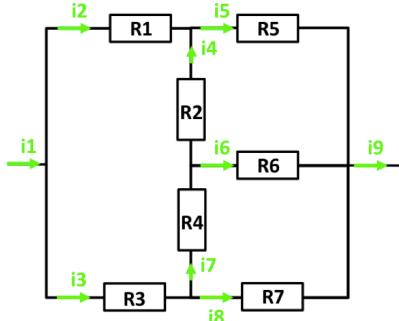


FIGURE 6.2 – Exercice 2

$V_A$	$V_C$
-4 V	12 V
-4 V	-4 V
-4 V	-12 V
4 V	12 V

### Exercice 3 : Loi des noeud - AAV 3/4

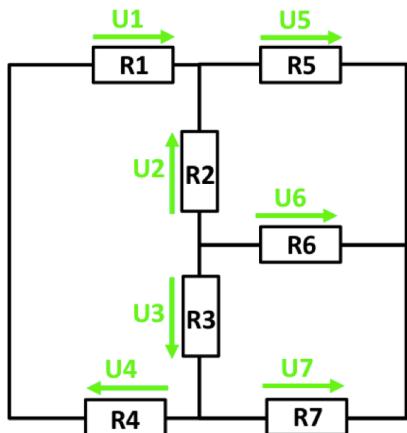


On considère le schéma suivant de la figure 6.3. Mettre en évidence chacun des noeuds. Combien y en a t'il ?

On donne les intensités de courant suivantes :  $i_1 = 3 \text{ A}$ ,  $i_2 = 2 \text{ A}$ ,  $i_4 = 5 \text{ A}$  et  $i_6 = 0.5 \text{ A}$ . Déterminer toutes les intensités du circuit.

FIGURE 6.3 – Exercice 3

### Exercice 4 : Loi des mailles - AAV 3/4



On considère le schéma suivant (figure 6.4). Mettre en évidence chacune des mailles. Combien y en a t'il ?

On donne les tensions suivantes :  $U_2 = -3 \text{ V}$ ,  $U_3 = 4 \text{ V}$ ,  $U_4 = 6 \text{ V}$  et  $U_5 = -2 \text{ V}$ . Déterminer toutes les tensions du circuit ?

FIGURE 6.4 – Exercice 4

### Exercice 5 : Association de dipôles : vers des circuits complexes - AAV4

On s'intéresse au circuit suivant (figure 6.5).

On cherche ici à déterminer la tension  $U_1$  aux bornes de  $R_1$ .

1. Repérez et fléchez les tensions  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  et  $U_6$  sur le circuit en respectant les conventions d'orientation.

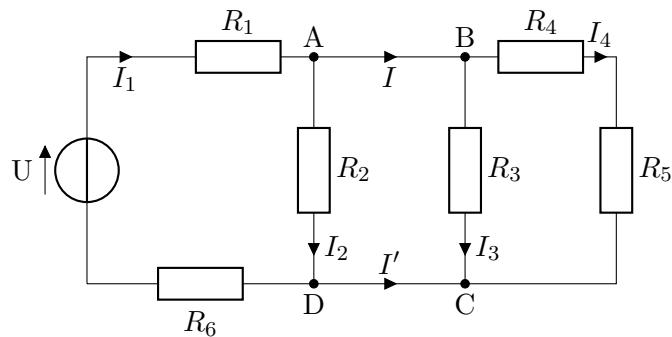


FIGURE 6.5 – (Exercice 5)  $U = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$  et  $R_4 = 50 \Omega$

2. Combien y-a-t'il de mailles sur ce circuit ? Mettez-les en évidence sur le schéma.
3. A l'aide de la loi des mailles, déterminez toutes les relations liant les différentes tensions dans le circuit.
4. Ecrivez la loi des noeuds pour les noeuds  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
5. On a mesuré les grandeurs suivantes :

$U_1 = 3 \text{ V}$	$I_1 = 150 \text{ mA}$
$U_4 = 1 \text{ V}$	$I_2 = 30 \text{ mA}$
$U_5 = 6 \text{ V}$	$I_3 = 60 \text{ mA}$
$U_6 = 2 \text{ V}$	

- (a) Exprimez puis calculez les courants  $I$  et  $I_4$ .
- (b) Exprimez puis calculez les tensions  $U_3$  et  $U$ .

### Exercice 6 : Equivalence de résistances - AAV4

Exprimez la résistance  $R$  équivalente au circuit suivant (figure 6.6) : Que vaut  $R$  quand  $R_4 \rightarrow \infty$  et quand  $R_4 \rightarrow 0$  ?

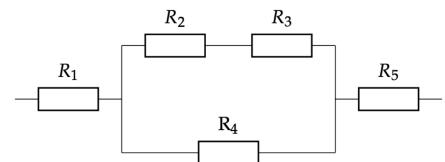


FIGURE 6.6 – Exercice 6

### Exercice 7 : AAV4

On considère 2 résistances  $R_A$  et  $R_B$  en série. Calculez la résistance équivalente de manière analytique, puis numérique dans les cas suivants :

$R_A$	$R_B$
10 $\Omega$	10 $\Omega$
10 $\Omega$	10 k $\Omega$
10 k $\Omega$	10 $\Omega$
10 k $\Omega$	10 k $\Omega$

Comment pourriez vous redessiner le circuit quand  $R_A = R_B$ ,  $R_A \ll R_B$  ?

### Exercice 8 : AAV4

On considère 2 résistances  $R_A$  et  $R_B$  en parallèle. Calculez la résistance équivalente de manière analytique, puis numérique dans les cas suivants :

$R_A$	$R_B$
10 $\Omega$	10 $\Omega$
10 $\Omega$	10 k $\Omega$
10 k $\Omega$	10 $\Omega$
10 k $\Omega$	10 k $\Omega$

Comment pourriez vous redessiner le circuit quand  $R_A = R_B$ ,  $R_A \ll R_B$  ?

### Exercice 9 : Pont diviseur de tension - AAV4

On s'intéresse au circuit de la figure 6.7.

1. Exprimez  $I$  puis  $U$  en fonction de  $I_0$ ,  $R_N$  et  $R_L$ .
2. Calculez  $U$  et  $I$  pour les valeurs suivantes :

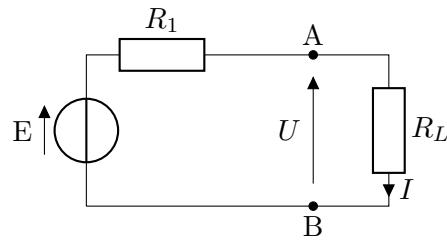


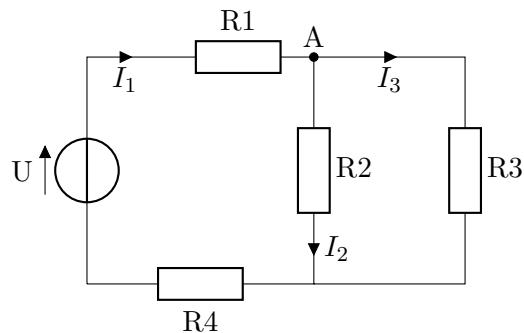
FIGURE 6.7 – Exercice 9

- $R_L = 0.01R_N$
- $R_L = 0.5R_N$
- $R_L = R_N$
- $R_L = 100R_N$

3. Tracez la caractéristique  $U = f(I)$  puis y repérer les différents points de fonctionnement obtenus pour les différentes valeurs de  $R_L$ .

### Exercice 10 : Association de dipôles : vers des circuits complexes enfin.... - AAV2/3/4

On s'intéresse au circuit suivant (cf. figure 6.8).

FIGURE 6.8 – (Exercice 10)  $U = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$  et  $R_4 = 50 \Omega$ 

On cherche ici à déterminer la tension  $U_1$  aux bornes de  $R_1$ .

1. Repérez et fléchez les tensions  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  sur le circuit. Combien y-a-t'il de mailles sur ce circuit ?

2. A l'aide de la loi des mailles, déterminez les relations liant les différentes tensions dans le circuit.
3. Déterminez la relation entre  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $I_3$ .
4. Exprimez  $U_1$  en fonction de  $U$ ,  $U_4$ ,  $R_2$  et  $I_2$  puis en fonction de  $U$ ,  $R_1$ ,  $R_4$ ,  $R_2$  et  $I_2$ .
5. Exprimez  $I_2$  en fonction de  $U_1$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .
6. Exprimez et calculez  $U_1$  en fonction des données du problème.

### Exercice 11 : AAV5

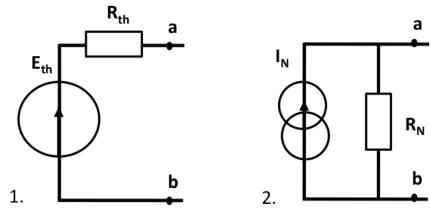


FIGURE 6.9 – (Exercice 11)  
Exemple de circuits

1. Mettez l'ensemble des circuits de la figure 6.10 sous la forme d'un générateur de Thévenin ou de générateur de Norton entre les points  $a$  et  $b$  (cf. figure 6.9). Donner systématiquement les valeurs de  $E_{th}$ ,  $R_{th}$ ,  $I_N$  et  $R_N$  sous forme analytique et sous forme numérique.
2. Calculez le courant  $I$  circulant dans une résistance  $R_L$  et la différence de potentiel  $U_{AB}$ <sup>a</sup>.  $R_L$  prend les valeurs :  $0 \Omega$ ,  $10 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ,  $1 \text{ k}\Omega$  et  $1 \text{ M}\Omega$ .

<sup>a</sup>. Vous avez évidemment la possibilité d'utiliser le circuit simplifier pour calculer  $U_{AB}$  et  $I$ , en pensant « pont diviseur de tension » ou « pont diviseur de courant ».

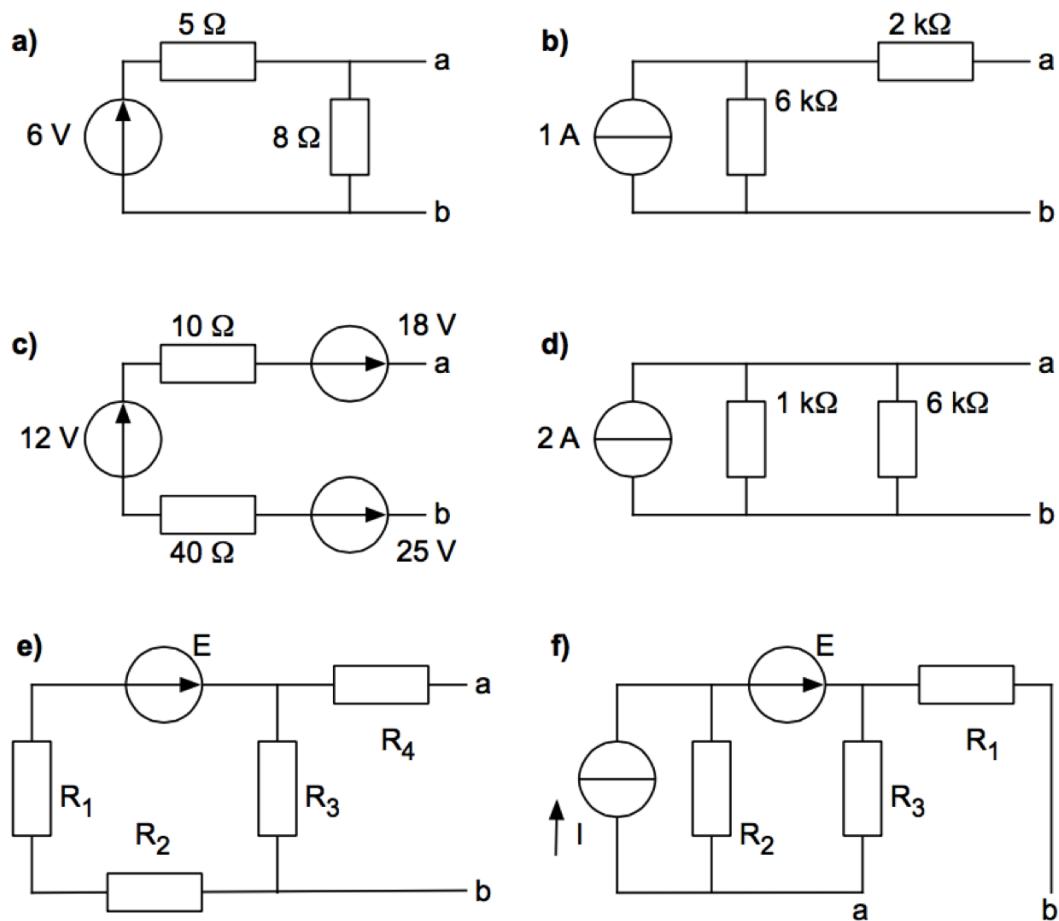


FIGURE 6.10 – (Exercice 11)  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$  et  $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$

## Exercice 12 : AAV5

Un peu plus dur, mais pas beaucoup, et vous devez être bien échauffés maintenant.

1. Mettez l'ensemble des circuits de la figure 6.11 sous la forme d'un générateur de Thévenin ou de Norton entre les points  $a$  et  $b$ . Donner systématiquement les valeurs de  $E_{th}$ ,  $R_{th}$ ,  $I_N$  et  $R_L$  sous forme analytique et sous forme numérique.
2. Calculez le courant  $i_{AB}$  circulant dans une résistance  $R_L$  et la différence de potentiel  $U_{AB}$ .  $R_L$  prend les valeurs :  $0 \Omega$ ,  $10 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ,  $1 \text{ k}\Omega$  et  $1 \text{ M}\Omega$ .

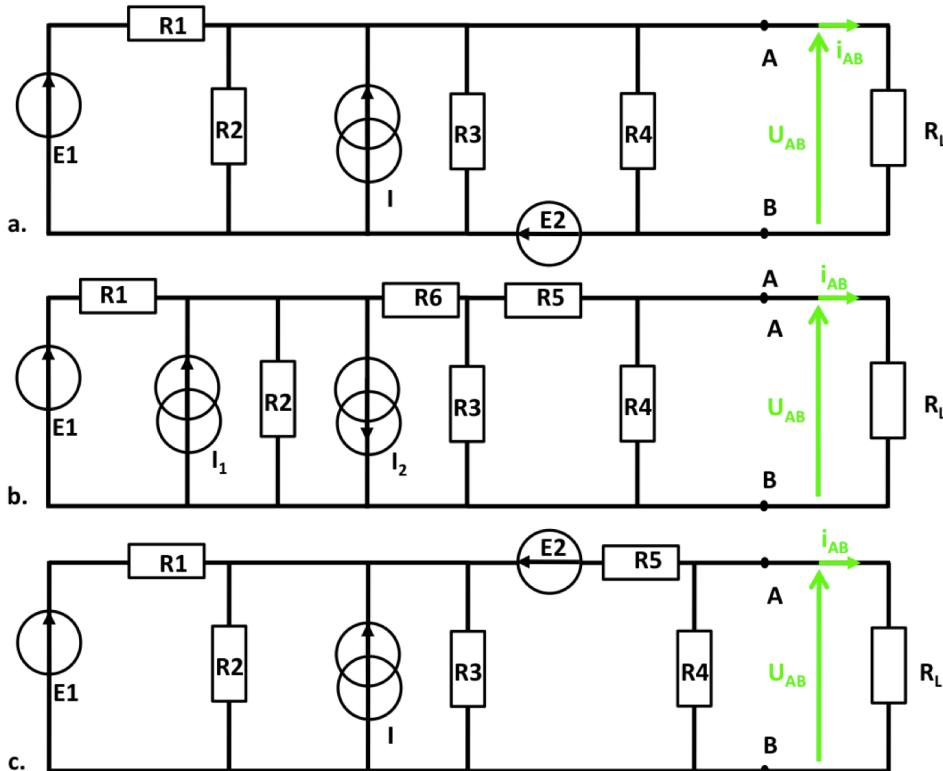


FIGURE 6.11 – (Exercice 12)  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_2 = 4 \text{ V}$ ,  $I = 2 \text{ A}$  et  $I_2 = 1 \text{ A}$

## Exercice 13 : Stabilisateur de tension - AAV6

On considère le circuit de la figure 6.12).

La tension aux bornes d'une thermistance<sup>1</sup> en fonction du courant est la suivante :

1. capteur de température

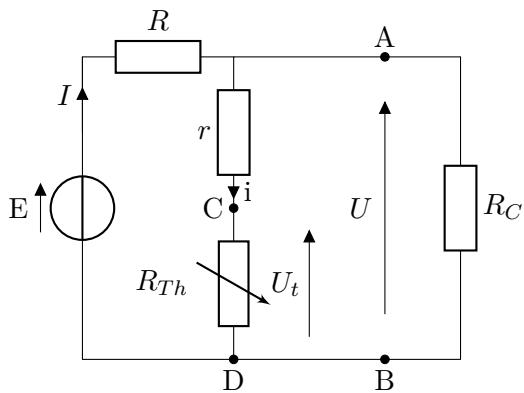


FIGURE 6.12 – (Exercice 13) stabilisateur de tension

$U_t$ (V)	0	4	6.5	8.2	8.6	9	8.7	8
$i$ (mA)	0	5	10	20	25	35	65	100

1. Tracer  $U_t = f(i)$  (à la main, ou avec MATLAB, PYTHON, etc.)
2. Exprimer  $U_t = f(E, i, r, R, R_C)$
3. calculer  $R$  pour avoir un courant  $i = 60$  mA
4. Déterminer la variation de  $U_t$  pour que la tension  $E$  varie de  $\pm 15\%$

### Exercice 14 : AVV5

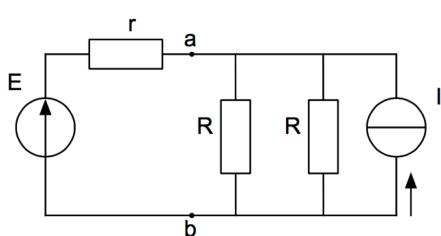


FIGURE 6.13 – Exercice 14

1. Dans le circuit de la figure 6.13, déterminez la tension à vide  $E_{th}$  et la résistance interne  $r_{th}$  du modèle de Thévenin du dipôle situé à droite des bornes  $a$  et  $b$ .
2. Déduisez-en l'intensité  $i$  du courant qui parcourt la résistance  $r$ . Applications numériques :  $R = 6 \Omega$ ,  $I = 8 \text{ A}$ ,  $E = 4 \text{ V}$  et  $r = 2 \Omega$ .

## Exercice 15 : Pour faire un peu de physique - cellule photovoltaïque - AAV3

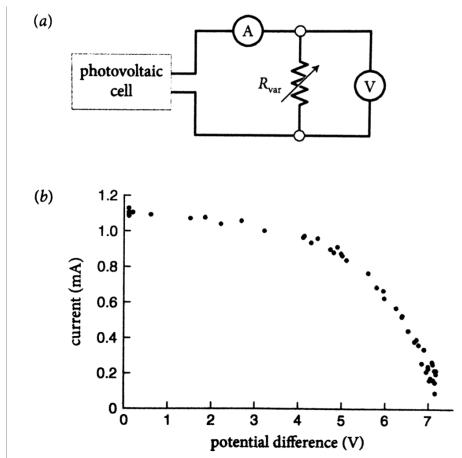


FIGURE 6.14 – Exercice 15

Vous illuminisez une cellule photovoltaïque avec une lampe halogène. La cellule photovoltaïque est connectée à un ampèremètre, un voltmètre et une résistance variable (cf. figure 6.14(a)). On mesure pour différentes valeurs de  $R_{var}$  le courant circulant dans la résistance ainsi que la différence de potentiel à ses bornes. Les résultats sont présentés (cf. figure 6.14(b)), où chacun des points représente une valeur de DDP et de courant pour une valeur de  $R_{var}$ .

1. Quelles sont les valeurs de  $R_{var}$  auxquelles correspondent les points de données aux différences de potentiel minimales et maximales ?
2. Quelle est la valeur de la puissance maximale délivrée par la cellule photovoltaïque ?

## Exercice 16 : Pour faire un peu de physique - le pont de Wheatstone - AAV6

Le pont de Wheatstone<sup>2</sup> est un instrument de mesure inventé par Samuel Hunter Christie en 1833, puis amélioré et popularisé par Charles Wheatstone en 1843. On considère le pont de Wheatstone suivant (figure 6.15).

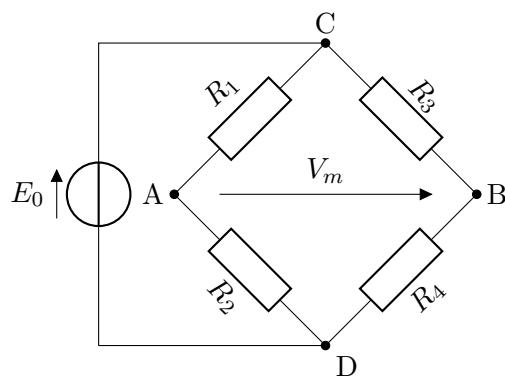


FIGURE 6.15 – (Exercice 16) le pont de Wheatstone

2. Les ponts ont été très utilisés pour la mesure de résistances, inductances et capacités jusque dans les années 1975. Ils étaient utilisés pour mesurer une résistance avec une grande précision. Ils sont encore utilisés dans la plupart des balances électroniques, où le poids de l'objet fait varier la résistance d'une jauge de contrainte.

1. Déterminez pour ce montage en pont l'expression de  $V_m = V_A - V_B$ <sup>3</sup> en fonction des éléments du circuit  $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$ .
2. Le pont est dit équilibré lorsque  $V_m = 0$  quelque soit l'entrée. Comment cela se traduit-il ?

Pont simple ou quart de pont :  $R_1 = R_2 = R_4 = R$  et  $R_3 = R + dR$  avec  $dR$  la variation de la grandeur à mesurer.

3. Que vaut alors  $V_m$  ?

Pont complet : le pont est initialement équilibré, ce qui se traduit par :  $R_1 = R_3 = R + dR$  et  $R_2 = R_4 = R - dR$ .

4. Que vaut alors  $V_m$  ?
5. Que peut-on en conclure en terme de sensibilité de ces deux montages ?

### Exercice 17 : Le pont de Wheatstone juste pour voir....- AAV6

Il est constitué du circuit suivant (figure 6.16) :

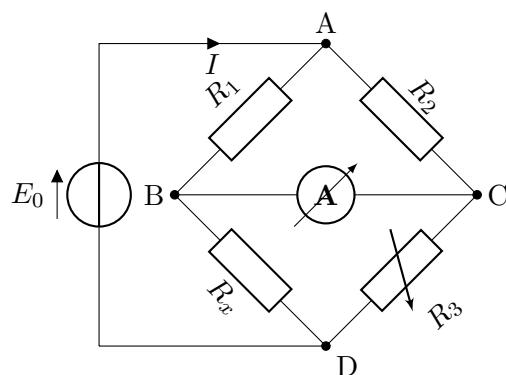


FIGURE 6.16 – (Exercice 17) le pont de Wheatstone

Si besoin :

- Fléchez les courants et tensions dans le circuit en respectant les conventions d'orientation.

3. N.B. : Calculez  $V_{AD}$  et  $V_{BD}$  et rappelez-vous que  $V_{AD} = V_A - V_D$

- Comptez le nombre de mailles dans le circuit.
- Établissez les lois des mailles correspondantes.
- Établissez les lois des noeuds pour ce circuit.

$R_x$  est la résistance à mesurer, de valeur inconnue.  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  sont des résistances de précision dont la valeur est connue, et  $R_3$  a la particularité d'être ajustable.

1. On s'intéresse au cas où le courant traversant l'ampèremètre est nul. Que deviennent alors les lois des noeuds en  $B$  et  $C$  ?
2. Exprimez alors la tension  $U_x$  en fonction de  $U_3$  puis, en utilisant la loi d'Ohm, exprimer la résistance  $R_x$  en fonction de  $R_3$ ,  $I_x$  et  $I_3$  puis enfin en fonction de  $R_3$ ,  $I_3$  et  $I_1$ .
3. Exprimez  $I_1$  en fonction de  $R_2$ ,  $I_2$  et  $R_1$  puis exprimez la valeur de la résistance  $R_x$  (inconnue) en fonction des autres résistances.

### **Exercice 18 : Pour faire un peu de physique - conditionnement d'un capteur résistif - AAV6**

Une sonde Pt100 est un capteur de type RTD (Resistance Temperature Detector). Son équation linéarisée autour de 0 °C est donnée par :

$$R(T) = R_0(1 + aT)$$

où  $T$  est la température de la sonde en degrés Celsius,  $R_0 = 100 \Omega$  sa résistance à 0 °C et  $a = 3.908 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

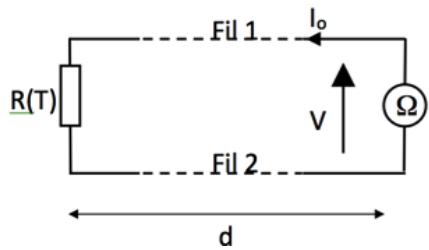


FIGURE 6.17 – Montage 2 fils

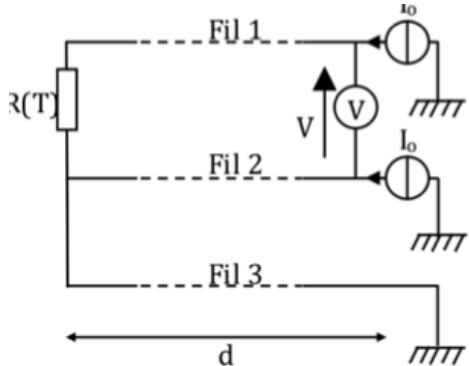


FIGURE 6.18 – Montage 3 fils

1. En déduire la relation permettant de déterminer la température  $T$  à partir de la mesure de la résistance  $R(T)$  de la sonde.

2. Pour mesurer  $R(T)$ , on décide dans un premier temps d'utiliser un ohmmètre de précision avec un montage « 2 fils » (cf. figure 6.17). La sonde, située à l'emplacement de mesure, est reliée à l'ohmmètre, situé à une distance  $d = 10 \text{ m}$ , par deux cordons de cuivre de section  $s = 0.22 \text{ mm}^{-2}$  et de résistivité  $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . L'ohmmètre mesure donc la résistance de l'ensemble « sonde + fils » au lieu du seul  $R(T)$ .

3. Calculez la résistance supplémentaire «  $r$  » apportée à l'ohmmètre par les fils (faire apparaître les étapes intermédiaires du calcul).

4. Quelle est alors l'erreur commise en  $^{\circ}\text{C}$  sur la température déduite à partir de la mesure de résistance ?

Pour palier l'erreur induite sur la mesure de  $R(T)$  et augmenter la distance de mesure possible on s'intéresse à une sonde « 3 fils » insérée dans le montage électrique suivant comprenant deux sources de courant  $I_0$  identiques et où la tension  $V$  est mesurée avec un voltmètre (supposé idéal) (cf. figure 6.18).

4. Que vaut le rapport  $\frac{V}{I_0}$  si les 3 fils présentent la même résistance (on pourra faire un schéma équivalent et noter  $R_k$  la résistance du fil numéro  $k$ ) ?

5. La résistance des fils perturbe-t-elle la mesure de température ?

6. Qu'en est-il si un déséquilibre apparaît entre les valeurs des résistances  $R_k$  ? (justifier)

On décide finalement d'utiliser une sonde « 4 fils » insérée dans le montage suivant (tension  $V$  mesurée avec un voltmètre) (cf. figure 6.19) :

7. Que vaut le rapport  $\frac{V}{I_0}$  (on pourra faire un schéma équivalent et noter  $R_k$  la résistance du fil numéro  $k$ ) ?

8. La résistance des fils perturbe-t-elle la mesure ?

9. Un déséquilibre sur les valeurs des  $R_k$  a-t-il une influence (justifier) ?

4. utiliser la loi des noeuds et la loi des mailles

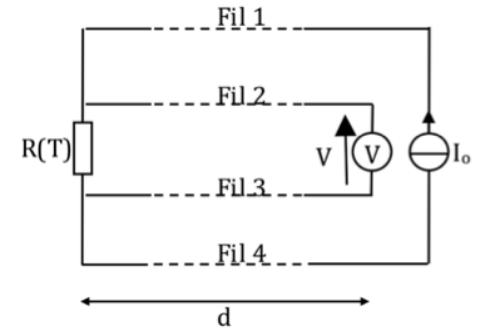


FIGURE 6.19 – Montage 4 fils

### Exercice 19 : Capteur et conditionneur de pression - AAV6

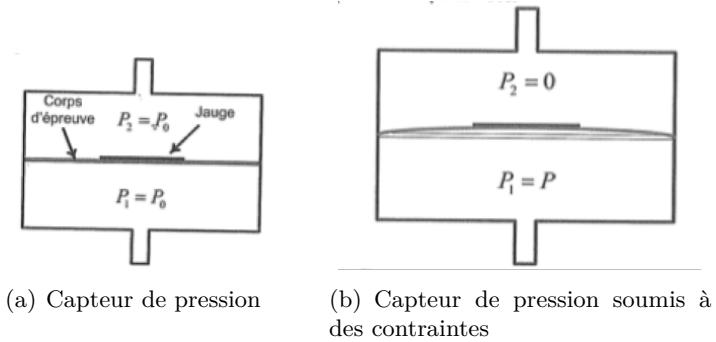


FIGURE 6.20 – Exercice 19

Un capteur de pression de type piézorésistif (jauge de déformation à semi-conducteur) est constitué par une jauge collée sur un support qui est un corps d'épreuve déformable (cf. figure 6.20(a)). Ce capteur est placé dans une enceinte et le corps d'épreuve réalise une séparation entre deux cavités ; lorsque la pression est la même de part et d'autre ( $p_0$  sur la figure 6.20(a)) la jauge est au repos et sa résistance est  $R_0$ .

Lorsque l'on soumet une jauge de déformation à une force de traction  $F$ , celle-ci s'allonge d'une longueur  $\Delta l$  à partir d'une longueur initiale  $l_0$  et on note :  $l = l_0 + \Delta l$ .  $\epsilon$  désigne la quantité  $\frac{\Delta l}{l_0}$ ,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $C$  la constante de Bridgman du matériau.

1. Montrer que l'on peut écrire que la variation relative de résistance  $R$  est donnée par :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = K \frac{\Delta L}{l_0} = K\epsilon$$

Exprimez  $K$  en fonction de  $C$  et  $\nu$ .

Sous l'effet d'une différence de pression  $p_1 > p_2$ , le support et la jauge se déforment entraînant une modification de la résistance de la jauge ; celle-ci prend la valeur de  $R$  (cf. figure 6.20(b)).

2. On montre alors et nous admettrons pour la suite, qu'au premier ordre :

$$\frac{\Delta L}{l_0} = \gamma(p_1 - p_2)$$

3. En déduire que la variation relative de résistance est proportionnelle à la différence de pression<sup>5</sup> :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R - R_0}{R_0} = k(p_1 - p_2)$$

4. calculez  $\gamma$  si  $K = 168$ .

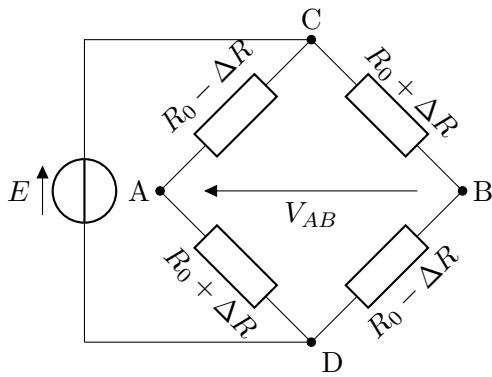


FIGURE 6.21 – (Exercice 19)  
Conditionnement des capteurs de pression (pont de Wheatstone)

Le capteur complet est constitué de quatre jauge travaillant de façon complémentaire. Deux varient suivant  $R_0 + \Delta R$ , deux autres suivant  $R_0 - \Delta R$ . Le conditionnement associé est en pont de Wheatstone suivant la figure 6.21.

5. Le conditionnement étant alimenté sous la tension  $E$ , exprimez les tensions  $V_{AD}$  et  $V_{BD}$  en fonction de  $R_0$  et  $\Delta R$ . En déduire l'expression de  $V_{AB}$  en fonction de  $k$ ,  $p$  et  $E$ . Application numérique :  $E = 12$  V et  $p = 4.105$  Pa.

6. calculez  $V_{AB}$

5. Si la pression  $p_1 = p$  et si  $p_2 = 0$  on obtient une mesure absolue de la pression  $p$ , la variation relative de résistance est alors proportionnelle à  $p \frac{\Delta R}{R_0} = kp$  où  $k = 1.5 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$



## Deuxième partie

# Le régime Variable : régime transitoire et régime forcé



## Chapitre 7

# Introduction aux régimes variables - Pour aller plus loin

Les sources de tension ou de courant sont très souvent périodiques : citons la tension aux bornes d'une « prise de courant » qui a, en Europe, une fréquence de 50 Hz<sup>1</sup>, ou les signaux électriques qui transmettent une voix ou de la musique qui sont approximativement périodiques pendant une certaine durée. Parmi les signaux périodiques, le signal sinusoïdal (ou harmonique) occupe une place toute particulière pour plusieurs raisons. Il est possible de montrer que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux<sup>2</sup>. Mais avant d'introduire les signaux périodiques, nous allons nous intéresser à leur représentation (outils mathématiques qui permettront de décrire leurs évolutions temporelles).

Et toujours avant de commencer, un petit point sur les différents régimes rencontrés (en physique en général, en électrocinétique en particulier, mais pas que...).

On parle de **régime libre** d'un circuit le régime observé quand toutes les sources sont éteintes. On parle de **régime forcé (ou régime permanent forcé, régime établi, régime sinusoïdal forcé)** quand toutes les grandeurs électriques sont constantes et ne dépendent pas du temps<sup>3</sup>. Entre le moment où toutes les sources sont éteintes et celui où le régime permanent est établi, on parle alors du **régime transitoire** .

---

1. qui n'a jamais eu à choisir entre le 50 Hz et le 60 Hz de sa console ? ? ?

2. j'en reparle dans quelques pages, au chapitre régime permanent, en présentant le très célèbre Mr Fourier et ses célèbres séries...

3. Quand je dis qui ne dépend pas du temps, j'entends que ses caractéristiques ne dépendent pas du temps. Typiquement un sinus est un signal permanent si son amplitude et sa fréquence ne varient pas dans le temps

Il y a deux façons de découvrir la fréquence naturelle d'un système comme un poids sur un ressort par exemple (ou un système oscillant, ou un système filtrant). On pourrait simplement tirer le poids pour le déplacer soudainement de sa position d'équilibre, puis compter les oscillations par unité de temps à mesure que la masse monte et descend. Alternativement, on peut secouer le ressort régulièrement à différentes fréquences et attendre que le système se stabilise ; lorsque la fréquence des secousses correspond à la fréquence propre, le système oscille avec une amplitude maximale (tout comme un diapason est mis en mouvement par un son appliqué à sa fréquence propre). Ces deux approches sont illustrées schématiquement à la figure 7.1. Si le ressort entraîné était complètement libre de se déplacer, alors lorsque la fréquence d'entraînement est réglée à une fréquence égale (en résonance avec) la fréquence naturelle du ressort,  $\omega_0$ , on s'attendrait à ce que le ressort absorbe continuellement de l'énergie et exécute un mouvement d'amplitude de plus en plus grande sans limite. Cependant, tout ressort réel (y compris un électron lié à une molécule) est entravé dans son mouvement par une résistance de frottement, ou traînée, exprimée par une force d'amortissement (caractérisée par un coefficient de frottement) proportionnelle à la vitesse de la masse mobile<sup>4</sup>.

L'expérience transitoire consiste à surveiller le déplacement en fonction du temps d'une masse amortie sur un ressort (oscillateur harmonique amorti), juste après que la masse ait été déplacée d'une distance initiale  $x_0$  puis libérée. En langage courant, frapper un diapason le fera vibrer à sa hauteur naturelle, avec un volume sonore qui diminue de façon exponentielle avec le temps. Bien que l'expérience transitoire soit conceptuellement simple, son interprétation devient plus compliquée lorsque plusieurs fréquences naturelles sont présentes. Nous passons donc maintenant à l'expérience en régime permanent, dans laquelle chaque fréquence propre du système peut être observée séparément. Une masse sur un ressort soumise à une force motrice continue, sinusoïdale et variable dans le temps,  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , finit par se déplacer à la même fréquence (angulaire ou pulsation) ( $\omega$ ) que la force excitatrice, contrairement à la masse non entraînée sur un ressort qui vibre à sa propre fréquence angulaire  $\omega_0$ . En l'absence de frottement, le ressort oscille exactement en phase avec l'excitation. Toutefois, en présence d'un frottement, le déplacement du ressort entraîné sera en général en retard par rapport à celui de l'excitation. Ce retard est physiquement significatif et son analyse peut s'avérer utile en régime permanent.

---

4. L'intérêt pratique de ces paramètres est que les fréquences naturelles indiquent par exemple la force du ressort d'intérêt et sont liées à la couleur, à la force ou au type de liaison chimique, à l'activité optique et au rapport masse/charge ionique ; les largeurs des raies spectrales reflètent les taux de collisions moléculaires, de réactions chimiques et de mouvements moléculaires etc... (liste non exhaustive).

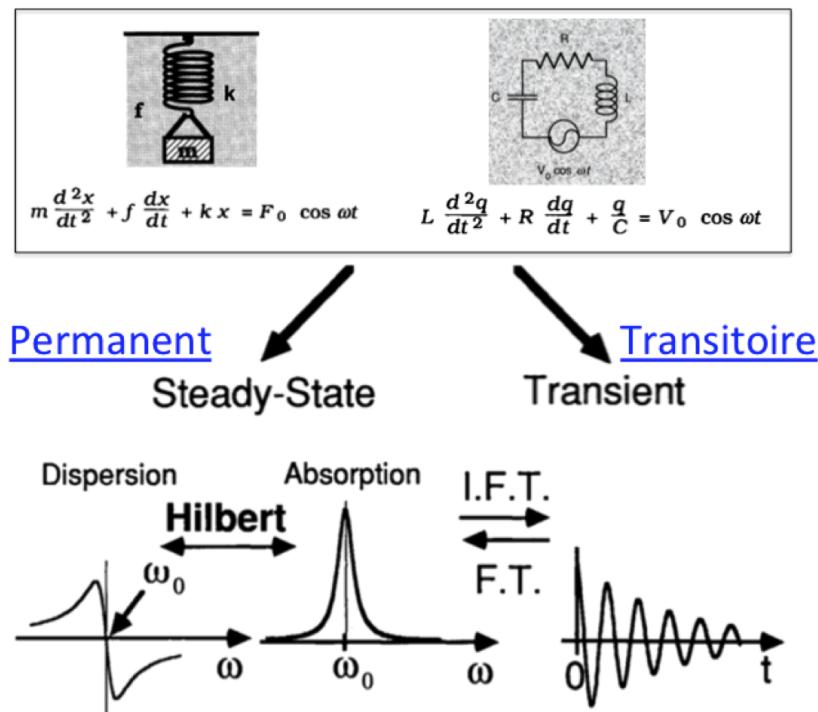


FIGURE 7.1 – Relations entre diverses expériences de diffusion, de spectroscopie et de transitoires, par analogie avec le mouvement d'un poids amorti à commande sinusoïdale ou brusquement déplacé sur un ressort. Le poids a une masse,  $m$ , liée à un ressort de force constante,  $k$ , immergé dans un milieu dont l'effet est représenté par un coefficient de frottement et est soumis soit à une force continue sinusoïdale variant dans le temps,  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (réponse en régime permanent, gauche), soit à un déplacement soudain (réponse transitoire, droite)

## 7.1 quelques conventions...

Jusqu'à maintenant nous nous sommes intéressés au comportement des circuits linéaires (composés de résistances, de générateurs idéaux) dans le cas du régime continu i.e. aucune des grandeurs  $U$ ,  $I$  ou  $R$  ne dépendaient du temps.

$$u(t) = U = \text{constante}$$

$$i(t) = I = \text{constante}$$

$$R = \text{constante}$$

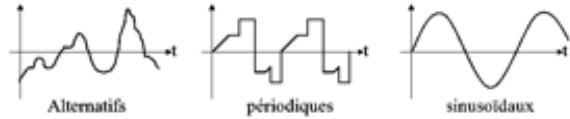


FIGURE 7.2 – quel régime... ? ? ?

En régime variable, au moins une des grandeurs dépend du temps, soit de manière apériodique, soit périodique (fig. 7.2).

$$u = u(t)$$

$$i = i(t)$$

## 7.2 régime transitoire et régime forcé (encore appelé régime permanent ou régime établi)

On introduit un signal  $s(t)$  variable dans le temps qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$s(t) = s_T(t) + s_P(t)$$

- $s_T(t)$  est la réponse transitoire, qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.
- $s_P(t)$  est la réponse permanente, composée de termes qui peuvent être des fonctions constantes ou sinusoïdales d'amplitude constante.

La réponse transitoire est composée de l'ensemble de tous les termes transitoires contenus dans la réponse. En général on admet que la réponse transitoire est éteinte à partir de l'instant  $t_0$  si pour  $t \ll t_0$ ,  $s_T(t)$  est négligeable devant  $s_P(t)$ .

On appellera :

- **régime transitoire** le mode de fonctionnement du système pendant le temps où la réponse transitoire n'est pas éteinte i.e.  $s(t) = s_T(t) + s_P(t)$
- **régime permanent** le mode de fonctionnement du système quand seule subsiste la réponse permanente  $s(t) = s_P(t)$

Pour vous simplifier la vie, et dans la mesure où cela correspondra à nos modèles physiques, nous serons la plupart du temps (pour ne pas dire toujours) en régime permanent. Comme quoi... il ne faut jamais désespérer<sup>5</sup>.

---

5. Ceci étant, vous devez d'avoir bien compris le principe de ces régimes transitoires et je reviendrai dessus au début du cours sur les systèmes oscillants



# Chapitre 8

## Régime transitoire

Nous allons observer, ici, le régime transitoire, régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable (ou un régime établi). Cette partie n'est jamais très simple puisqu'on étudie l'évolution temporelle d'un système pour arriver naturellement à son étude en régime permanent oscillant (le chapitre suivant). Dans le cas des circuits étudiés, linéaires, l'évolution de toutes les grandeurs électriques ( $u$ ,  $i$ ...) peut être décrite par une équation différentielle linéaire<sup>1</sup> d'ordre  $n$  (l'ordre du circuit)<sup>2</sup> à coefficient constant de la forme :

$$D_n \frac{d^n x}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + D_1 \frac{dx}{dt} + D_0 x = f(t)$$

$n$  détermine l'ordre du système étudié.

La solution générale est de la forme<sup>3</sup> :

$$s(t) = s_T(t) + s_P(t)$$

- $s(t)$  est la solution générale de l'équation avec second membres
- $s_T(t)$  est la **réponse transitoire**, qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Il s'agit également de la solution générale de l'équation homogène
- $s_P(t)$  est la **réponse permanente ou forcée**, composée de termes qui peuvent être des fonctions constantes ou sinusoïdales d'amplitude constante. Il s'agit également de la solution particulière

1. fonction linéaire :  $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$  et fonction affine :  $y = ax + b$

2. Revoir votre cours de mathématiques relatif à ce point, courage

3. Introduite dans le chapitre précédent, mais maintenant vous savez d'où cela vient !

Attention: un régime permanent peut être variable. C'est le cas par exemple d'un régime sinusoïdal où tension et courant varient sinusoïdalement au cours du temps mais leurs caractéristiques restent identiques à chaque nouvelle période (8.1 - droite).

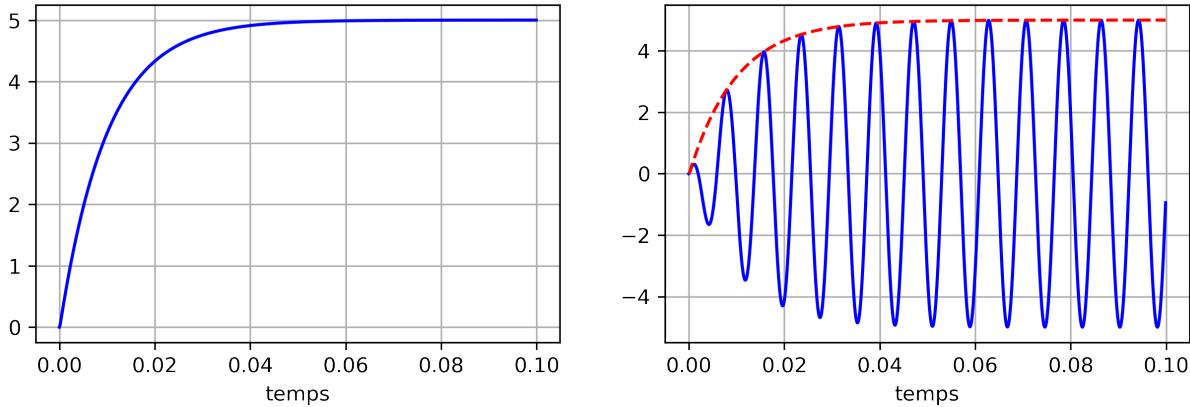


FIGURE 8.1 – le régime transitoire apparaît dans un premier temps (t entre 0 et 0.04 dans notre exemple), puis est succédé par le régime permanent (t entre 0.04 et 0.1). Ce régime permanent peut être continu à gauche ou variable à droite

Pour finir, on définit:

- **Le régime est forcé** lorsqu'on impose au système une source (de tension par exemple) sinusoïdale. Une fois le régime permanent établi, le circuit évoluera à une fréquence identique à celle de la source.
- **Le régime est libre** lorsqu'il n'y a plus de source

## 8.1 Régime transitoire d'un système du premier ordre, $n=1$

Je vais traiter en parallèle les deux circuits de références du premier ordre, le circuit composé d'une résistance associé en série avec un condensateur, encore appelé circuit RC (cf fig 8.2-gauche) et le circuit composé d'une résistance associé en série avec une bobine, encore appelé circuit RL (cf fig 8.2-droite).

À  $t=0$ , on considère que la tension aux bornes du condensateur ou de la bobine est nulle,  $u(t) = 0$  ainsi que le courant qui parcourt le circuit,  $i(t) = 0$ . On parlera des conditions initiales, ou encore des conditions aux limites.

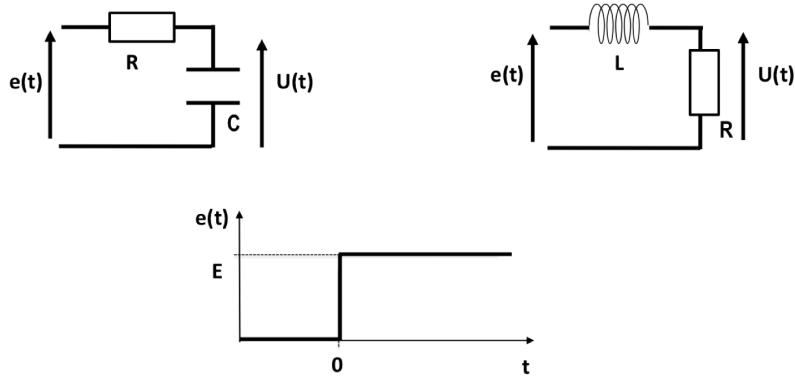


FIGURE 8.2 – circuit du premier ordre illustrant le régime transitoire.  $e(t)$  représente le signal alimentant le circuit

### 8.1.1 Equation différentielle

À  $t = 0+$  on considère le signal  $e(t) = E$  de la figure 8.2. La réponse du circuit RC ou RL (ici la valeur  $u(t)$  ou  $i(t)$ ) à ce signal  $e(t)$  s'appelle la réponse indicelle<sup>4</sup> ou la réponse à un échelon. C'est de la sémantique, mais ces termes réapparaîtront tout au long de votre cursus, autant commencer à savoir dès à présent de quoi il s'agit.

En posant la loi de mailles dans chacun des circuits, ainsi que les lois permettant de relier  $i(t)$  à  $u(t)$  aux bornes des dipôles :

— aux bornes de l'inductance

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

— aux bornes de la capacité

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

— aux bornes de la résistance

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

On arrive alors aux équations différentielles suivantes :

circuit RC		circuit RL
$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = e(t) = E$		$\frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{E}{R}$

4. On parle de réponse indicelle d'un système quand le signal d'entrée est un échelon. On parlera de réponse impulsionale quand le signal d'entrée sera de type impulsional ou encore une distribution de Dirac, mais il ne me semble pas que vous en ayez déjà entendu parler.

Vous reconnaissiez (enfin j'espère) une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants (les  $D_n$  de l'équation initiale, R, L et C ne varient pas dans le temps), avec second membres ( $e(t)=E$  dans le cas RC,  $\frac{e(t)}{R} = \frac{E}{R}$  dans le cas RL).

La partie droite de l'équation représente les contraintes extérieures (ici le générateur), c'est donc la partie à l'origine du régime forcé.

Cherchons ensuite l'ensemble des solutions possibles, qui seront de la forme :

$$\begin{array}{c|c} \hline \text{circuit RC} & \text{circuit RL} \\ \hline u(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + K(t) & i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + K(t) \\ \hline \end{array}$$

$A$  est une constante à déterminer et  $K(t)$  une solution particulière.

Nous pouvons remarquer que quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(t) = K(t)$ , c'est à dire que la solution particulière  $K(t)$  n'est autre que la solution en régime permanent.

Nous traiterons cette équation différentielle en déterminant la solution en considérant les conditions initiales : i.e.  $e(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $e(t) = E$  si  $t > 0$ , ainsi que l'état du système ( $U_C = 0$  et  $I_L = 0$  quand  $t = 0$ ).

*N.B. :* On remarque que  $[RC]$  homogène à un temps, et de même pour  $[\frac{L}{R}]$ .

### 8.1.2 Solution en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ )

Pour trouver la solution en régime permanent, il faut étudier le circuit équivalent en régime permanent.

$$\begin{array}{c|c} \hline \text{circuit RC} & \text{circuit RL} \\ \hline u_p(t) = E & i_p(t) = \frac{E}{R} \\ \hline \end{array}$$

*N.B. :*  $u_p$  doit vérifier l'équation  $\frac{du_p(t)}{dt} + \frac{u_p(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$

*N.B. 2 :*  $i_p$  doit vérifier l'équation  $\frac{di_p(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_p(t) = \frac{E}{L}$

circuit RC	circuit RL
$u(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + E$	$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

### 8.1.3 Conditions initiales ou de continuités

On parlera de conditions initiales quand le phénomène évolue temporellement, et de conditions aux limites quand il évolue spatialement.

Les constantes d'intégration se déterminent à partir des conditions aux limites. Il doit y avoir autant de condition aux limites que de constantes d'intégration. Quand les équations différentielles sont des équations différentielles temporelles, les conditions aux limites sont appelées conditions initiales lorsqu'elles correspondent aux conditions à respecter à l'instant initial<sup>5</sup>.

circuit RC	circuit RL
$u(0-) = u(0+) = 0$	$i(0-) = i(0+) = 0$
$u(0+) = A + E$	$i(0+) = A + \frac{E}{R}$
$A = -E$	$A = -\frac{E}{R}$

### 8.1.4 Solution finale

circuit RC	circuit RL
$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$	$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$	$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

### 8.1.5 Temps caractéristique $\tau$

On introduit la notion de constante de temps  $\tau$ <sup>6</sup> du circuit ou temps caractéristique.  $\tau$  donne un ordre de grandeur de la durée du transitoire.

circuit RC	circuit RL
$\tau = RC$	$\tau = \frac{L}{R}$

5. on rappelle que  $\exp(0)=1$

6. Gardez bien en tête ce paramètre temporel, que nous retrouverons sous forme de fréquence de coupure quand nous étudierons l'évolution fréquentielle du circuit

On considère que pour des temps de l'ordre de 3 à 5  $\tau$ <sup>7</sup> le régime permanent devient dominant devant le régime transitoire ( $U_p \gg U_T$ ).

Ces notions ne sont pas propre à l'électrocinétique, mais à tous les circuits en régime transitoire du premier ordre. Par exemple, en IRM (Imagerie par Résonance Magnétique), nous étudions la relaxation du noyau d'hydrogène (proton). Ces derniers relaxent suivant une cinétique du premier ordre, et sont caractérisés par des temps de relaxation longitudinale ( $T_1$ ) ou transversale ( $T_2$ ) analogue de  $\tau$ <sup>8</sup>. Ces temps  $T_1$  et  $T_2$  donnent des informations sur le milieu environnants (eau libre, graisse, muscle...).

*N.B. :* : Le régime transitoire n'a de sens que lorsqu'on regarde sur des temps très court après le changement d'état, avant que le régime permanent ne s'établisse. Inutile de mentionner que quand  $t \gg \tau$  le régime transitoire devient largement négligeable devant le régime permanent.

### 8.1.6 Pour aller plus loin

Si on veut déterminer ce qu'il se passe en terme de courant dans le circuit RC, il suffit de se rappeler que  $u(t) = ri(t)$ .

Dans ce cas,  $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

D'autre part, si on veut déterminer ce qu'il se passe en terme de tension dans le circuit RL, il suffit d'appliquer une loi d'Ohm aux bornes de  $R$  (le courant circulant dans  $R$  et  $L$  est le même) et dans ce cas,  $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

### 8.1.7 Régime permanent

Le régime permanent ou régime forcé est atteint quand :

— circuit RC :

le condensateur atteint sa charge maximale sous la tension  $E$ , alors le courant  $i$  ne peut

7. Le facteur 3 à 5 dépend des communautés de physiciens avec qui vous interagissez, c'est l'ordre de grandeur qui compte, nous sommes en physique, profitons en !

$t = 3\tau$  ,  $u(t) = 0.90E$

$t = 5\tau$  ,  $u(t) = 0.99E$

8. N'hésitez pas à venir me parler IRM ou imagerie médicale, je me ferai un plaisir d'en discuter avec vous, c'est un autre de mes dadas

plus circuler car le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, il ne peut pas non plus se décharger car il n'y a pas de charge dans laquelle le courant puisse circuler.

— circuit RL :

Durant le régime transitoire, la bobine cherche à contrer la tension du générateur en imposant une tension en sens opposé (Lenz). Une fois le régime établit, i.e en régime continu ( $E=\text{constante}$ ), la bobine se comporte comme un interrupteur fermé, et la tension à ses bornes est forcément nulle.s

La figure 8.3 synthétise le comportement du courant et de la tension lors de la phase de "charge" i.e. quand on passe d'une tension nulle à une tension  $E$  en entrée.

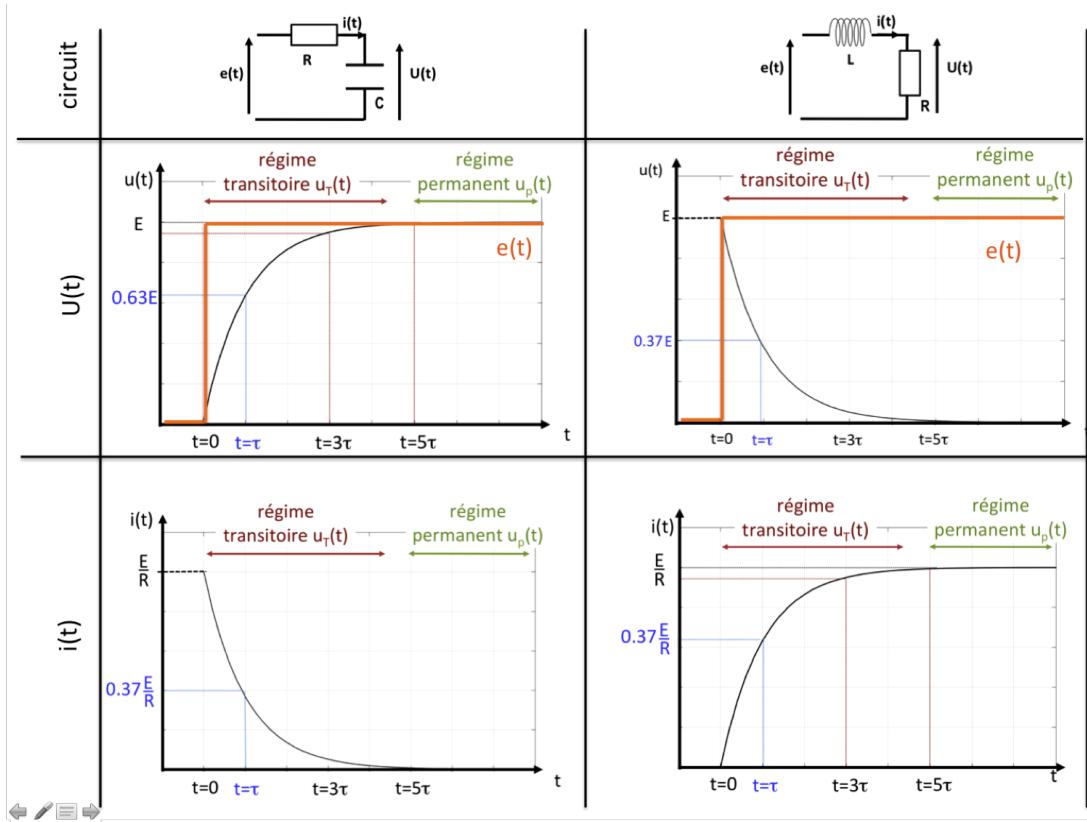


FIGURE 8.3 – synthèse de l'analyse d'un régime du premier ordre dans deux exemples, circuit RC et RL

N.B. : : si on veut connaître ce qui se passe aux bornes de  $R$  dans le circuit RC ou aux bornes de  $L$  dans le circuit RL, il suffit d'appliquer la loi de maille (cf fig 8.4) <sup>9</sup> :

9. Attention, en regardant rapidement il est possible de confondre les figures 8.3 et 8.4, mais dans le premier cas je vous ai tracé la tension et le courant aux bornes du dipôles d'intérêt ( $C$  dans le circuit 1 et  $R$  dans le circuit 2), dans le deuxième cas, je vous ai tracé l'ensemble des tensions dans le circuit ( $u_R(t)$  et  $u_C(t)$  dans le circuit 1,  $u_R(t)$  et  $u_L(t)$  dans le circuit 2)

$$e(t) = u_R(t) + u(t) \text{ dans le circuit RC, } u_R(t) = E - u(t)$$

et

$$e(t) = u_L(t) + u(t) \text{ dans le circuit RL, } u_L(t) = E - u(t)$$

La figure 8.4 synthétise le comportement de la tension lors de la phase de "charge" i.e quand on passe d'une tension nulle à une tension E en entrée et de "décharge" i.e. quand on passe d'une tension E à une tension nulle, dans les deux circuits de références "RC" et "RL".

N.B. 2 : On observer une discontinuité de courant et de tension aux bornes de la résistance.

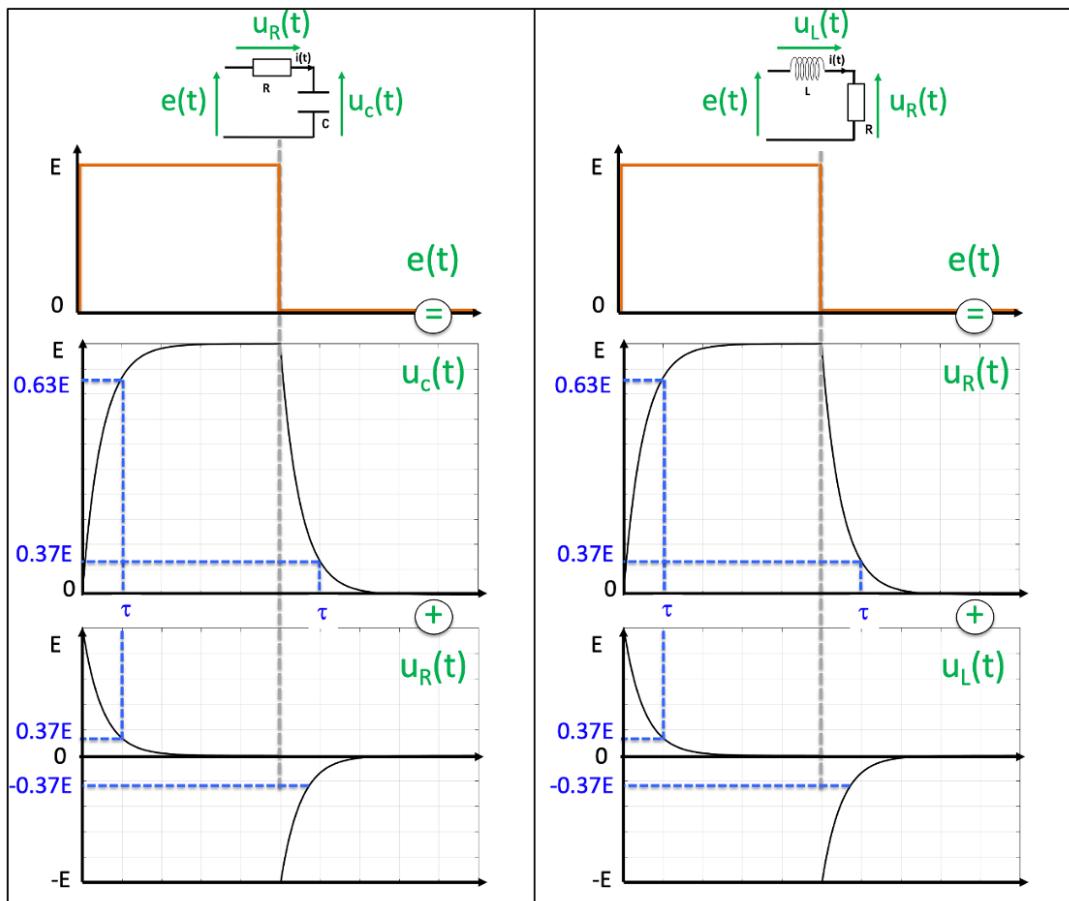


FIGURE 8.4 – synthèse de l'analyse d'un régime du premier ordre dans deux exemples, circuit RC et RL

### 8.1.8 Étude énergétique

Quelques rappels sur la définition de l'énergie :

	circuit RC	circuit RL
tension fournie par le générateur $e(t)$	$e(t) = Ri(t) + \frac{q}{C}$	$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$
Puissance instantanée fournie $P_f = UI$	$P_f = Ri^2(t) + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2C}$	$P_f = Ri^2(t) + \frac{dL i^2}{2dt}$
$E$ énergie emmagasinée entre 0 et $t_0$	$E_C = \int_0^{t_0} P_C dt$ $E_c = \int_0^{t_0} \frac{q^2}{2C}$ $E_c = \frac{1}{2}CE^2$	$E_L = \int_0^{t_0} P_C dt$ $E_L = \int_0^{t_0} \frac{dL i^2}{2dt}$ $E_L = \frac{1}{2}LI^2$
	énergie stockée dans C	énergie stockée dans L

## 8.2 Régime transitoire d'un système du second ordre, n=2

Dans cette partie nous nous intéresserons à des circuits mettant en jeu des mouvements oscillatoires. Ces systèmes oscillants répondent à des lois physiques qui sont les mêmes que le système soit électrique, mécanique, acoustique...

Pour illustrer ces concepts nous étudierons le circuit fondamental suivant: le circuit RLC série fig 8.5. Ce circuit permet d'étudier la charge et la décharge du condensateur au travers une bobine.

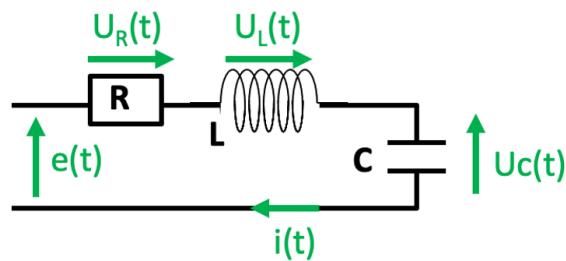


FIGURE 8.5 – circuit RLC série illustrant un circuit du second ordre en régime transitoire.  $e(t)$  représente le signal alimentant le circuit

L'évolution de la tension et du courant seront étudiées aux bornes des différents composants R, L et C en utilisant un générateur basse fréquence délivrant une tension dite créneau (comme dans les cas étudiés dans le chapitre précédent). On accédera ainsi au comportement du circuit dans les deux cas suivants:

1. la réponse indicielle lors d'un échelon positif de tension
2. le régime libre dans le cas où la tension du générateur est nulle

### 8.2.1 Réponse indicielle

La réponse indicielle correspond à la charge du condensateur à travers la bobine lorsqu'il est soumis à un échelon (une marche) de tension <sup>10</sup>. Nous allons regarder le comportement en courant et en tension aux bornes des trois composants en parallèle.

On peut commencer par appliquer la loi de maille

$$e(t) = E = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

À l'instant  $t$  où la tension passe de 0 à une valeur  $E$ , on peut considérer cette échelon comme un interrupteur ouvert, le courant circulant dans le circuit est nul.

**Condition initiale**, le condensateur est déchargé :  $u_C(t = 0) = 0$  l'inductance est parcourue par un courant nul, sa tension à ses bornes est donc nulle  $u_L(t = 0) = 0$ .

Pour des raisons de **continuités**:

- le courant varie sans discontinuité aux bornes de l' inductance
- la tension varie continûment aux bornes du condensateur

En retournant à l'équation de la loi de maille, on peut l'écrire de la façon suivante : <sup>11</sup>

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = \frac{E}{L}$$

En remplaçant  $q(t)$  par  $Cu_C(t)$ , on peut réécrire cette équation de la manière suivante:

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = \frac{E}{LC}$$

---

10. ici quand  $e(t)$  passe de 0 à  $E$

11. en se rappelant que:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} \\ u_R(t) &= Ri(t) \\ u_C(t) &= \frac{q(t)}{C} \\ u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

Ou en remplaçant  $q(t)$  par  $i(t)$ , on peut également réécrire cette équation de la manière suivante:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = 0$$

Finalement, cette équation peut encore s'écrire de différentes façons, en faisant intervenir  $u_L(t)$ <sup>12</sup> ou encore  $u_R(t)$ <sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_L(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{u_L(t)}{LC} q(t) &= 0 \\ \frac{d^2u_R(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{u_R(t)}{LC} &= 0 \end{aligned}$$

Quelque soit la variable mise en jeu, on reconnaît une équation du second ordre, avec ou sans second membre (ici  $\frac{E}{L}$ ).

Afin de simplifier la résolution de ces équations différentielles et de les mettre sous une forme canonique semblable à ce que vous avez vu ou verrez dans d'autres systèmes oscillants tels que les oscillateurs harmoniques en mécanique, nous allons introduire le concept de variables réduites. Pour faciliter la résolution de cette équation, on remplace les variables par des valeurs dites réduites, du même type:

$$(E) \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + X(t)\omega_0^2 = \omega_0^2 E \quad (8.1)$$

$$(E_0) \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + X(t)\omega_0^2 = 0 \quad (8.2)$$

— **La pulsation propre**  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , exprimée en  $rd.s^{-1}$ .

Elle caractérise la pulsation des oscillations en l'absence d'amortissement ou de pertes. Ces pertes sont dues à l'effet Joule dans la résistance.

— **Le facteur de qualité**  $Q$ <sup>14</sup>, inversement proportionnel au facteur d'amortissement  $m$  ou au coefficient d'amortissement  $\lambda$  sans dimension.

Ce paramètre est relié à la constante de temps du circuit.

12.  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$

13. en appliquant la loi d'Ohm  $u_R = R.i$

14. la capacité qu'à un circuit à amortir ou non un signal d'entrée

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$m = \frac{R}{2L}$$

$$\alpha = \frac{m}{\omega_0} = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Plus la résistance est élevée, plus le facteur de qualité est faible et le coefficient d'amortissement est grand.<sup>15</sup> Plus la résistance est faible, proche de 0, plus le facteur de qualité est élevé, le facteur d'amortissement faible, se rapprochant d'un circuit LC, L inductance pure.<sup>16</sup>

Enfin il est indispensable de connaître les **conditions initiales** du circuit, i.e. l'état du condensateur et sa tension aux bornes (chargé ou non).

Dans le cas présenté ici, à l'instant  $t = 0$  le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit:

$$u_C = 0$$

$$i_L = 0$$

Dans la mesure où il s'agit d'un système d'équation du 2<sup>d</sup> ordre, nous avons besoin de deux conditions initiales. Nous les trouverons dans les **conditions de continuités**:

— de tensions aux bornes du condensateur

$$U_C(t = 0) = U_C(t = 0 + \epsilon)$$

— de l'intensité du courant dans la bobine

$$i_L(t = 0) = i_L(t = 0 + \epsilon)$$

Maintenant le problème est bien posé et que toutes les éléments pour le résoudre sont à notre disposition, voyons comment procéder.

15. Vous pouvez imaginer un pendule oscillant dans du miel, liquide plus ou moins visqueux

16. Vous pouvez imaginer un pendule oscillant dans un milieu presque sans frottement, le pendule de Foucault dans l'air (oscillation pendant une petite dizaine d'heures)

### 8.2.2 Résolution de l'équation différentielle - solution générale

Reprendons l'équation à résoudre :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + X(t)\omega_0^2 = \omega_0^2 E \quad (8.3)$$

$\omega_0$  et  $Q$  sont des coefficients constants et  $\omega_0^2 E$  le second membre.

A cette équation nous associons l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + X(t)\omega_0^2 = 0 \quad (8.4)$$

On recherche  $x_g(t)$  la solution de l'équation homogène (8.4).

Les solutions dépendent du signe du discriminant de l'équation caractéristique.

La linéarité de l'équation permet d'appliquer des procédés de superposition de solutions, et d'exploiter des résultats d'algèbre linéaire.

La solution générale de  $x(t)$  est la somme de la solution  $x_g(t)$  de l'équation homogène (sans second membre) (8.4) et d'une solution particulière  $x_p(t)$  de l'équation avec second membre (8.3):

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

Du point de vue du physicien, une autre façon d'interpréter les choses est de dire que **la solution particulière** représente la façon dont le système étudié (ici le circuit RLC) réagit à un signal d'entrée spécifique (ici un échelon de tension), **la solution générale** représente la façon dont le système évolue, sans a priori sur les éléments extérieurs.

Il s'agit maintenant de:

1. **rechercher de la solution particulière**  $x_p(t)$ , ici sous la forme d'une constante
2. **rechercher les solutions générales**  $x_g(t)$  à l'équation sans second membre (8.4) - en déterminant au préalable les différents régimes de solution - apériodique, périodique et critique

Les différents régimes de solutions peuvent être définis à partir du discriminant  $\Delta$ <sup>17</sup> de l'équation du 2<sup>d</sup> ordre. Ils ne dépendent que des éléments du circuit (solution générales  $x_g(t)$ ), et pas du signal d'entrée.

### 1. Le régime apériodique $\Delta > 0$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2 - 1} > 0 \quad (8.5)$$

Dans le cas des circuits étudiés, on considérera un régime amorti, ce qui revient à un facteur de qualité Q faible ou encore une résistance élevée. Les deux solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{1}{\tau_{1,2}} \quad (8.6)$$

La solution de l'équation homogène sans second membre est donc:

$$U_{C_{ssm}}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (8.7)$$

La solution générale vérifiée par la tension aux bornes de la capacité est la somme de la solution sans second membre avec la solution particulière est donc:

$$U_C(t) = U_{C_{ssm}}(t) + U_{C_g}(t)U_C(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E \quad (8.8)$$

Les constantes  $A_1$  et  $A_2$  seront déterminées en utilisant les conditions initiales du circuit.

### 2. Le régime critique $\Delta = 0$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2 - 1} = 0 \quad (8.9)$$

Régime critique, avec l'amortissement le plus rapide. Une solution unique de l'équation caractéristique sont :

$$r = -\omega_0 \quad (8.10)$$

La solution de l'équation homogène sans second membre :

$$U_{C_{ssm}}(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \quad (8.11)$$

La solution générale vérifiée par la tension aux bornes de la capacité est la somme de la solution sans second membre avec la solution particulière :

---

17. équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , on définit  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$U_C(t) = U_{C_{ssm}}(t) + U_{Cg}(t) \quad (8.12)$$

$$U_{C_{ssm}}(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + E \quad (8.13)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  seront déterminées en utilisant les conditions initiales du circuit.

### 3. pseudo périodique $\Delta < 0$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2 - 1} < 0 \quad (8.14)$$

Régime pseudo périodique, est un régime faiblement amorti, ce qui revient à un facteur de qualité  $Q$  élevé ou encore une résistance faible. Les deux solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega \quad (8.15)$$

La figure 8.6 représente la réponse en tension (gauche) et en courant (droite) d'un circuit RLC série à un échelon de tension ( $e(t)$ ). Les différentes courbes représentent les trois cas discutés, bleu régime pseudo périodique, vert régime apériodique et rouge régime critique.

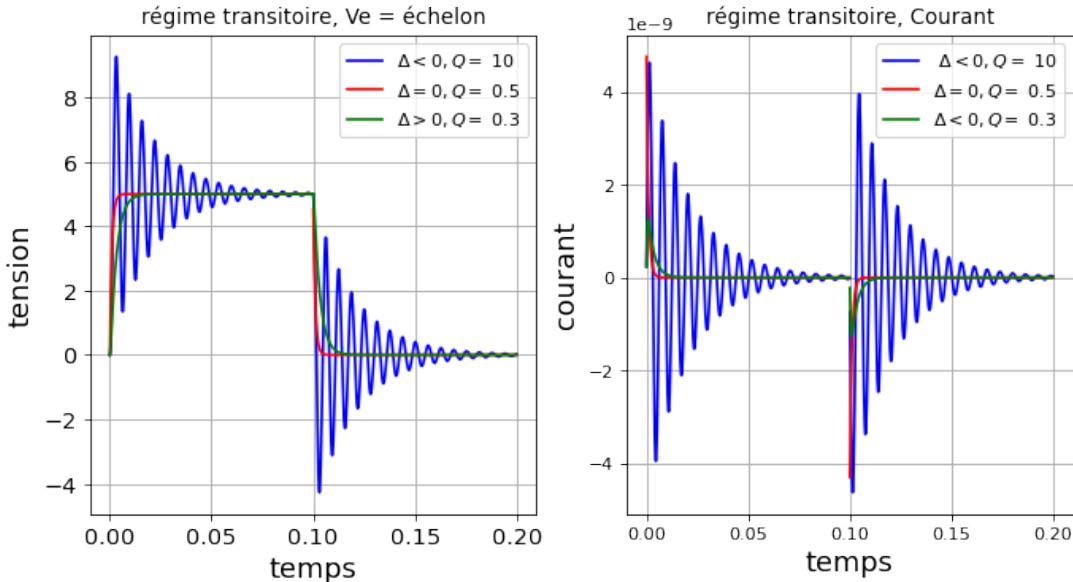


FIGURE 8.6 – synthèse de l'analyse d'un régime du second ordre dans un circuit RLC attaqué par un signal échelon, tension et courant aux bornes de C

La figure 8.7 représente la réponse en tension (gauche) et en courant (droite) d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale ( $e(t)$ ). Les différentes courbes représentent les trois cas discutés, bleu régime amorti, vert régime critique et rouge régime pseudo périodique.

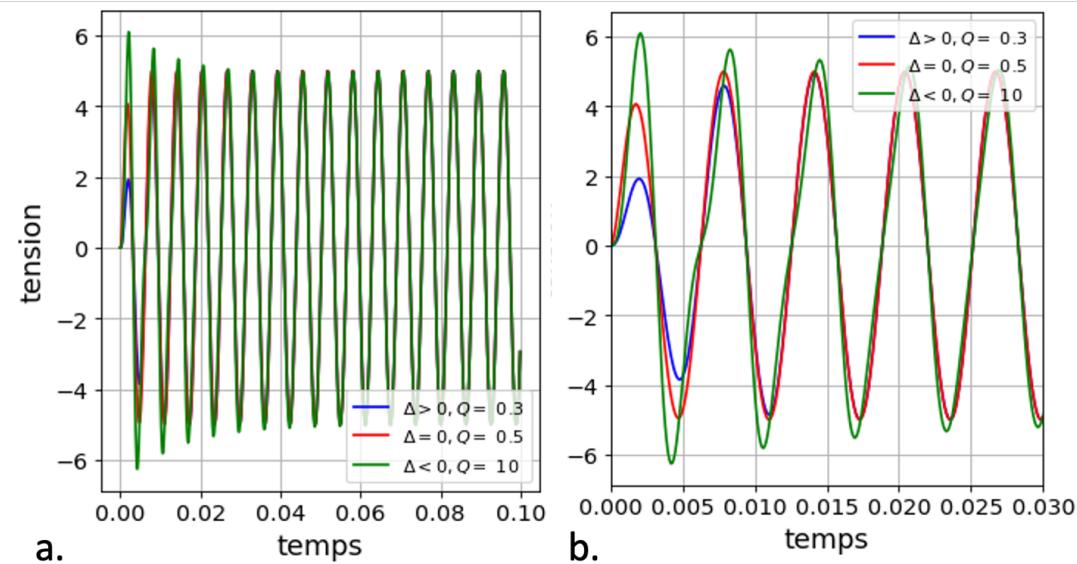


FIGURE 8.7 – synthèse de l'analyse d'un régime du second ordre dans un circuit RLC attaqué par un signal sinusoïdale, tension (a et b, zoom) aux bornes de C

On se rend compte que le régime permanent est atteint plus ou moins rapidement en fonction des caractéristiques du circuit (en particulier sa résistance).

# Chapitre 9

## À retenir

### 9.1 Régime transitoire

On introduit un signal  $s(t)$  variable dans le temps qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$s(t) = s_T(t) + s_P(t)$$

- $s_T(t)$  est la **réponse transitoire**, qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.
- $s_P(t)$  est la **réponse permanente**, composée de termes qui peuvent être des **fonctions constantes ou sinusoïdales d'amplitude constante**.

La réponse transitoire est composée de l'ensemble de tous les termes transitoires contenus dans la réponse. En général on admet que la réponse transitoire est éteinte à partir de l'instant  $t_0$  si pour  $t >> t_0$ ,  $s_T(t)$  est négligeable devant  $s_P(t)$ .

On appellera :

- **régime transitoire** le mode de fonctionnement du système pendant le temps où la réponse transitoire n'est pas éteinte i.e.  $s(t) = s_T(t) + s_P(t)$
- **régime permanent** le mode de fonctionnement du système quand seule subsiste la réponse permanente  $s(t) = s_P(t)$

### 9.1.1 Régime transitoire du 1<sup>er</sup>

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et avec second membre du type

$$\tau \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e(t) = E$$

1. On commence par résoudre l'équation différentielle du premier ordre **sans** second membre, i.e :

$$\tau \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

en cherchant une solution  $u_c(t)$  de la forme  $u(t) = Ae^{\lambda t}$ <sup>1</sup> avec  $A$  une constante et  $\lambda$  un réel.

En injectant cette solution dans l'équation différentielle, nous obtenons:

$$\tau\lambda Ae^{\lambda t} + Ae^{\lambda t} = 0$$

Et après simplification

$$\tau\lambda + 1 = 0$$

La solution  $\lambda$  de l'équation caractéristique est  $\lambda = -\frac{1}{\tau}$  et la solution de l'équation différentielle sans second membre est de la forme :

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. On cherche maintenant la solution particulière **avec** second membre. Cette solution sera cherchée sous la forme d'une constante  $K$ .

$$\begin{aligned} \tau \frac{dK}{dt} + K &= E \\ \text{or } \frac{dK}{dt} &= 0 \\ K &= E \end{aligned}$$

---

1. une fonction qui dérivée égale elle même à une constante près

3. La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est égale à la somme des solutions sans second membre et particulière.

$$u_c(t) = u(t) + K$$

$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

4. La constante A est déterminée grâce aux conditions initiales (au moment du changement d'état). Attention on détermine la valeur de A en dernier lieu, une fois la solution complète obtenue. Dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, une seule condition suffit.

**Determination des conditions initiales** La détermination des conditions initiales pose parfois problème, pour la trouver on peut se rappeler qu'il y a :

- continuité de la tension aux bornes du condensateur
- continuité du courant qui traverse une bobine

### 9.1.2 Régime transitoire du 2<sup>d</sup> ordre

Reprendons le cas d'une équation homogène. Elles sont de la forme  $u'' + au' + bu = 0$  où a et b réels ou complexes (ici ils dépendent de R, L et C).

Nous allons chercher des solutions sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que  $f(t) = e^{\lambda t}$ . Une telle fonction sera solution de l'équation différentielle si et seulement si  $\lambda$  est solution de :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle.

Dans les cas discutés ici, les coefficients sont des réels. Les solutions sont cherchées parmi les fonctions à valeurs réelles. Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique.

signe de $\Delta$	solutions	solution générale $u_g(t)$
$\Delta > 0$	deux solutions réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$	$u_g(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	une solution double $\lambda$	$u_g(t) = (At + B)e^{\lambda t}$
$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées distinctes, $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$

où A et B, q et r sont des réels quelconques.

Lorsque l'équation différentielle possède un second membre (d est une fonction non nulle), il reste possible d'exploiter ce qui précède. Reprenons l'équation avec un terme  $dd0$

$$u(t) = qe^{\alpha t} \cos(\beta t + r)$$

L'équation obtenue en remplaçant d par la fonction nulle est résolue. Il suffit alors de trouver une solution  $u_0$  de l'équation avec second membre d, pour les connaître toutes. En effet, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions  $u_0 + g$  où g est une solution générale de l'équation homogène associée.

Si le second membre d est la somme de deux fonctions  $d_1$  et  $d_2$  :

$$u'' + au' + bu = d_1 + d_2$$

on peut chercher une solution particulière  $s_1$  de l'équation différentielle de second membre  $d_1$  :

$$u'' + au' + bu = d_1$$

puis une solution particulière  $s_2$  de l'équation différentielle de second membre  $d_2$  :

$$u'' + au' + bu = d_2$$

La somme  $s = s_1 + s_2$  de ces deux solutions particulières est solution particulière de l'équation de départ. Ce principe se généralise facilement au cas où d est la somme de plus de deux fonctions.

## Chapitre 10

# Représentation des Signaux et Outils Mathématiques

### 10.1 Décomposition d'un signal périodique

Dans la cas d'un signal périodique, il faut garder en tête que :

- $\exists T$  tel que  $X(t) = X(t + T)$ ,  $T$  est la période temporelle ( [T] en seconde)
- $f = \frac{1}{T}$  est la fréquence ou inverse du temps ( $[T^{-1}]$  en Hz)
- $\omega = 2\pi f$  est la pulsation ( $[\text{rad}][T^{-1}]$  en  $\text{radian} \cdot s^{-1}$ )

Dans ce cas, la fonction sinus (ou cosinus, finalement elles sont identiques à  $\frac{\pi}{2}$  près ) a la côte !!! En effet, tout signal périodique de fréquence  $f_0$  et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence  $f_0$  (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de  $f_0$  (harmonique)(cf fig.10.1) avec des amplitudes et des phases appropriées.

Démonstration par l'exemple, construction d'un signal carré à l'aide de la somme de sinus harmonique impaire (cf figure 10.2).

$$S = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega t)$$

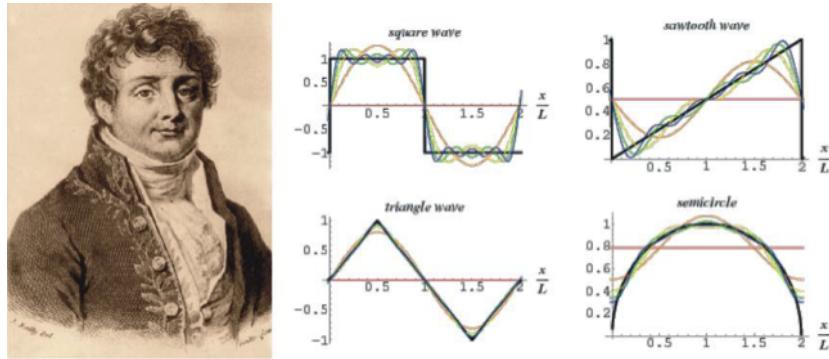


FIGURE 10.1 – Mr Fourier et sa célèbre série

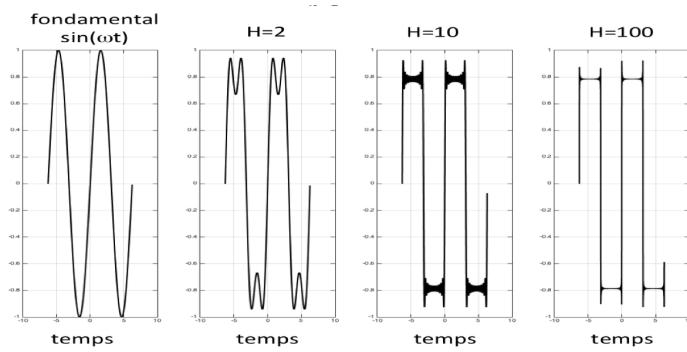


FIGURE 10.2 – constitution d'un signal créneau à partir d'une série de Fourier (somme de sin et cos)

*N.B. :* Attention, dans la suite, il m'arrivera peut être de parler indifféremment de fréquence et de pulsation. Il ne faut pas que cela vous déstabilise, il s'agit, en première approximation, de la même information à un facteur  $2\pi$  près.

## 10.2 Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Dans le cas du signal sinusoïdal,  $X(t) = S_{max} \sin(\omega t + \phi_0)$ . L'amplitude du signal,  $S_{max}$ , a la même unité que le signal (en volt ou en ampère la plupart du temps ici).

- La phase  $(\omega t + \phi_0)$ , en radian
- La phase instantanée, ou à l'instant  $t$ ,  $(\omega t)$ , en radian
- La phase à l'origine des temps, ou phase initiale,  $\phi_0$  en radian. Elle est définie modulo  $2\pi$ .

Deux signaux sinusoïdaux, de même fréquence (cf fig 10.3), sont dits synchrones ou de la même couleur. S'ils ont des fréquences différentes ils seront dits asynchrones.

$$S(t) = S_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

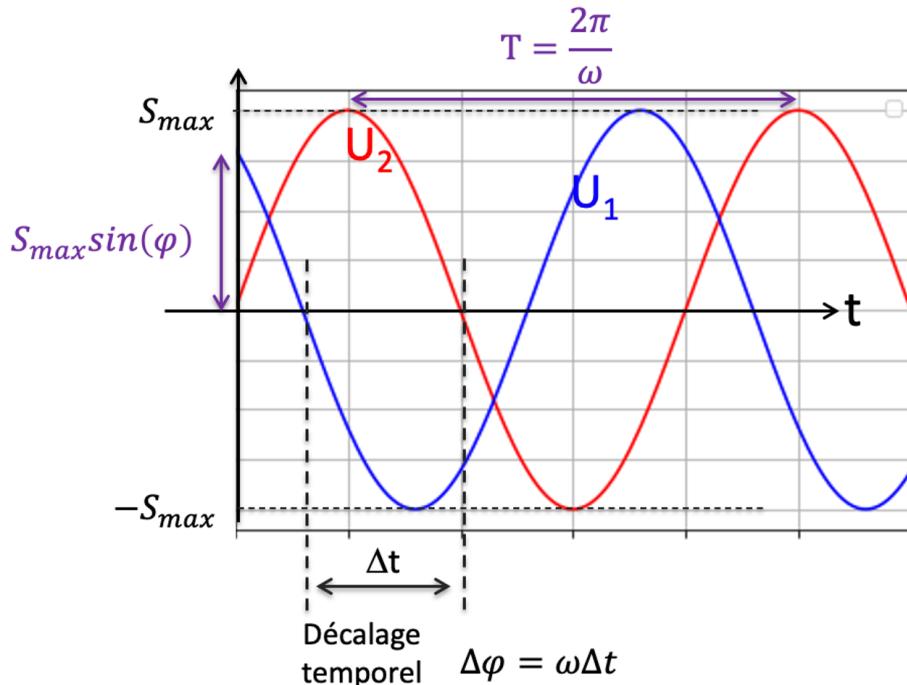


FIGURE 10.3 – signal sinusoïdal dont la phase à l'origine est 0 (rouge) ou non (bleu). A l'instant  $t = 0$ ,  $U_1(t) = S_{max} \sin(\phi)$  et  $U_2(t) = 0$ . On nomme  $\Delta\phi$  le déphasage des deux signaux l'un par rapport à l'autre.  $U_1(t)$  est en avance sur  $U_2(t)$ , ou encore  $U_2(t)$  est en retard sur  $U_1(t)$ .  $\Delta\phi = \omega\Delta t$

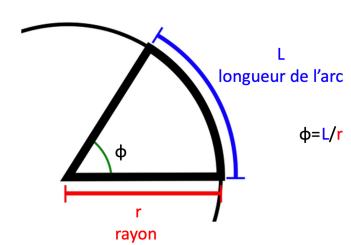


FIGURE 10.4 – Définition du radian

### 10.2.1 La Phase

Lorsqu'on étudie en temps réel deux signaux sinusoïdaux synchrones, le déphasage qui existe entre ces deux signaux donne une information importante ; par exemple un retard ou une avance prise par un des deux signal par rapport à l'autre.

Vous apprendrez plus tard, à manipuler la transformée de Fourier<sup>1</sup>, incroyable outil mathématique qui permet de se promener de l'espace des temps à l'espace des fréquences, et inversement .... et de voir la phase autrement.

La relation pulsation/phase ou fréquence/phase est :

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \text{ et } f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

Je vais vous présenter quelques outils pour mesurer cette phase. Cela pourra vous paraître superflu, mais il me semble bon de rappeler certaines notions dont l'oubli est à l'origine d'erreurs importantes (et nombreuses) dans les applications en électronique (et pas que). Bref, la phase peut être représentée de trois façons : en degrés, en radians ou en relatif par rapport à une période (nous ne nous intéresserons qu'aux deux premières représentations)<sup>2</sup>.

— **le degrés :**

c'est un unité de mesure angulaire qui divise un cercle en 360 arcs identiques. L'origine de la mesure de la phase est toujours située au même endroit, mais ses valeurs numériques peuvent s'étendre de [0 à 360].

— **le radians (rad) :**

C'est une mesure angulaire indirecte car elle définit un angle sous la forme d'un rapport de la longueur de l'arc de cercle déterminé par cet angle sur le rayon du cercle (cf fig.

1. pour les musiciens, et les autres, vous pouvez penser à une corde de guitare, qu'on peut regarder vibrer dans le temps, et dont on entend une fréquence pure

2.  $\sin(\omega \cdot (t + T)) = \sin(\omega \cdot t + 2\pi)$  car  $\omega \cdot T = 2\pi$  représente un tour

10.4). Les valeurs prises sont comprises :  $[-\pi \text{ à } \pi]$  Le radian est donc une grandeur sans dimension.

Le passage de radians en degrés et réciproquement se fait de la manière suivante :

$$\phi(\text{degrés}) = \frac{360}{2\pi} \phi(\text{rad})$$

ou

$$\phi(\text{rad}) = \frac{2\pi}{360} \phi(\text{degrés})$$

Je reviens donc à la phase...

Dans le schéma de la figure 10.3,  $U_1(t)$  est en avance sur  $U_2(t)$  car  $U_1(t)$  atteint son maximum avant le signal  $U_2(t)$ .

Le déphasage de  $U_1(t)$  par rapport à  $U_2(t)$  s'écrit :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

Cas particuliers :

- $\phi = 0$ ,  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  sont en phases
- $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  sont en quadrature (ex : sin et cos)
- $\phi = \pi$ ,  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  sont en opposition de phase

### 10.2.2 La valeur moyenne

Une caractéristique importante de la valeur d'un signal, en particulier quand il est sinusoïdal, est sa *valeur moyenne*.

Un courant  $i(t)$  sinusoïdal transporte pendant un temps  $t_1$  la même quantité d'électricité qu'un courant constant de valeur moyenne  $\langle i(t) \rangle_{t_1}$  définit comme<sup>3</sup> :

$$\langle i(t) \rangle_{t_1} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} i(t) dt$$

Pour un signal périodique de période  $T$ , ce temps  $t_1$  est généralement la période  $T$ . La valeur moyenne d'un signal est égale à sa composante continue, qui se mesure avec un multimètre en

3. petit rappel : l'intégrale de  $x(t)$  est l'aire sous la courbe  $x(t)$

position DC (Direct Current).

Afin de faire le point sur ces deux configurations, que nous retrouverons avec l'utilisation des multimètres numériques et des oscilloscopes, DC pour Direct current - tout le signal (continu / variable) est mesuré, AC pour Alternative current - seule la composante alternative est mesurée, le continu est filtré, et pour les blagueurs, vous pouvez penser à AC/DC (cf fig 10.5).

$$u_{AC}(t) = 3 \cdot \sin(3\omega t) \text{ et } \langle u(t)_{AC} \rangle = 0$$

en revanche

$$u_{DC}(t) = 2 + 3 \cdot \sin(3\omega t) \text{ et } \langle u_{DC}(t) \rangle = 2$$

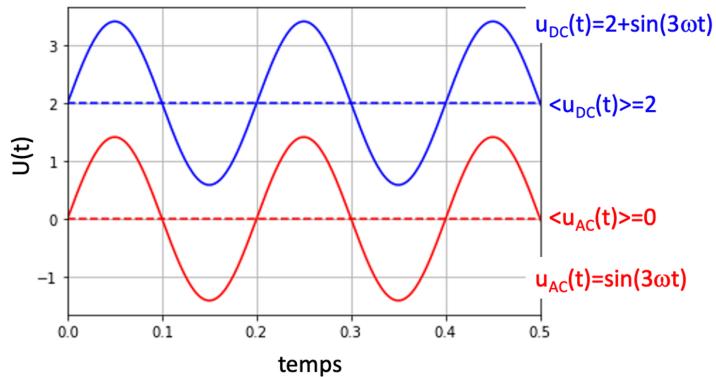


FIGURE 10.5 – Représentation en mode AC et en mode DC de  $u(t) = 2 + 3 \cdot \sin(3\omega t)$

*N.B. :* la valeur moyenne de  $U_{AC}(t)$  est *nulle* sur une période<sup>4</sup>. Si le signal comporte une composante continue en plus de sa composante sinusoïdale,  $\langle U_{DC} \rangle$  sera non nulle.

*N.B. 2 :* on remarque que la valeur moyenne sur une période ne dépend pas du temps.

### 10.2.3 La valeur efficace

La valeur efficace d'un signal est liée à l'énergie apportée au circuit pendant une période (cf fig. 10.6).

4. petit rappel : l'intégrale sur une période d'une fonction sinus ou cosinus est nulle

Elle est définie mathématiquement par :

$$X_{eff}^2 = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)^2 dt$$

La *tension efficace*  $U_{eff}$  et le *courant efficace*  $I_{eff}$  sont égales à la tension et à l'intensité du courant continu qui, passant pendant le même temps ( $t_1$ ), dans une résistance  $R$ , y dissipe la même quantité de chaleur.

La figure 10.6 représente 3 sources de signaux de variation temporelle différente (continue, sinusoïdale et rectangulaire) ayant la même tension efficace et dissipant la même puissance dans une résistance  $R$ .

*N.B. :* Pour une grandeur sinusoïdale, n'importe quel voltmètre en position AC donne la valeur efficace.

Conclusion, dans l'espace temporel, différents signaux peuvent avoir la même valeur efficace.

*N.B. 2 :* Dans le cas particulier du signal sinusoïdal,  $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ .

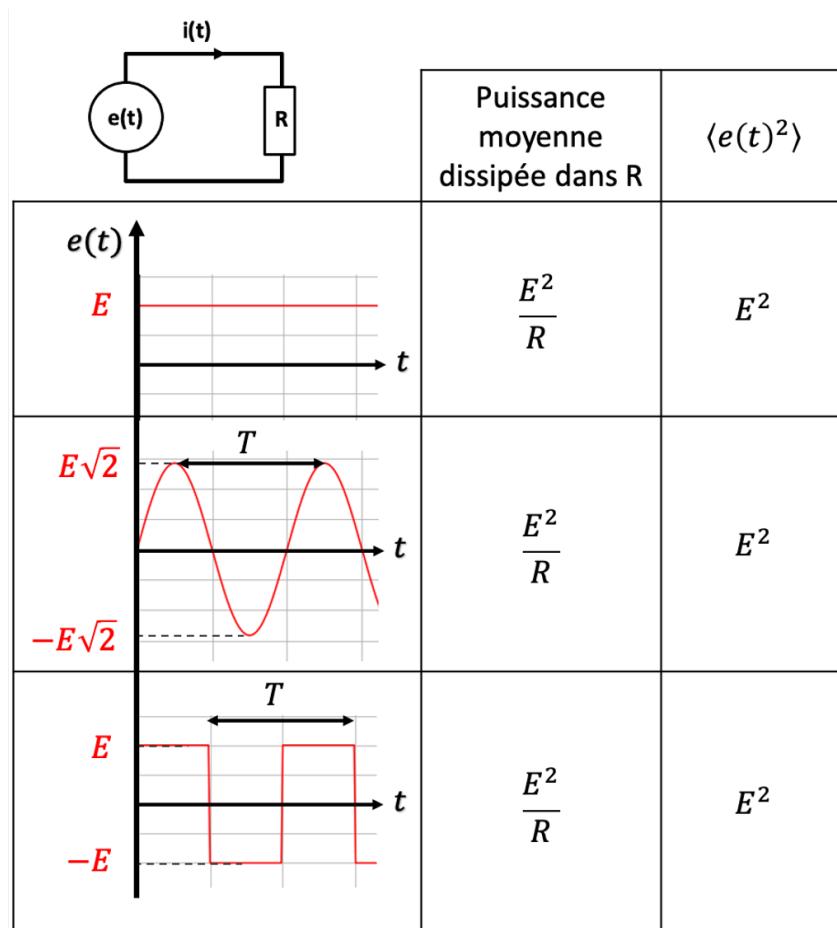


FIGURE 10.6 – Les 3 sources, sinusoïdale, rectangle et continue, ont même valeur efficace car elles produisent la même puissance dans la charge R

### 10.3 De l'importance des nombres complexes en physique

Jusqu'à présent, notre développement a été entièrement réalisé avec des variables mathématiques réelles (par opposition à des variables mathématiques complexes). Bien que les variables réelles suffisent à expliquer tous les phénomènes dont nous voulons parler, de nombreux concepts physiques sont exprimés en notation complexe pour deux excellentes raisons. Premièrement, comme nous l'avons vu précédemment, l'analyse de signaux périodiques compliqués est basée sur les fonctions sinusoïdales,  $\cos(\omega t)$  et  $\sin(\omega t)$ . Malheureusement, la dérivée temporelle de  $\cos(\omega t)$  est  $-\omega \sin(\omega t)$  et de  $\sin(\omega t)$  est  $\omega \cos(\omega t)$ . L'algèbre pour des problèmes tels que l'oscillateur harmonique entraîné, amorti (masse amortie sur un ressort) implique des dérivées temporelles et se développe donc rapidement pendant les calculs. Toutefois, la fonction complexe,

$$e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j \cdot \sin(\omega t)$$

a la propriété très utile que sa première dérivée est simplement  $\pm j\omega e^{\pm j\omega t}$ , de sorte que la première dérivée et la fonction elle-même diffèrent seulement par une constante. Par conséquent, il est souvent plus facile de résoudre un problème mathématiquement réel en remplaçant  $\cos(\omega t)$  par  $\exp(j\omega t)$  dans les calculs, puis en jetant la partie mathématiquement imaginaire lorsque le calcul est terminé<sup>5</sup> !

La deuxième raison pour laquelle les variables complexes sont utiles est qu'elles fournissent un moyen pratique et automatique de séparer deux parties physiquement distinctes d'un problème comme les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe. Les nombres complexes ont donc la même fonction que deux axes perpendiculaires pour maintenir deux composantes d'un vecteur séparées dans la géométrie plane.

En fait, on se sert du fait que  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$  pour simplifier les écritures. En effet, si l'on doit écrire qu'un paramètre vaut  $r \cos(\theta)$ , il faut deux réels,  $r$  et  $\theta$ . Mais avec des complexes, il suffit d'un seul nombre, ce qui est bien plus simple.

#### 10.3.1 Les nombres complexes

Au signal sinusoïdal  $s(t) = s_m \sin(\omega t + \phi)$ , on associe donc le signal complexe :

---

5. L'approche consistant à remplacer  $\sin(\omega t)$  par  $\exp(j\omega t)$  dans les calculs, puis jeter la partie mathématiquement réelle lorsque le calcul est terminé est tout aussi valable

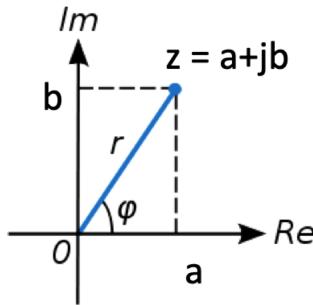


FIGURE 10.7 – Représentation graphique du complexe  $x + iy = re^{i\phi}$  à l'aide d'un vecteur. Mise en évidence de l'interprétation graphique de son module  $r = |z|$  et d'un de son argument  $\phi$

$$\underline{s(t)} = s_m \cdot e^{j\omega t + \phi} = \underline{s_m} e^{j\omega t}$$

avec

$$\underline{s_m} = s_m e^{j\phi}$$

Première chose que vous pouvez remarquer :

$$s(t) = \underline{Im(s(t))}$$

On peut se retrouver dans le cas où  $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$  et dans ce cas  $s(t) = \underline{Re(s(t))}$

— en notation cartésienne :

$$\underline{z} = a + jb$$

a la partie Réelle de  $\underline{z}$

b la partie Imaginaire de  $\underline{z}$

avec

— en notation polaire :

$$\underline{z} = re^{j\phi} = (\cos \phi + j \cdot \sin \phi) \underline{z} = |\underline{z}| e^{j\phi}$$

le module de  $\underline{z}$  :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$   
 l'argument  $\phi$  de  $|\underline{z}|$ , noté  $\arg(\underline{z}) = \phi$ <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{b}{a} \\ \cos(\phi) &= \frac{a}{|\underline{z}|} \\ \sin(\phi) &= \frac{b}{|\underline{z}|} \end{aligned}$$

*N.B. :* Tous ce que vous avez toujours voulu savoir sur  $j$ ....(sans jamais avoir osé le demander : )

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ \text{et} \\ j &= e^{j\frac{\pi}{2}[2\pi]} \end{aligned}$$

et bien c'est tout...

En mathématiques on utilisera la lettre  $i$  pour signifier un nombre imaginaire. Mais on comprendra bien qu'ici, où  $i$  incarne le courant, nous ne pouvions pas en plus lui demander de représenter la partie imaginaire d'un nombre (le pauvre serait devenu schizophrène....)

*N.B. 2 :* un cosinus est un sinus déphasé de  $\frac{\pi}{2}$ , ou de  $-\frac{\pi}{2}$ , i.e. retardé ou avancé d'une phase de  $\pm\frac{\pi}{2}$ .

$$\cos \phi = \sin(\phi + \frac{\pi}{2})$$

*N.B. 3 :*

— si  $\phi = 0[\pi]$  alors  $\underline{z}$  est réel pur

---

6.  $\tan(\phi) = \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}$

- si  $\phi = +\frac{\pi}{2}[\pi]$  alors  $\underline{z}$  est imaginaire pur ( $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ )

*N.B.* 4 : :

$$|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| |\underline{z}_2| \quad (10.1)$$

$$\left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \quad (10.2)$$

$$\arg(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) \quad (10.3)$$

$$\arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2) \quad (10.4)$$

Cas particulier de la dérivation ou de l'intégration :

On considère le signal  $s(t) = s_m \cos(\omega t + \phi)$  auquel on associe le signal  $\underline{s}(t) = \underline{s}_m \cdot e^{j\omega t}$

- Si on dérive  $s(t)$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{ds_m \cdot e^{j\omega t}}{dt} = \underline{s}_m \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} = j\omega \underline{s}(t)$$

Dériver un signal complexe revient à le multiplier par  $j\omega = e^{j\frac{\pi}{2}}\omega$ , où encore le déphaser de  $\frac{\pi}{2}\omega$  car  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

- Si on intègre  $s(t)$

$$\int \underline{s}(t) dt = \int \underline{s}_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s}(t)$$

Intégrer un signal complexe revient à le multiplier par  $\frac{1}{j\omega} = e^{-j\frac{\pi}{2}}\omega$ , où encore le déphaser de  $\frac{\pi}{2}\omega$  car  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

## 10.4 Impédance complexe - caractéristiques des dipôles passifs

Maintenant que les notions de complexes sont introduites, ainsi que celles liées au régimes variables, regardons quelles sont les répercussions sur les dipôles passifs vus précédemment.

On considère que :

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot e^{j\omega t} \\ i(t) &= I_0 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

En régime sinusoïdal il existe également une relation entre la tension complexe et l'intensité complexe : la loi d'Ohm.

$$\underline{u(t)} = \underline{Z} \underline{i(t)}$$

Où  $Z$  est appelée l'impédance (complexe).

$$Z(j\omega) = R + jX(\omega)$$

Où  $R$  et  $X$  sont des grandeurs réelles, appelées respectivement résistance ( $R$ ) et réactance ( $X$ ). La réactance est une mesure de l'opposition d'un circuit à un changement de courant. Et contrairement à la résistance, la réactance dépend de la fréquence de travail.

$Z$ ,  $R$  et  $X$  sont toutes trois exprimées en ohm.

*N.B. :* : Les trois effets fondamentaux en électrotechnique sont présentés : les effets **résistif**, **capacitif** et **auto inductif**. Ils sont mis en relations avec leur formulation mathématique. On aborde aussi l'analogie avec les équations de la mécanique où l'on voit que la résistance correspond à la formulation de la dissipation thermique d'énergie, la capacité le stockage d'énergie potentielle et l'inductance le stockage d'énergie sous forme cinétique, la loi des mailles correspondant à une des lois de Newton.

#### 10.4.1 Résistance

Il convient de noter que la dissipation d'énergie en forme thermique est un phénomène général en physique, phénomène décrit par la thermodynamique. En électricité, si on place une tension aux bornes d'un conducteur, il advient un courant. La dissipation d'énergie se manifeste par un échauffement et une chute de potentiel le long du conducteur ; il y a conversion d'énergie électrostatique ( contenue dans le générateur par exemple) en énergie thermique (échauffement par effet Joules).

Lorsqu'on branche un conducteur à une tension donnée, il résulte un courant, dont l'intensité dépend de la résistance du conducteur à son passage. La loi d'Ohm continue d'exprimer que certains matériaux ont un comportement linéaire qui peut se mettre sous la forme suivant :

$$\underline{u}(t) = Z_R \underline{i}(t) \text{ avec } Z_R = R$$

### 10.4.2 Bobine ou inductance

Selon le théorème d'Ampère, tout courant parcourant un circuit crée un champ magnétique à travers la section qu'il entoure, c'est le phénomène d'induction électromagnétique. L'inductance de ce circuit est le quotient du flux de ce champ magnétique par l'intensité du courant traversant le circuit. L'unité SI de l'inductance est le henry (H), nom donné en l'honneur du physicien Joseph Henry. En toute rigueur ce terme n'a d'intérêt que pour les situations dans lesquelles le flux est — ou peut être considéré comme — proportionnel au courant. On définit l'inductance  $L$  d'une boucle ou d'un solénoïde comme la constante de proportionnalité entre la force électromotrice et le taux de changement de courant  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ . Cela signifie qu'une inductance a pour effet de freiner les variations du courant.

Regardons le comportement d'une inductance pure  $L$  connectée à une source de tension variable  $E$ , de pulsation  $\omega$  (cf fig. 10.8, schéma de gauche). La différence de potentiel aux bornes de l'inductance, qu'on notera  $v_L$  est donc proportionnelle au taux  $\frac{di(t)}{dt}$ .

Lorsque la tension aux bornes de l'inductance est maximale, le courant est nul : c'est que la force électromotrice induite, étant de sens inverse, annule complètement la tension fournie par la source (cf fig. 10.9). Notons que la tension est soit positive soit négative suivant que le courant est croissant ou décroissant. De même la force électromotrice aux bornes de l'inductance est nulle lorsque le taux de variation du courant dans le circuit est nul. Ceci se produit lorsque l'amplitude du courant est maximale. La tension précède le courant d'un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .

D'un point de vue courant/tension, la figure 10.9 représente le déphasage entre le courant et la tension introduite par la bobine. On considère que la bobine stocke de l'énergie magnétique, relative au courant. La bobine est l'élément technologique correspondant à l'inductance  $L$ .

La relation courant/tension aux bornes d'une bobine s'exprime via la grandeur  $Z_L$ , impédance de la bobine. Nous allons montrer comment la relier à la grandeur  $L$ .

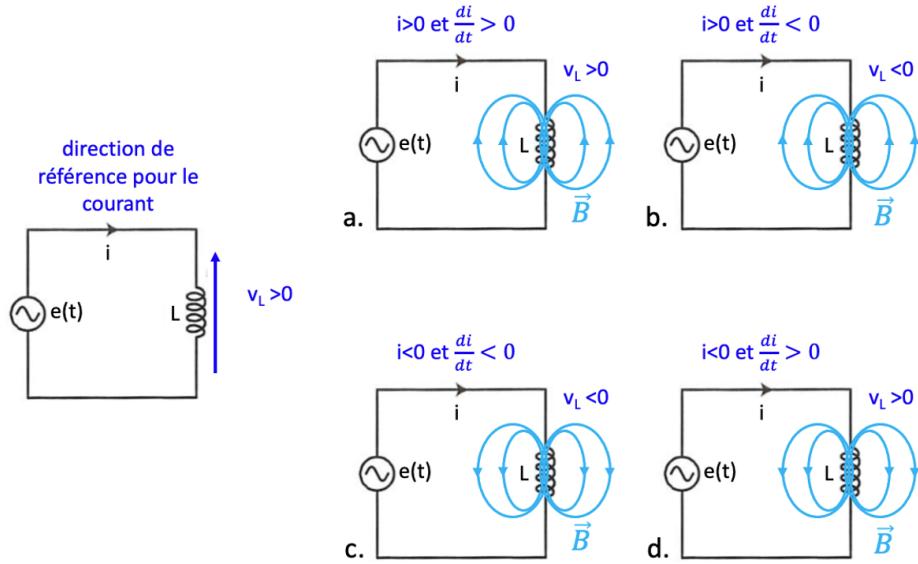


FIGURE 10.8 – courant et champ magnétique oscillant au travers d'une inductance

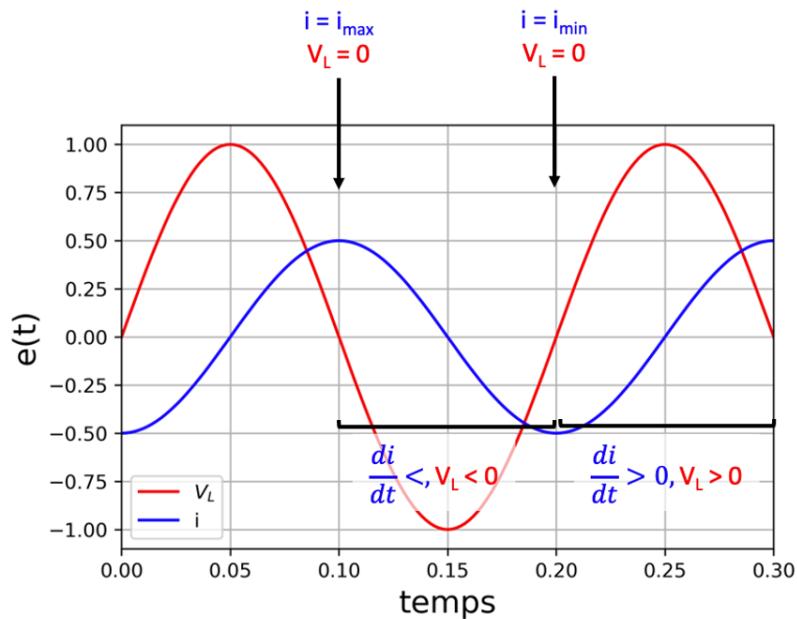


FIGURE 10.9 – déphasage courant/tension introduit par la présence de la bobine

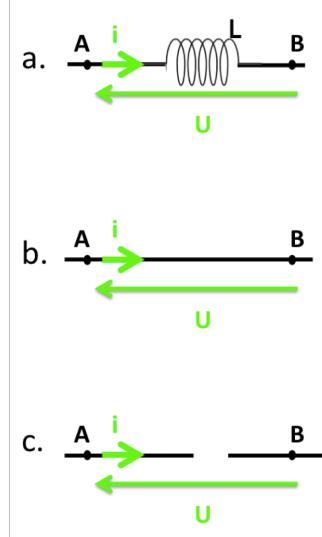


FIGURE 10.10 – a. Représentation d'une inductance, b. dans le cas des basses fréquences  $\omega \rightarrow 0$ , c. et des hautes fréquences  $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \underline{u(t)} &= U_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i(t)} &= I_0 \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

comme

$$\underline{u(t)} = L \frac{di}{dt}$$

donc

$$\underline{u(t)} = L \cdot j\omega I_0 \cdot e^{j\omega}$$

or

$$\underline{u(t)} = Z_L \cdot i(t)$$

d'où

$$Z_L = jL\omega$$

L'impédance d'une bobine<sup>7</sup> est un imaginaire pur, donc une réactance pure. A une fréquence donnée, son effet sera de déphaser de  $\frac{\pi}{2}$  la tension à ses bornes par rapport au courant qui circule dedans. On dit "vulgairement" que  $u(t)$  est en avance sur  $i(t)$ .

7. L'unité d'une inductance, notée  $L$ , est le Henry, noté  $H$ .  $[H] = [V][T][A]^{-1}$ . L'impédance de la bobine,  $Z_L$  quant à elle est homogène à  $[H]rad[T]^{-1}$

*N.B. :* quand  $\omega \rightarrow 0$  alors  $Z_L \rightarrow 0$  dans ce cas, l'inductance peut être considéré comme un fil (10.10).

*N.B. 2 :* quand  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $Z_L \rightarrow \infty$  dans ce cas, l'inductance peut être considéré comme un interrupteur ouvert (10.10).

*N.B. 3 :* La valeur de  $Z_L$  n'a de sens qu'à une fréquence donnée. Par exemple, dans le cas d'une bobine idéale d'inductance  $L = 50 \mu\text{H}$ . On aura alors les valeurs  $Z_L$  suivantes (cf tableau suivant)

fréquence	L	$Z_L$
50 Hz	50 $\mu\text{H}$	15,7 m $\Omega$
50 kHz	50 $\mu\text{H}$	15,7 $\Omega$
50 MHz	50 $\mu\text{H}$	15,7 k $\Omega$

#### 10.4.3 Condensateur ou capacité :

Cet effet correspond au troisième phénomène très important. Lorsqu'on applique une différence de potentiel à deux conducteurs isolés les uns des autres, on assiste à une accumulation de charges par influence électrostatique. C'est cela l'effet capacitif. Il peut être ardemment recherché et dans ce cas on fabrique des condensateurs précis ou de grande capacité. Très souvent, l'effet capacitif est présent à titre parasitaire comme par exemple lors d'accumulation de charges entre deux lignes conductrices. Dans ce cas, on cherche à minimiser ses effets sur le temps de réponse de la ligne.

C'est la façon dont circule le courant dans un condensateur quand on applique une tension alternative. Si on appliquait une tension continue, il circulerait un courant seulement durant la charge du condensateur, après quoi le courant serait nul. On peut donc dire qu'un condensateur " bloque" complètement les charges.

Analysons ce qui se passe dans un circuit composé d'une source et d'un condensateur (cf fig. 10.11, figure de gauche). La tension appliquée a la forme :  $v_C = E \sin(\omega t)$  Supposons qu'on applique la tension à  $t = 0$ . Durant le premier demi-cycle un courant circule dans le sens positif (celui de la convention) et un des côtés du condensateur devient positif (fig. 10.11.a). L'autre côté devient nécessairement négatif.

Durant le second demi-cycle, les courants sont inversés. Si on considère un point quelconque du circuit, il y est passé un courant dans un sens durant le premier cycle et un courant dans

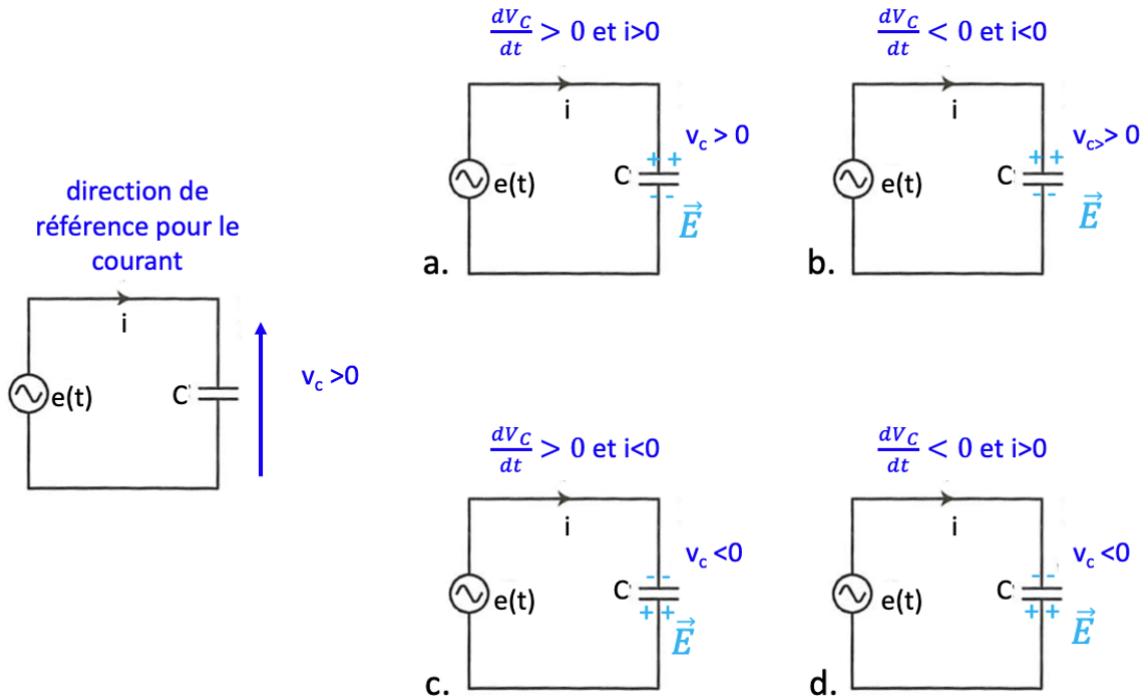


FIGURE 10.11 – Charge et décharge d'un condensateur

l'autre sens durant le second cycle. Ceci s'est fait même si aucune charge réelle n'a traversé le condensateur.

Contrairement à ce que nous avons trouvé pour le circuit contenant une résistance, et de la même manière que pour l'inductance, le courant et la tension ne sont pas en phase dans un circuit contenant un condensateur.

D'un point de vue courant/tension, la figure (fig. 10.12) représente le déphasage entre le courant et la tension introduite par la capacité. On considère que la capacité stocke de l'énergie électrique, relative à la différence de potentiel électrique.

On montre ceci de la façon suivante : on est au point initiale de la courbe de la tension  $V_C = 0$ . À ce moment, il n'y a aucune charge sur le condensateur et les charges peuvent se déplacer « librement », le courant prend alors sa valeur maximale. À mesure que la tension augmente, la charge sur le condensateur augmente aussi et le courant diminue proportionnellement à cause des charges déjà en place qui repoussent celles qui veulent y venir. Quand la tension est maximale, le condensateur est complètement chargé et le courant devient nul. Quand la tension décroît, le courant devient négatif, c'est à dire change de sens. On voit que le courant et la tension ne « marchent » pas ensemble ; quand l'un est maximum, l'autre est nul et réciproquement, on dit que le courant n'est pas en phase avec la tension. D'après la figure, l'angle de phase entre ces deux quantités est de  $\frac{\pi}{2}$ . Le courant est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur la tension.

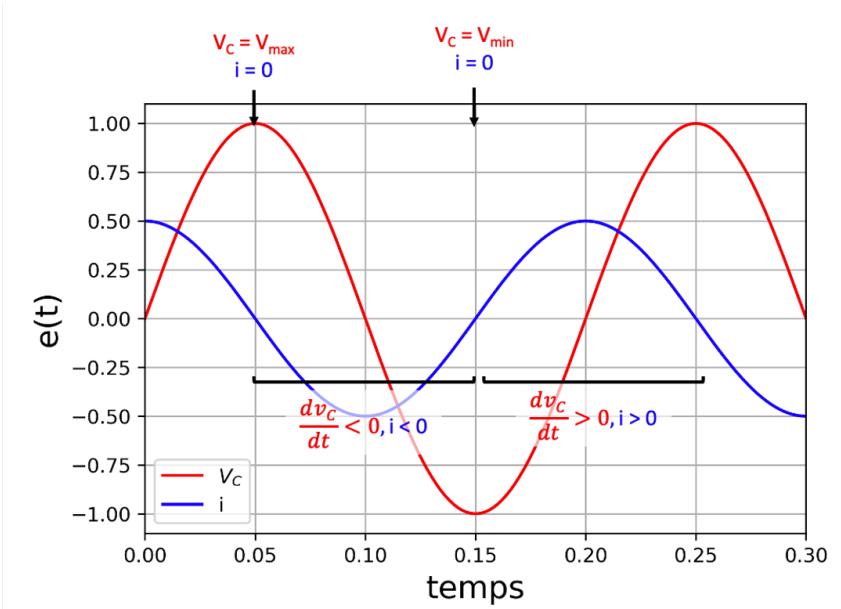


FIGURE 10.12 – déphasage courant/tension introduit par la présence de la capacité

La relation courant/tension aux bornes d'une capacité s'exprime via la grandeur  $Z_C$ , impédance de la capacité. Pour un circuit donné, on définit sa capacité  $C$  comme le rapport de la charge accumulée  $Q$  sur la tension  $U$  appliquée à ses bornes, soit en fait son aptitude à emmagasiner des charges électriques, de l'énergie électrostatique :

$$Q = CU$$

Le condensateur est l'élément technologique correspondant à la capacité  $C$ . Nous allons montrer comment relier  $Z_C$  à la valeur  $C$ .

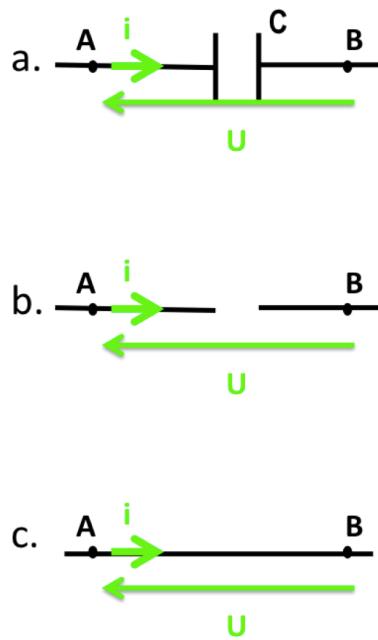


FIGURE 10.13 – a. Représentation d'une capacité, b. dans le cas des hautes fréquences  $\omega \rightarrow \infty$ , c. et des basses fréquences  $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\underline{u(t)} &= U_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i(t)} &= I_0 \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

comme

$$\underline{i(t)} = C \frac{du}{dt}$$

donc

$$\underline{i(t)} = C \cdot j\omega U_0 \cdot e^{j\omega}$$

or

$$\underline{u(t)} = Z_C \cdot \underline{i(t)}$$

d'où

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

L'unité d'une capacité électrique, notée C, est le Farrad, noté F.  $[F] = [A][T][V]^{-1}$

L'impédance d'une capacité<sup>8</sup> est un imaginaire pur, donc une réactance pure. Son effet sera de déphaser de  $\frac{\pi}{2}$  la tension à ses bornes par rapport au courant qui circule dedans. On dit "vulgairement" que  $u(t)$  est en retard sur  $i(t)$ .

*N.B. :* quand  $\omega \rightarrow 0$  alors  $Z_C \rightarrow \infty$  dans ce cas, le condensateur peut être considéré comme interrupteur ouvert (10.13).

*N.B. 2 :* quand  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $Z_C \rightarrow 0$  dans ce cas, le condensateur peut être considéré comme un fil (10.13).

*N.B. 3 :* La valeur de  $Z_C$  n'a de sens qu'à une fréquence donnée. Par exemple, dans le cas d'un condensateur idéal de capacité  $C = 120 \text{ pF}$ .

On aura alors les valeurs  $Z_C$  suivantes (cf tableau suivant)

fréquence	C	$Z_C$
50 Hz	120 pF	26,5 MΩ
50 kHz	120 pF	26,5 kΩ
50 MHz	120 pF	26,5 Ω

*N.B. 4 :* Comme la caractéristique de l'inductance, celle de la capacité est dynamique. En termes intuitifs, on peut dire que c'est un élément qui s'oppose aux fortes variations de tension, car il faut des courants proportionnels à ces variations.

## 10.5 Association d'impédances complexes

Une fois n'est pas coutume, l'ensemble des lois que nous avons vu en régime continu (l'association des dipôles en parallèles, séries, les ponts diviseurs de tension, de courant...) reste inchangées !

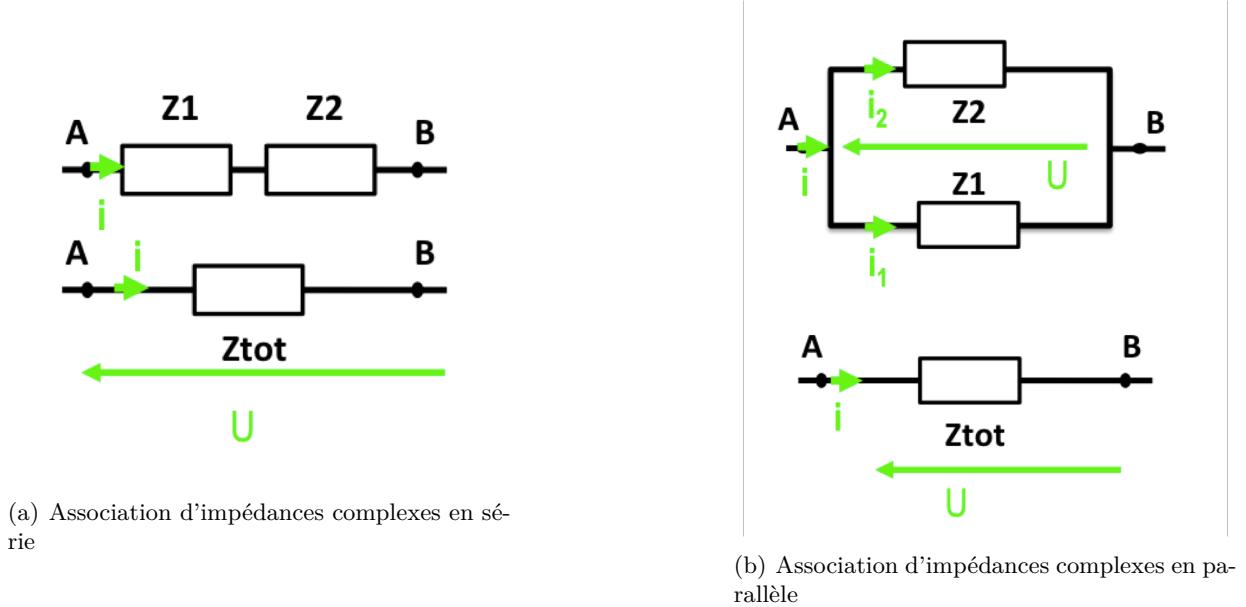


FIGURE 10.14 – Association d'impédances

### 10.5.1 En série

L'ASSOCIATION EN SÉRIE de N impédances ( $Z_1, Z_2 \dots Z_N$ ) est équivalente à une impédance  $Z_{tot}$  égale à la somme des impédances (fig. 10.14(a)).

$$Z_{tot} = \sum_1^N Z_k$$

### 10.5.2 En parallèle

L'ASSOCIATION EN PARALLÈLE de N impédances ( $Z_1, Z_2 \dots Z_N$ ) est équivalente à une impédance  $Z_{tot}$  égale à l'inverse de la somme des admittances ( $= \frac{1}{Z_k}$ ) (fig. 10.14(b))

$$\frac{1}{Z_{tot}} = \sum_1^N \frac{1}{Z_k}$$

8.  $Z_C$  est homogène à  $\frac{1}{[F]^{rad}[T]^{-1}}$



## Chapitre 11

# Représentation des signaux - Exercices en cours

### Exercice 1 : Signaux alternatifs

1. Quel est le genre de courant ou de tension affiché par les multimètres universels ?
2. Quels sont les symboles d'unités et de grandeurs utilisés pour définir la période et la fréquence ?
3. Une mesure en tension à l'intérieur d'un appareil donne une valeur efficace de 46.8 V. Quelles sont les valeurs moyennes, crête à crête et efficace de cette tension ?
4. Un fer à souder de 60 W est raccordé soit sur une tension continue soit sur une tension alternative de même valeur efficace. Dans quel cas le courant sera t'il le plus important ?
5. une tension alternative sinusoïdale de 3 V engendre un déplacement de 32 mm sur la trace d'un oscilloscope. Quel déplacement provoquera une tension de 11 V ?
6. une tension alternative sinusoïdale a une valeur de 60 V,  $75^\circ$  après le début de la période. Calculer la valeur efficace de cette tension.
7. Calculer la vitesse angulaire d'un courant alternatif sinusoïdal d'une fréquence de 36 kHz.
8. Une tension alternative est mesurée à l'aide d'un oscilloscope. Sur l'écran sa période mesure 45 mm avec un balayage réglé sur 2 ms par cm . Calculer la fréquence de ce signal.

## Exercice 2 : Valeurs moyennes et efficaces

Calculer les valeurs moyennes et efficaces des différents signaux dessinés figure 11.1, avec  $E$  l'amplitude du signal et  $T$  sa période. La figure:

- (1,1)  $S(t) = E \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ ,
- (1,2)  $S(t) = E|\sin(\frac{2\pi}{T}t)|$ ,
- (2,1) sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{2}]$   $S(t) = E|\sin(\frac{2\pi}{T}t)|$ , sur l'intervalle  $\frac{T}{2}, T]$   $S(t) = 0$ ,
- (2,2) sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{2}]$   $S(t) = E$ , sur l'intervalle  $[\frac{T}{2}, T]$   $S(t) = -E$ ,
- (3,1) sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{2}]$   $S(t) = E$ , sur l'intervalle  $[\frac{T}{2}, T]$   $S(t) = 0$ ,
- (3,2) sur l'intervalle  $[0, \frac{T}{3}]$   $S(t) = E$ , sur l'intervalle  $[\frac{T}{3}, T]$   $S(t) = 0$ ,

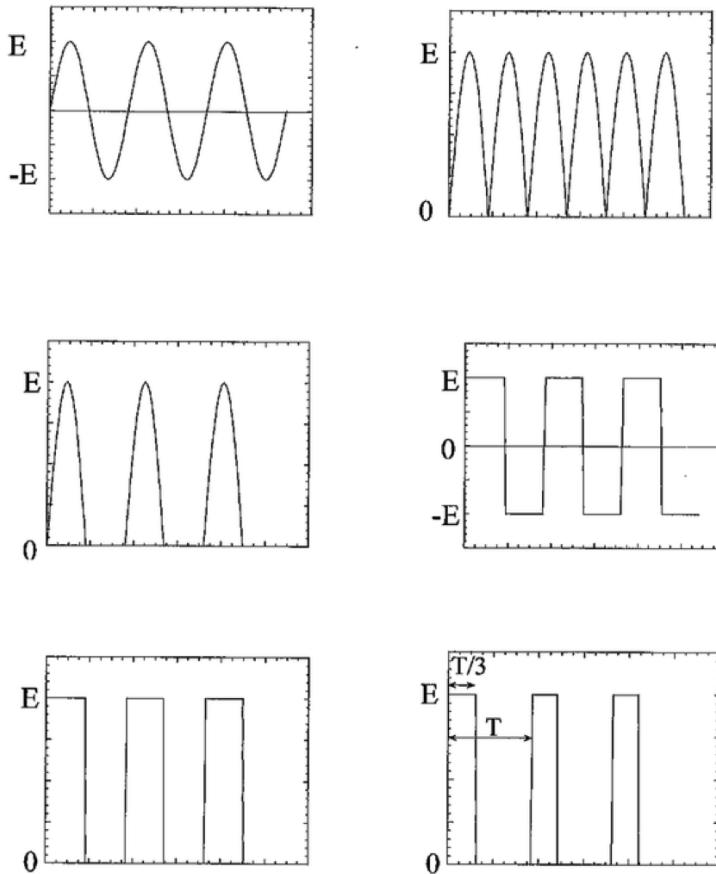


FIGURE 11.1 – signaux Exercice 2

### Exercice 3 : période, fréquence, valeurs max, moyennes, efficacces...

Un signal de tension  $e(t)$  est visualisé à l'aide d'un oscilloscope, la fenêtre de visualisation est représentée figure 11.2.

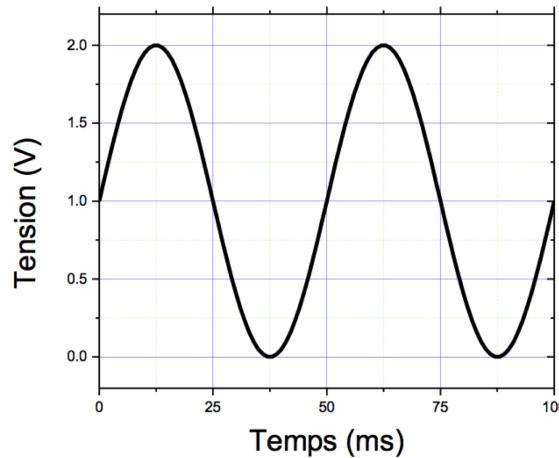


FIGURE 11.2 – signal sinusoïdal

1. Quelle est la période du signal  $e(t)$ , déduire sa fréquence et sa pulsation ?
2. Quelle est l'expression de  $e(t)$  ?
3. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace de  $e(t)$ .

### Exercice 4 : Rappel – dualité temps fréquence

Vous avez vu ou vous verrez qu'il est possible de représenter des signaux soit en fonction de leur évolution dans le temps  $s(t)$ , soit en fonction de leurs composantes spectrales (fréquences)  $S(f)$  :

$$s(t) \iff S(f) \quad (11.1)$$

La façon de passer de l'une des représentations à l'autre dépasse le cadre de ce cours. Nous allons nous intéresser ici à la représentation des signaux périodiques de fréquence  $f$  (à valeurs réelles : comme une tension). On part du fait que  $s(t)$  peut se mettre sous la forme d'une somme de sinus

et cosinus (avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $f$  la fréquence). Alors nous avons la forme générale de  $s(t)$  :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi f n t) + b_n \sin(2\pi f n t)) \quad (11.2)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (11.3)$$

$$= \color{red}{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\color{red}{\chi_n} \cos(n\omega t + \color{blue}{\Phi_n})) \quad (11.4)$$

avec  $\chi_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ ,

si  $\chi_n \neq 0$

$$\begin{cases} \cos(\Phi_n) = \frac{a_n}{\chi_n} \\ \sin(\Phi_n) = -\frac{b_n}{\chi_n} \end{cases} \quad (11.5)$$

Nous avons choisis une convention cosinus, mais il est tout à fait possible de choisir une convention sinus (pour rappel :  $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$  ).

On peut voir immédiatement que seules les harmoniques de la fréquence (multiples de la fréquence) du signal interviennent dans sa décomposition en somme de cosinus. Une fois la convention choisie cosinus ou sinus, pour représenter  $s(t)$  il nous reste 3 paramètres ( $x_n$  : l'amplitude du cosinus,  $\omega_n = n\omega$  : la pulsation du cosinus et  $\phi_n$  : la phase du cosinus). Ces paramètres peuvent être représentés sous plusieurs formes, avec chacune leur avantage et inconvénient. Dans le cadre de ce cours la représentation la plus approprié est celle de Bode, qui consiste en deux courbes : l'amplitude en fonction de la pulsation (ou la fréquence) et la phase en fonction de cette même pulsation (ou fréquence).

La fréquence (ou pulsation) « 0 » représente la composante continue du signal, c'est le niveau DC. C'est la seule composante où la phase ne signifie rien. Pour chaque composante du signal (pour un  $\omega_n$  donné) on associe une amplitude ( $\color{red}{\chi_n}$ ) et une phase ( $\color{blue}{\Phi_n}$ ). Pour lire le diagramme de Bode, on effectue l'opération inverse, on somme toute les composantes pulsations par pulsations en leur associant une amplitude et une phase chacune. Le diagramme de Bode est la représentation spectrale du signal  $s(t)$  (on a tracé  $S(f)$  ou plutôt  $S(\omega)$  dans notre exemple 11.3).

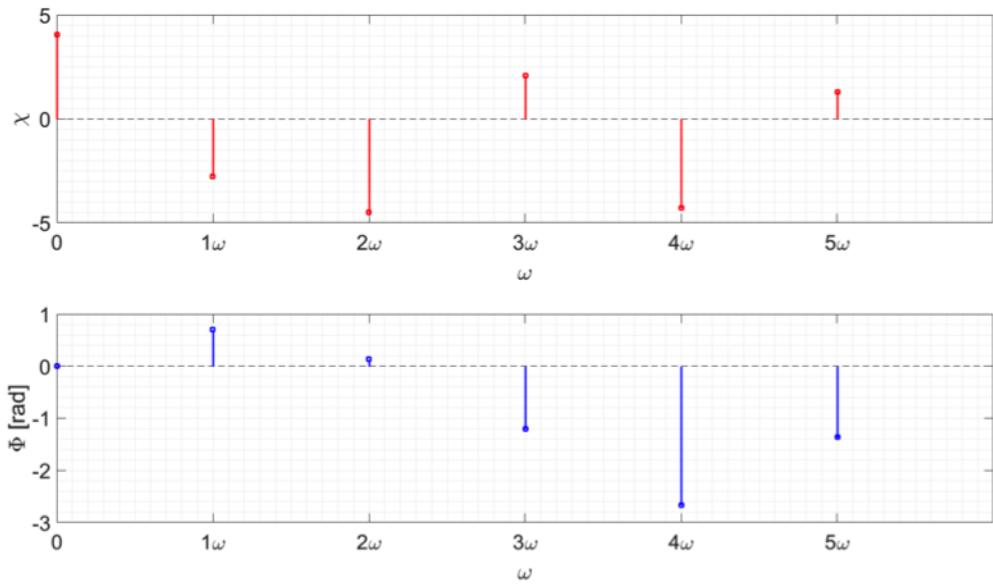


FIGURE 11.3 – Exemple du diagramme de Bode pour un signal arbitraire

### Exercice 5 : Lecture d'un diagramme

1. Pour chacun des deux diagrammes suivants (figure 11.4 et figure 11.5), reconstruisez le signal temporel  $s(t)$ .
2. Tracez le signal et déduisez en de quelle fonction il s'agit (ou se rapproche t'il).

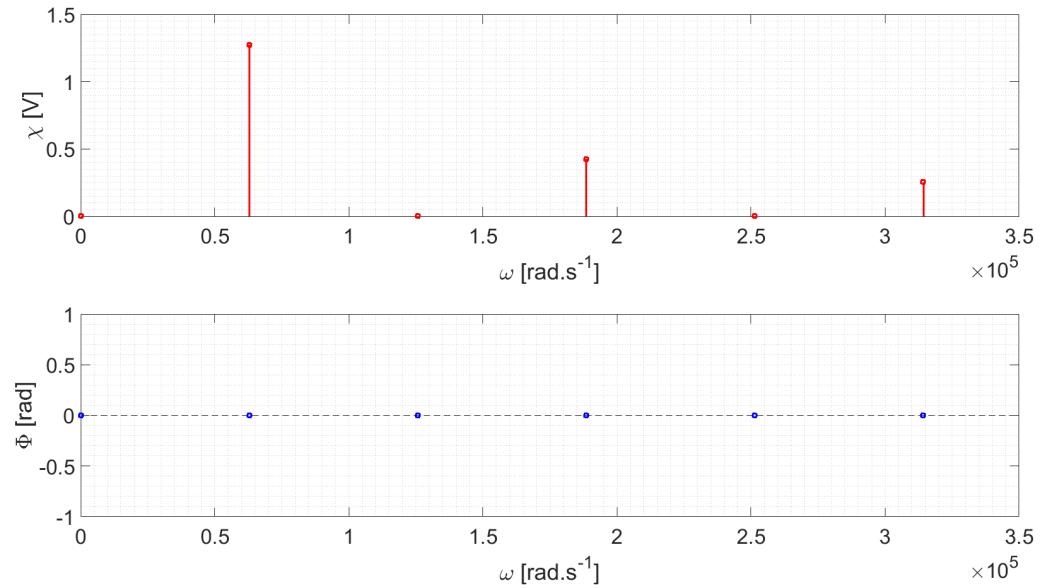


FIGURE 11.4 – Diagramme de Bode 1 (en convention sinus)

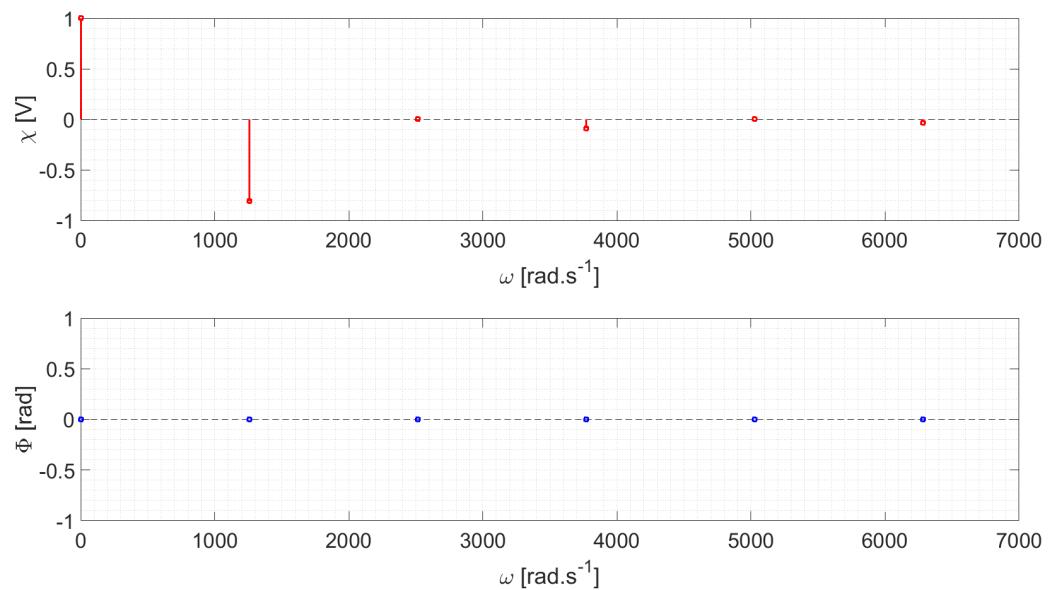


FIGURE 11.5 – Diagramme de Bode 2 (en convention cosinus)

## Exercice 6 : Création d'un diagramme

1. Pour chacun des deux signaux suivants équation (11.6) et équation (11.7) (unités : V et s) :
  - (a) Quelle est la fréquence et la pulsation fondamentale du signal ( $\omega$ ) ?
  - (b) Quelle est la valeur moyenne du signal ?
  - (c) Tracez le spectre du signal en vous arrêtant à la 5<sup>e</sup> harmoniques : c'est-à-dire  $5\omega$  (n'oubliez pas de préciser la convention utilisée).
2. Tracez le signal et déduisez en de quelle fonction il s'agit (ou se rapproche t'il).

$$s_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(20n\pi t)}{4n^2 - 1} \quad (11.6)$$

$$s_2(t) = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(100n\pi t)}{n} \quad (11.7)$$

## Exercice 7 : Interprétation d'un diagramme

Pour les signaux précédents (figure 11.4, figure 11.5, équation (11.6) et équation (11.7)) :

1. Est-il possible de récupérer la fréquence double du signal (existe-t-elle) ? et la triple ?
2. Est-il possible de récupérer une tension constante (en ne gardant qu'une seule harmonique) ?

## Exercice 8 : Exercice sur les impédances complexes

Sur le schéma figure 11.6, les sources de tension idéales sont indiquées par un rond autour d'une portion de sinusoïde, et les sources de courant idéales par des ronds avec un trait horizontal en leur milieu.

1. Pour les schémas avec source de tension, déterminez le courant  $i(t)$  en régime permanent en fonction de  $\omega$  et de  $u_0$ , en supposant  $u = u_0 \sin(\omega t)$  (remarque : avec la méthode adéquate, le résultat se trouve en maximum 3 lignes de calcul).

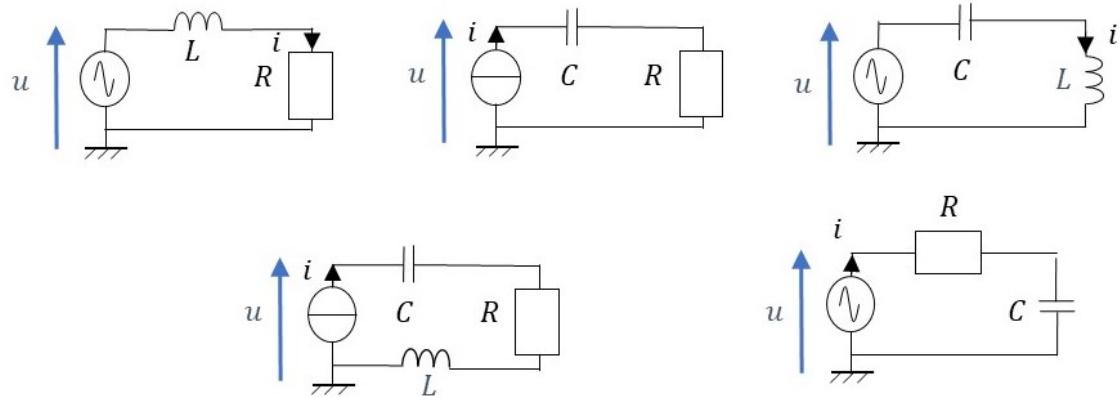


FIGURE 11.6 – Exercice sur les impédances complexes

2. Pour les schémas avec source de courant, déterminez la tension  $u(t)$  en régime permanent en fonction de  $\omega$  et de  $i_0$ , en supposant  $i = i_0 \sin(\omega t)$  (remarque : avec la méthode adéquate, le résultat se trouve en maximum 3 lignes de calcul).

### Exercice 9 : impédance complexe dans un circuit

On considère le circuit figure 11.7 :

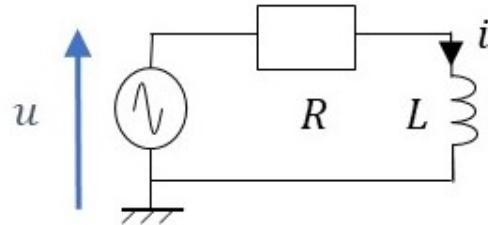


FIGURE 11.7 – Impédances complexes dans un circuit

1. Déterminez le circuit équivalent à ce circuit vu par la source de  $u_{in} = u_0 \sin(\omega t)$  à très basse fréquence et à très haute fréquence.
2. Sur base de la question 1, déterminez l'amplitude du courant  $i$  de ce circuit soumis à une excitation sinusoïdale à très haute et très basse fréquence
3. On considère maintenant la tension  $u_{out}$ . Donnez alors, sans calculer la fonction de transfert, l'amplitude de  $u_{out}$  à très haute et très basse fréquence, par rapport à  $u_0$ .
4. Par la méthode de votre choix, calculez la fonction de transfert reliant la sortie  $u_{out}$  à l'entrée  $u_{in}$  et vérifiez les conclusions de la question 3.

5. Un étudiant, assis à côté de vous, vous tapote sur l'épaule pour vous dire : « Mais... l'amplitude de  $u_{out}$  devrait être nulle à haute fréquence ! Puisque  $u = Zi$ , si  $i$  est nul à haute fréquence,  $u_{out}$  devrait être nul, pas vrai ? ». Expliquez pourquoi ce raisonnement ne tient pas (ni physiquement, ni mathématiquement).



## Chapitre 12

# Régime sinusoïdal permanent forcé

### 12.1 régime permanent forcé dans le cas des systèmes particuliers ... les systèmes filtrant

Lorsqu'une source AC est connectée à plusieurs éléments de circuit, en série ou en parallèle, l'application de la loi de maille devient plus compliquée que pour les circuits DC car il faut ajouter plusieurs différences de potentiel oscillant qui peuvent être déphasées par rapport aux autres. Par exemple, supposons que nous ayons une résistance  $R$  et un condensateur  $C$  en série avec une source de courant alternatif  $V_e$  (fig. 12.1), connu sous le nom de circuit série RC. La règle de la loi de maille stipule que :

$$V_e = V_C + V_R$$

$V_C$  est la tension aux bornes de  $C$  et  $V_R$  celle aux bornes de  $R$ . Pour calculer la somme du côté droit de cette équation, il faut ajouter les différences de potentiels qui varient sinusoïdalement à la même pulsation ou fréquence angulaire  $\omega$  mais qui sont déphasées.

Par exemple, la différence de potentiel  $V$  combinée des deux différences de potentiels  $V_C$  et  $V_s$  qui oscillent à la même fréquence angulaire  $\omega$  est la suivante :

$$V = V_C \sin(\omega T + \phi_1) + V_s \sin(\omega T + \phi_2)$$

Où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les phases initiales des deux ddp  $V_C$  et  $V_s$ . Calculer cette somme algébriquement devient compliqué, et se simplifie grandement en utilisant l'approche complexe.

$$V = V_C e^{\omega T + \phi_1} + V_s e^{\omega T + \phi_2}$$

$$V = e^{\omega T} (V_C e^{\phi_1} + V_s e^{\phi_2})$$

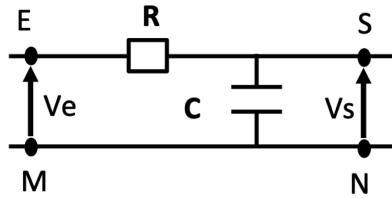


FIGURE 12.1 – filtre RC ou cellule RC

Pour cela nous allons introduire la notion de fonction de transfert en tension :

$$H_0(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

Nous pourrions tout aussi bien explorer celle en courant ( $H(j\omega) = \frac{i_s}{i_e}$ ), la transimpédance ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{i_e}$ ) ou encore la transadmittance ( $H(j\omega) = \frac{i_s}{V_e}$ ).

$H(j\omega)$  est une grandeur complexe, rapport de deux tensions décrites dans le domaine complexe. Ajoutons à ce circuit un signal en entrée et un système pour observer le signal en sortie (cf fig. 12.2).

Dans l'exemple de la fig. 12.1, pour déterminer  $H$ , nous pouvons écrire que<sup>1</sup> :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Afin d'étudier cette fonction de transfert, qui nous permettra par la suite de prédire le signal de sortie en fonction du signal d'entrée, nous avons besoin de faire un petit passage par la boîte à outils mathématiques pour la physique, et d'introduire les notion de diagramme de Bode, de dB, de phase etc.... Je vous laisse découvrir cela dans le chapitre suivant.

On aimera utiliser la forme canonique de cette fonction de transfert pour l'étudier (ce qui permettra d'avoir une approche généralisée de cette question aux autres systèmes physique, tel que les oscillateurs par exemple).

1. pont diviseur de tension

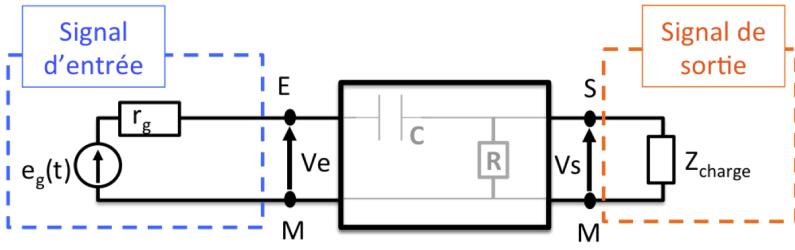


FIGURE 12.2 – Exemples de filtre RC intégré dans un circuit.

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k j\omega^k}{\sum_{l=1}^m 1 + b_l j\omega^l}$$

Dans le cas de notre exemple (d'un filtre passe bas d'ordre 1) :

$$H(j\omega) = \frac{a_0}{1 + j b_0 \omega}$$

Avec  $a_0$  le gain statique et  $b_0$  le temps caractéristique du circuit. Une fois que la fonction de transfert est calculée, ou mesurée, nous pourrons connaître le signal de sortie  $V_s$  attendu :

$$V_s = V_e | H(j\omega) | \sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$

## 12.2 Etude de la fonction de transfert - le diagramme de Bode

Il existe plusieurs façon d'étudier un nombre complexe et en particulier 3 façons de le représenter graphiquement<sup>2</sup>.

Nous sommes naturellement sensible, de part nos 5 sens, au module du signal plutôt qu'à sa partie réelle. Classiquement nous utilisons le *diagramme de Bode*, module en decibel (noté dB) et phase en fonction de la fréquence. A partir de la représentation de Bode d'un quadripôle, vous aurez tous les éléments en main pour prédire le signal de sortie en fonction du signal d'entrée (sa tension et sa phase).

Par la suite nous noterons

(a) A le module de  $H$ <sup>3</sup>,  $A = | \frac{V_s}{V_e} | = | H(j\omega) |$

2. plan de Nyquist : partie Imaginaire en fonction de la partie Réelle, Abaque de Smith, plan de Black : module en fonction de la phase avec paramétrage en fréquence et finalement le diagramme de Bode : module en dB et phase en fonction de la fréquence, le tout en échelle log

3. le module peut prendre d'autre nom que A, on peut l'appeler H, G... nous avons choisi A pour éviter les confusion avec G

(b)  $G_{dB}$  en dB, le module en décibels <sup>4</sup>

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{V_s}{V_e}\right|\right)$$

(c)  $\phi$  la phase de la fonction de transfert en radian,

$$\phi = \arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\Im(H(j\omega))}{\Re(H(j\omega))}\right)$$

### 12.2.1 Le gain en dB

Attention, et c'est là que les ennuis commencent, on parle de gain en puissance ou de gain en tension. Finalement on parle de la même chose (in fine)...dans une unité qu'on appelle dB, decibel, sans dimension puisqu'il s'agit du rapport de deux grandeurs de puissance.

(a) Gain en puissance :

(ou atténuation, tout dépendra du signe du gain, s'il est positif ou négatif), exprimé en dB.

$$G_{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$$

*N.B. :* on pourra également parler d'amplification en puissance

$$A_p = \frac{P_s}{P_e}$$

*N.B. 2 :* pour un dipôle passif (qui ne pourra jamais, même avec la meilleure volonté du monde créer de l'énergie, enfin sauf dans le cas des circuits résonants capable d'accumuler de l'énergie à une fréquence donnée), bref, dans le cas d'un dipôle passif :

$$P_s \leq P_e \rightarrow G_p \leq 0$$

*N.B. 3 :* pour un dipôle actif (dont le but, entre autre, peut être de fournir de la puissance) <sup>5</sup>, dans ce cas là :

$$P_s \geq P_e \rightarrow G_p \geq 0$$

---

4. attention à ne pas confondre  $\log_{10}$  le logarithme en base 10 et  $\log$  le logarithme népérien, encore appelé  $\ln$ . Typiquement pour matlab,  $\log$  equivaut à  $\ln$ . Dans la suite du document,  $\log$  sera pour  $\log_{10}$  et  $\ln$  pour le logarithme népérien

5. dans le cas des Amplificateurs Opérationnels par exemple, que nous verrons par la suite

(b) gain en tension, exprimé en dB :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{V_s}{V_e}\right|\right)$$

Il suffit de se rappeler que  $P_e = \frac{V_e^2}{R_e}$  idem pour  $P_s = \frac{V_s^2}{R_s}$ . En considérant que nous sommes dans le cas d'un circuit dit adapté en impédance, i.e.  $R_e = R_s$ <sup>6</sup>

*N.B. 4* : on pourra également parler d'amplification en tension

$$A = \left|\frac{V_s}{V_e}\right|$$

Dans l'exemple de la fig. 12.1, le module de  $H$  s'écrit de la manière suivante :

$$A = |H(j\omega)| = \left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Petit cours d'histoire, le bel (symbole B) est utilisé dans les télécommunications, l'électronique, l'acoustique ainsi que les mathématiques. Inventé par des ingénieurs des Laboratoires Bell pour mesurer l'atténuation du signal audio sur une distance d'un mile (1,6 km), longueur standard d'un câble de téléphone.

Pour vous convaincre de l'utilité de calculer ou de visualiser le gain en échelle logarithme regardez la figure suivante(12.3). la fonction  $H = \frac{1}{1 + (\frac{x}{5e^3})^2}$  en fonction de  $x$ . Dans la figure de gauche, les échelles  $x$  et  $y$  sont linéaires, dans la figure du milieu seule l'échelle  $x$  est en échelle logarithme (semi log x), et dans la figure de droite  $x$  et  $y$  sont affichées en échelle log. Plusieurs choses sont à observer :

- La même fonction est représentée de façon très différente, et le choix de l'échelle met en avant des phénomènes différents<sup>7</sup>.
- Un axe gradué linéairement est mal adapté pour la représentation d'une grandeur dont les valeurs forment un éventail très ouvert ; c'est le cas du domaine des fréquences de fonctionnement des circuits étudiés. Typiquement sur une feuille de 28cm de large, on ne peut représenter que 2.8Khz si on adopte une échelle de 1cm = 100Hz. Nous utiliserons donc pour l'axe des fréquences une échelle logarithmique. Celle-ci est obtenue en séparant les valeurs par des intervalles proportionnels à leur logarithme.

6. Nous verrons également cette notion d'adaptation dans le chapitre suivant

7. Soyez très sensible à cela la prochaine fois que vous seront présentés des graphes, en cours, aux informations ou dans n'importe quel contexte. Posez vous la question du choix des axes et du message que cela tend à faire passer

- l'échelle log permet de donner le même poids à une variation d'une décade entre 10 et 100 ou entre 100 et 1000, ce qui n'est pas le cas en échelle linéaire (qui donne le même poids à toutes les données)
- une multiplication de "x" par un facteur constant se traduit par un décalage géométrique constant sur l'axe des "x" (en échelle log)
- l'échelle ne peut pas démarrer de "0" ( $\log(0) = -\infty$ )
- une *décade* est une multiplication par 10
- une *octave*<sup>8</sup> est une multiplication par un 2

Un petit mot rapide sur une valeur particulière qu'est la fréquence de coupure  $f_0$  ou la pulsation de coupure  $\omega_0$ . La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle on aura

$$\frac{P_s}{P_e}(\omega = \omega_0) = \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right| (\omega = \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Une dernière façon de formuler cela :

$$\begin{aligned} G(\omega = \omega_0) &= 20 \log\left(\left| \frac{V_s}{V_e} \right| (\omega_0)\right) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB \\ G(\omega = \omega_0) &= 10 \log\left(\frac{P_s}{P_e}(\omega_0)\right) = 10 \log\left(\frac{1}{2}\right) = -3dB \end{aligned}$$

### 12.2.2 La Phase

La phase de la fonction de transfert  $\frac{V_s}{V_e}$  donne l'information de déphasage entre  $V_s$  et  $V_e$ . C'est l'argument de la fonction de transfert :

$$\phi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$$

Reprendons le cas de notre filtre RC (fig. 12.1), on a alors<sup>9</sup>

8. pour les musiciens, et pour les autres aussi, le passage du  $la^2$  (qui résonne à 220 Hz) au  $la^3$  (440 Hz) se fait en multipliant la fréquence par 2, en musique on dit qu'on change d'octave et tout est dit... les musiciens sont souvent de grands physiciens ou de mathématiciens qui s'ignorent

9. petit rappel :

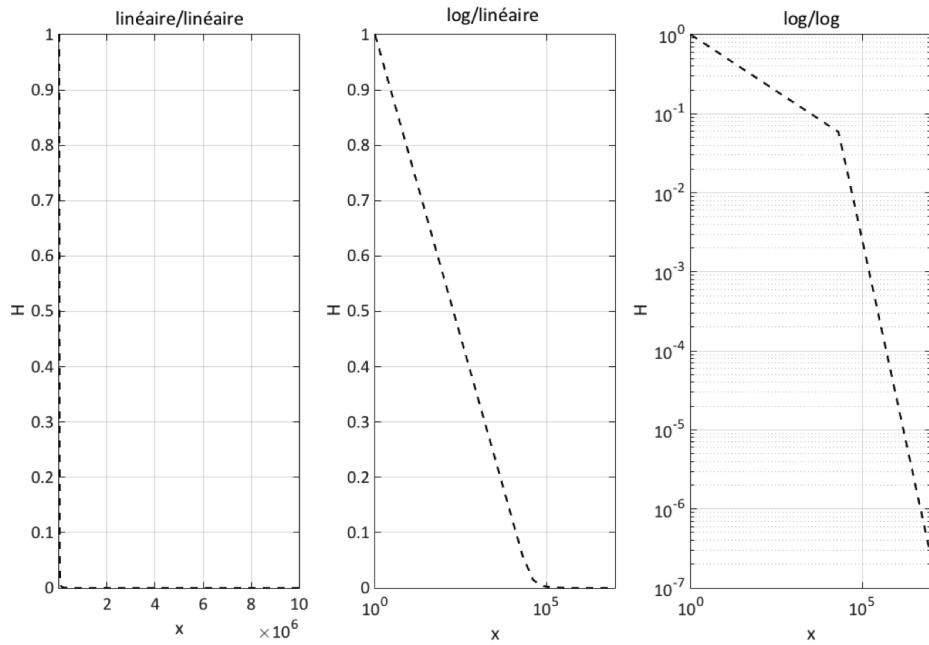


FIGURE 12.3 – représentation de  $H(x)$  avec différentes échelles : gauche - linéaire, milieu - semilog x, droite - loglog

$$\tan(\phi) = \tan(\arg(H(j\omega))) = \tan \left( \arg \left( \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \right) \right) = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où

$$\phi = -\arctan \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

### 12.2.3 Cas du filtre passe bas du premier ordre

Dans le cas de notre exemple fig. 12.1, pour déterminer  $H$ , nous pouvons écrire que<sup>10</sup> :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

On aimera utiliser la forme canonique de cette fonction de transfert pour l'étudier (ce qui permettra d'avoir une approche généralisée de cette question aux autres systèmes physique, tel que les oscillateurs par exemple).

- 
- $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
  - $\arg(a + jb) = \frac{b}{a}$

10. Pour arriver à ce résultat, on se rappellera du pont diviseur de tension (ici  $V_s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} V_e$ ), que  $Z_R = R$  et que  $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

$$H_0(j\omega) = \frac{A}{1 + j\omega\tau} = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Dans notre cas, A le gain statique,  $A = 1$  et  $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$  le gain statique.

*N.B. :* On reconnaîtra le  $\tau$  temps caractéristique du circuit RC étudié dans le domaine transitoire. Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons caractériser un circuit (électronique, ou non) soit via le régime transitoire soit via le régime permanent.

On peut alors écrire le gain comme :

$$G_{dB} = 20 \log(H(j\omega)) = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right) = -10 \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)$$

On peut repérer 3 gammes de fréquences particulières

(a) Pour  $\omega \rightarrow 0$ , i.e. aux basses fréquences<sup>11</sup>, on a alors<sup>12</sup>

$$G_{dB} = -20 \log(1) = 0$$

c'est à dire que  $V_s = V_e$ , il n'y a ni amplification, ni atténuation. On est alors en présence d'une asymptote horizontale.

Physiquement, on peut également se rappeler qu'aux basses fréquences, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Dans ce cas, le courant ne peut plus circuler et il n'y a donc plus de chute de potentiel aux dans le circuit (cf fig. 12.4, circuit équivalent en violet).

(b) Lorsque  $\omega = \omega_0$ , on a alors

$$G_{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -20 * 0.15 = -3dB$$

i.e à la valeur particulière de  $\omega = \omega_0$  le gain en tension vaut -3dB,  $V_s = \frac{V_e}{\sqrt{2}}$  et  $P_s = \frac{P_e}{2}$ . On parlera dans ce cas de la fréquence de coupure à -3dB.

11. si  $\omega \rightarrow 0$  cela signifie que la fréquence  $\rightarrow 0$  ou encore que nous sommes à des fréquences faibles, communément appelées basses fréquences

12.  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$  devient négligeable devant 1

(c) Pour  $\omega \gg \omega_0$ , i.e à hautes fréquences<sup>13</sup>, on a alors<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} G_{dB} &= -20 \log \left( \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right) = -20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ &= -20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_0) \approx -20 \log(\omega) \end{aligned}$$

qui représente une droite de pente de -20 dB / décade ( $20 \log(\omega)$ ) sur une échelle logarithmique.

Typiquement quand  $\omega = 10\omega_0$  on a  $G_{dB} = -20$ dB et pour  $\omega = 100\omega_0$  on a  $G_{dB} = -40$ dB, soit une diminution de 20 dB pour une décade de  $\omega$ . Physiquement, on peut également se rappeler qu'aux hautes fréquences, un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé. Dans ce cas, la tension à ses bornes est la même que celle aux bornes d'un fil,  $V_s = 0$  (cf fig. 12.4, circuit équivalent en vert).

Pour résumé, dans le cas d'un filtre dit d'ordre 1, en échelle logarithmique, le module en dB a deux tendances, représentées par deux asymptotes, pour :

- $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$  - basses fréquences - asymptote horizontale
- $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$  - hautes fréquences - droite avec une pente de -20dB/décade.
- $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  - à la fréquence de coupure la puissance est atténuée de moitié, donc la tension sera atténuée de  $\sqrt{2}$  et le Gain sera de -3dB en tension mais également en puissance.

Cette démarche sera valable pour toutes les fonctions de transfert se présentant sous forme polynomiales<sup>15</sup>. Ces informations se retrouvent sur la figure (12.4) :

*N.B. 2 :* En observant le diagramme asymptotique (fig 12.4), on remarque que le circuit RC laisse passer les fréquences  $< 2\pi\omega_0$ , que nous appelons aussi basses fréquences sans trop les atténuer, et atténue plus fortement les signaux de "hautes" fréquences (i.e. quand les fréquences  $> 2\pi\omega_0$ ).

A propos de la phase, l'ensemble de ces résultats est résumé sur la figure 12.4 :

(a)  $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ , i.e. aux basses fréquences, on a alors :

$$\phi = 0$$

13. si  $\omega \gg \omega_0$  cela signifie que nous sommes à des fréquences élevées, communément appelées hautes fréquences

14.  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

15. petit rappel aux étourdi(e), on parle ici de fonction  $H$  pouvant s'écrire comme un polynome de  $\omega$ , i.e  $H = \sum_{k=0}^n \frac{a_k j \omega^k}{b_k j \omega^k}$

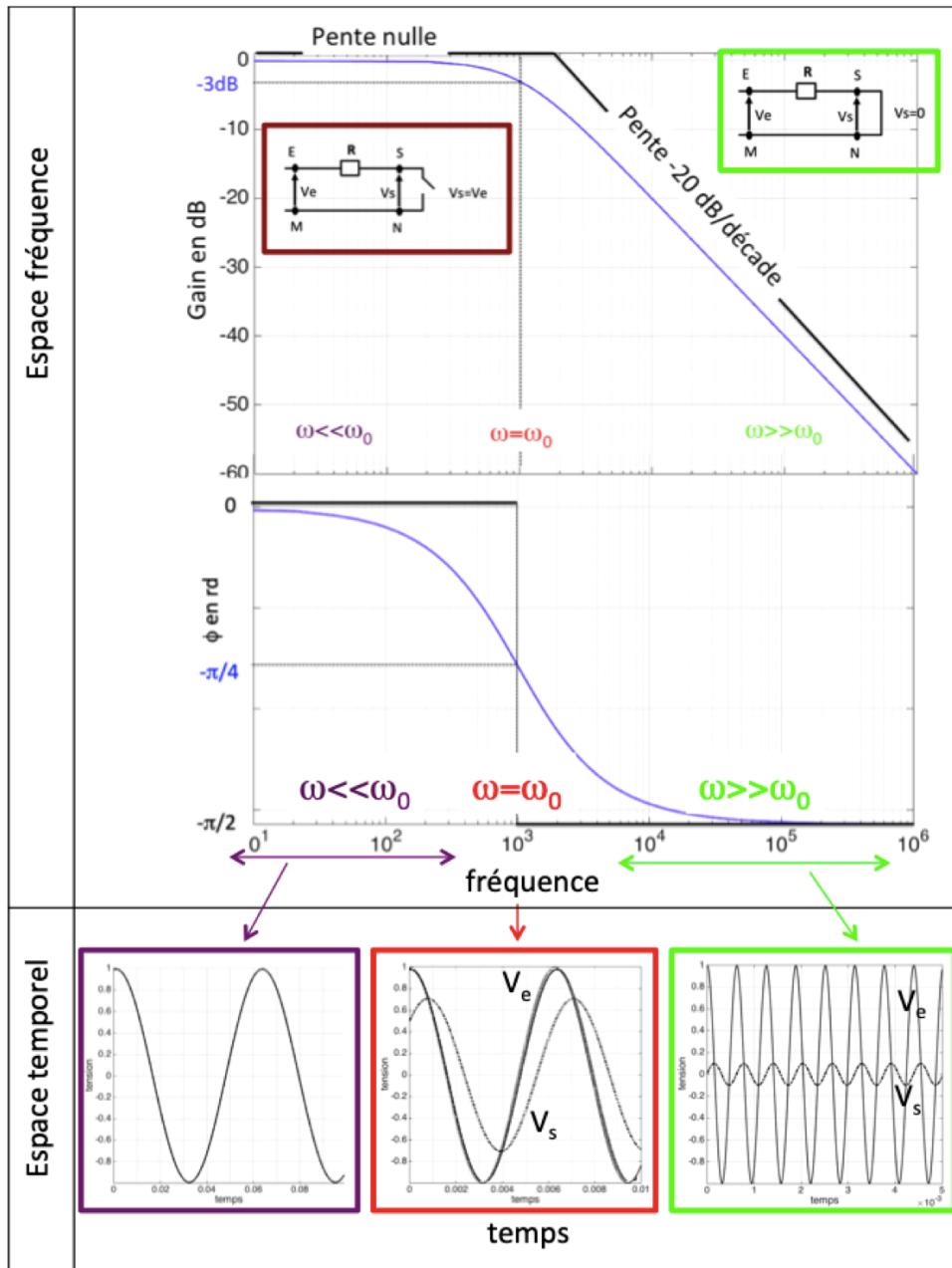


FIGURE 12.4 – diagramme asymptotique du module et de la phase de la fonction de transfert du circuit RC

(b)  $\omega = \omega_0$ , i.e. à la fréquence dite de coupure, on a alors<sup>16</sup> :

$$\phi = -\frac{\pi}{4}$$

(c)  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$  i.e. aux hautes fréquences, on a alors :

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Pour aller un peu plus loin... (un peu de courage). La fonction de transfert d'un filtre électriquement réalisable est toujours complexe car sa réponse impulsionnelle est causale (symétrie hermitienne), donc affectée d'une phase qui est fonction de la fréquence. Tout filtre physiquement réalisable déphase le signal qui lui est soumis : un filtre sans déphasage ne peut exister. Et ce déphasage risque de modifier le signal.

Pourquoi vous racontez tout cela me demanderez vous. Simplement pour vous donner des outils pour comprendre comment fonctionne ces fameux filtres dont nous parlons dans ce chapitre.

#### 12.2.4 autres représentation

L'abaque de Smith (cf fig. 12.5) est un monogramme reliant le rapport des ondes guidées incidentes et réfléchies le long d'un guide de propagation, à la variation d'impédance caractéristique le long de ce guide. Un plan complexe est associé aux coefficients de réflexion d'une onde guidée, et l'abaque est généralement réduit à un disque tel que le module du coefficient de réflexion est inférieur ou égal à 1.

Un point de l'abaque représente une impédance : l'abaque de Smith donne la valeur de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'impédance  $Z$ . L'abaque est ainsi constitué d'un réseau de cercle ou d'arc de cercle, les isocourbes : parties réelles de  $Z$  constantes et parties imaginaires de  $Z$  constantes.

À titre d'exemples :

1. Le centre de l'abaque ( $z = 1 + j0$ ) représente une résistance pure égale à l'impédance caractéristique  $Z_0$  de la ligne considérée.
2. L'axe horizontal représente des résistances pures.

---

16.  $\phi = \arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -\arg(1+j)$

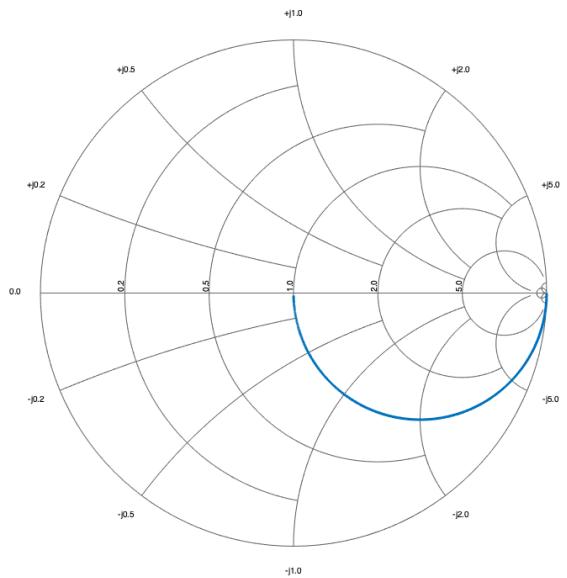


FIGURE 12.5 – Représentation diagramme de Smith

### 12.2.5 En résumé

Voici l'ensemble des gabarit de filtres du premier ordre que vous pourrez rencontrer, en tant que filtre passe haut ou passe bas. Tous n'ont pas nécessairement un sens physique, mais peuvent servir à construire des filtres plus compliqués.

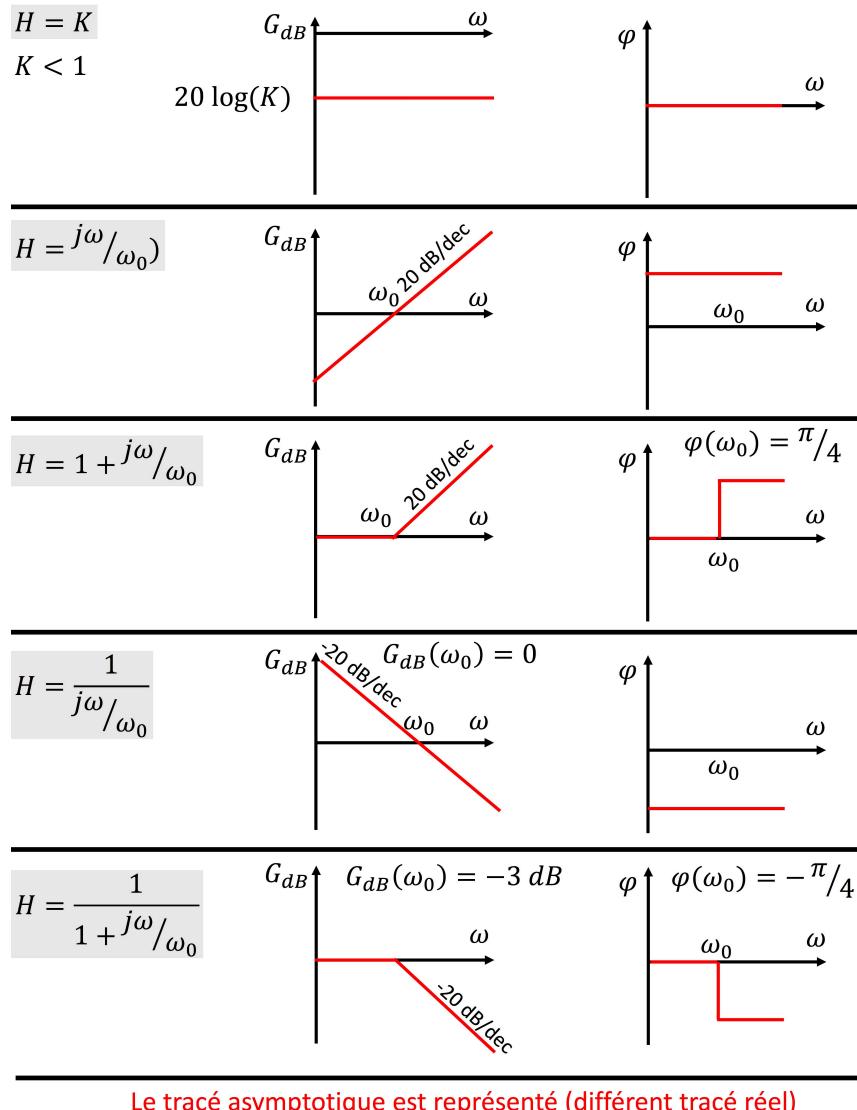


FIGURE 12.6 – Gabarit des filtres passifs du 1er ordre de bases rencontrés



# Chapitre 13

## Filtres d'ordre n

Maintenant que nous savons analyser un filtre simple d'ordre 1 (mais ouiiii), voyons ce qu'il se passe dans des cas de filtres plus compliqués. C'est ici que les notions introduites avec les quadripôles vont prendre tout leur sens.

### 13.1 Les quadripôles

La représentation d'un système sous la forme d'un quadripôle est très utilisée dans toute l'électronique. Par exemple les analyseurs de réseaux se base sur une représentation quadripolaire du système. Pour nous les quadripôles vont nous permettre de mettre ou non en cascade nos filtres.

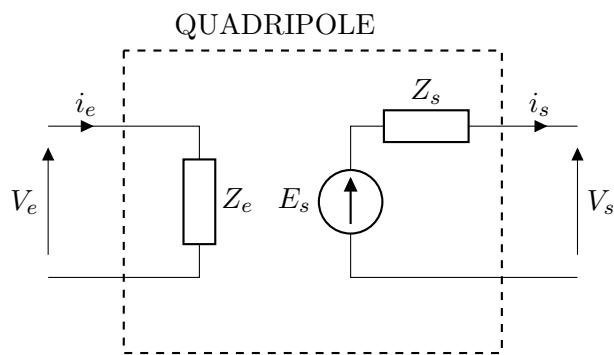


FIGURE 13.1 – Représentation d'un quadripôle.

Un quadripôle peut se représenter (et nous n'utiliserons que cette représentation) sous la forme illustrée dans la figure 13.1. Un quadripôle est alors caractérisé par son impédance d'entrée

$Z_e$ , sa tension à vide  $E_s$  et son impédance de sortie  $Z_s$ . La plupart du temps c'est à nous de déterminer ces 3 paramètres.

Voici une méthode pour déterminer ces paramètres. Nous allons prendre deux exemples pour la mise en application, un circuit avec amplificateur opérationnel (allez voir le chapitre 15) et un filtre RC basique. Ces deux circuits sont représentés sur la figure 13.2.

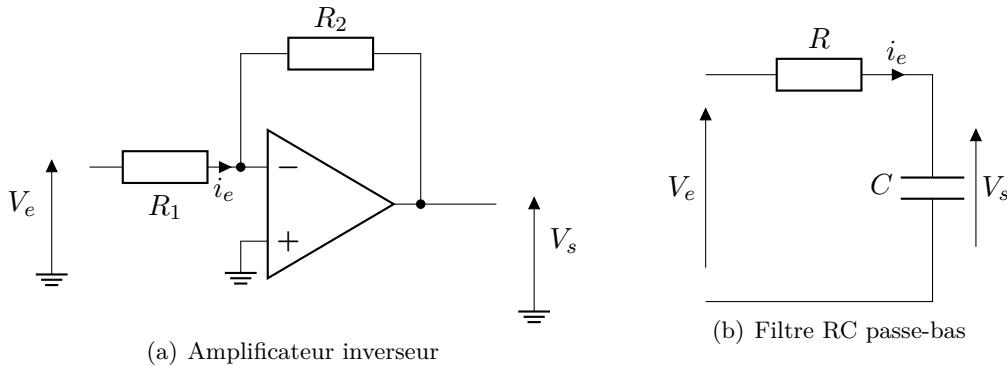


FIGURE 13.2 – Les deux quadripôle d'exemples.

### 13.1.1 Détermination de l'impédance d'entrée $Z_e$

Afin de déterminer l'impédance  $Z_e$  d'entrée du quadripôle, on ne s'occupe que de la partie de gauche (l'entrée) du quadripôle, représentée sur la figure 13.3 (cf. figure 13.1). On cherche l'impédance  $Z_e$  qui pour la même tension  $V_e$  consommerait le même courant  $i_e$  que le circuit, soit :

$$V_e = Z_e i_e, \quad (13.1)$$

donc  $Z_e$  est l'impédance équivalente du circuit.

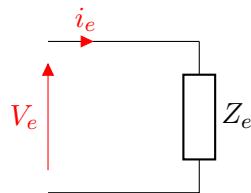
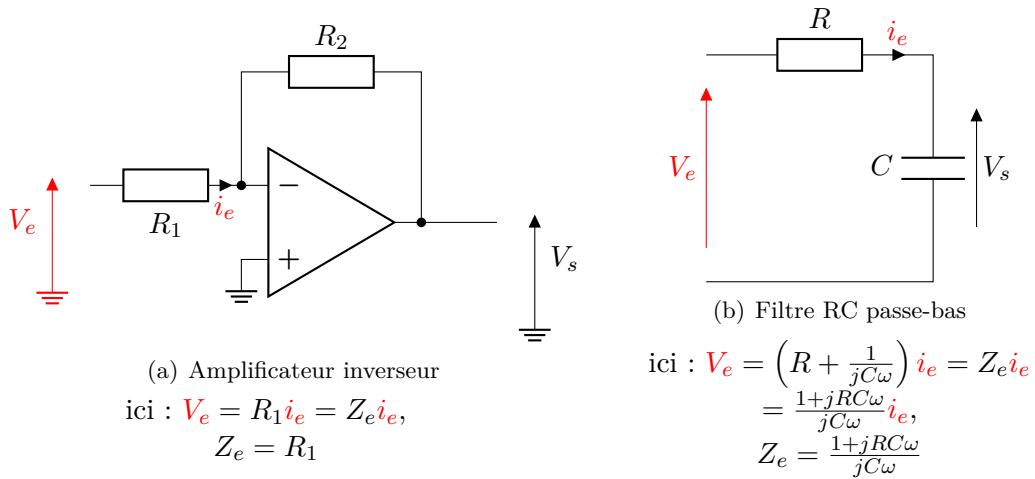


FIGURE 13.3 – Représentation de l'entrée d'un quadripôle.

On trouve pour nos deux exemples les relations de la figure 13.4.

FIGURE 13.4 – Calcul de  $Z_e$  pour les deux quadripôle d'exemples.

### 13.1.2 Détermination de la tension à vide $E_s$

Afin de déterminer la tension à vide de sortie  $E_s$ <sup>1</sup>, on ne s'occupe que de la partie de droite du quadripôle telle que représentée sur la figure 13.5. Par définition,  $E_s$  est la tension à vide, ( $R_L \rightarrow +\infty$ ), dans ce cas en circuit-ouvert  $V_s = E_s$ .

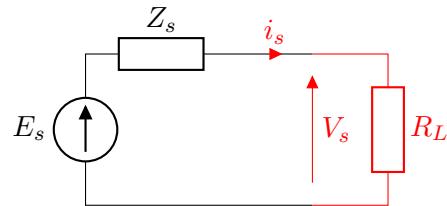
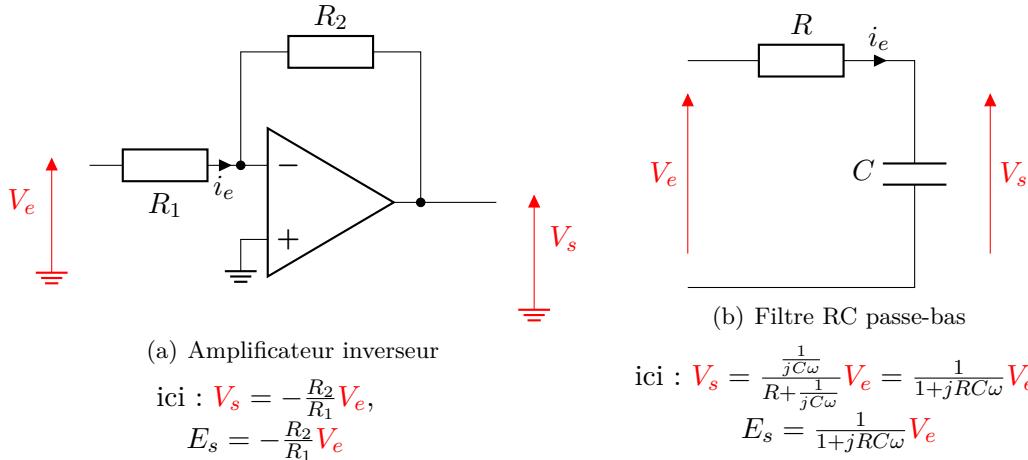


FIGURE 13.5 – Représentation de l'entrée d'un quadripôle.

Pour nos deux exemples, on trouve les solutions données dans la figure 13.6.

1. c'est la tension de Thevenin du générateur en sortie du quadripôle

FIGURE 13.6 – Calcul de  $E_s$  pour les deux quadripôle d'exemples.

Autrement dit, on retrouve la relation  $E_s = H(j\omega)V_e$ , avec  $H(j\omega)$  la fonction de transfert de notre système.  $E_s$  est ce que l'on appelle une source pilotée : elle dépend de  $V_e$  une source extérieure au circuit.

### 13.1.3 Détermination de l'impédance de sortie $Z_s$

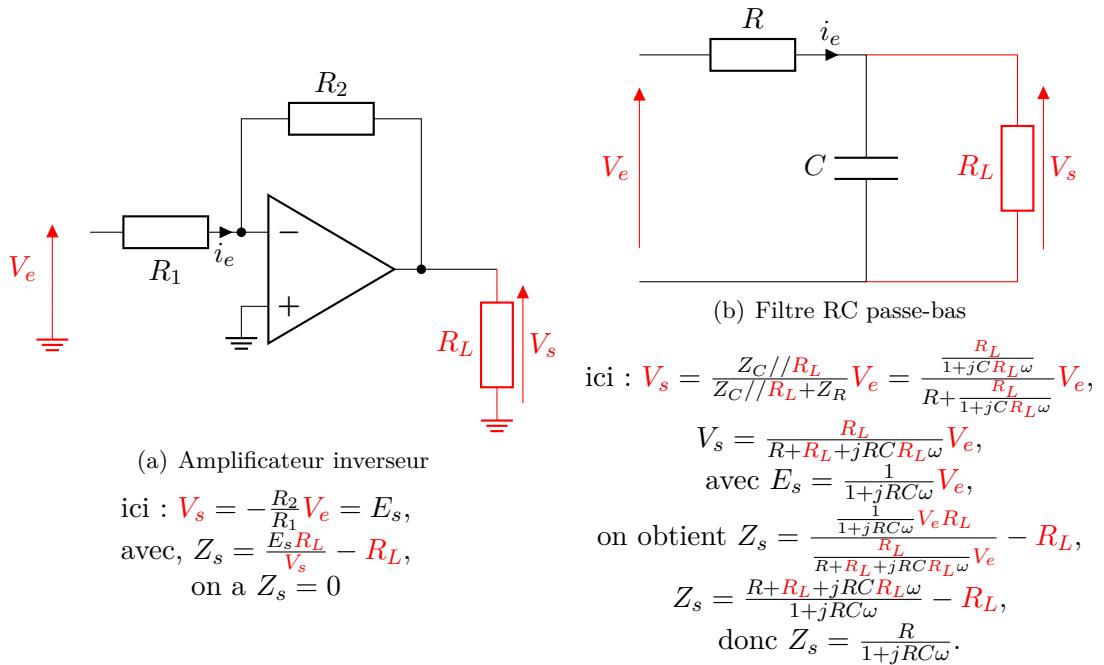
L'impédance de sortie  $Z_s$  est le paramètre le plus difficile à déterminer. Comme précédemment on ne s'occupe que de la sortie du quadripôle. Le but est de trouver  $Z_s$ . En se basant sur le schéma équivalent de la figure 13.5 on a :  $E_s - Z_s i_s = V_s$ , donc  $Z_s = \frac{E_s - V_s}{i_s}$ . Réellement nous allons utiliser la formule du pont diviseur de tension qui est plus pratique :

$$V_s = \frac{E_s R_L}{Z_s + R_L}, \quad (13.2)$$

ou

$$Z_s = \frac{E_s R_L}{V_s} - R_L. \quad (13.3)$$

Pour nos deux exemples, on trouve les solutions données dans la figure 13.7.

FIGURE 13.7 – Calcul de  $Z_s$  pour les deux quadripôle d'exemples.

Connaître les caractéristiques de chacun des quadripôles permet d'identifier s'ils peuvent être mis ou non en cascade (s'ils sont adaptés).

## 13.2 Cascade de filtres et adaptation

Mettons deux filtres caractérisés par les fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$ , en série (on parle également de mise en cascade) (cf. figure 13.8).

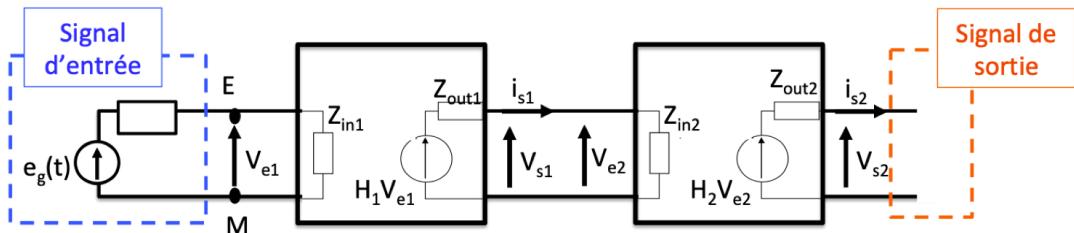


FIGURE 13.8 – cascade de 2 quadripôles

Maintenant, calculons la fonction de transfert  $H$  de l'ensemble, en supposant que le second quadribole n'est pas suivi d'un autre montage ( $I=0$ ).<sup>2</sup>

Spontanément, on voudrait écrire que  $H = H_1 \cdot H_2$ . Mais non...

2. il est dit à vide, soit que le courant en sortie du quadribole est nul,  $i_{s2} = 0$ , et donc l'impédance de sortie  $Z_{out2}$  n'a pas d'influence :  $V_{s2} = H_2 \cdot V_{e2}$

En effet, lorsque l'on considère que  $H = H_1 \cdot H_2$ , on suppose que les fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  sont calculées pour chaque circuit de manière indépendante : on suppose donc que le courant de sortie de chacun des quadripôles est nul. Or, lorsqu'on les connecte ensemble, le second montage va « prélever » du courant au premier montage ( $i_{s1} \neq 0$ )<sup>3</sup> : le simple calcul de  $H_1$  et  $H_2$  ne suffit plus à déterminer la fonction globale. Une autre vision est de considérer que lorsqu'on connecte le montage  $H_2$ , on rajoute des impédances en parallèle avec  $H_1$  : la fonction de transfert  $H_1$  est alors modifiée et ne peut plus être alors calculée seule<sup>4</sup>.

Plusieurs méthodes existent pour gérer cette mise en cascade :

- on isole les deux quadripôles par un montage prélevant la tension  $V_{s2}$  sans appeler de courant au premier montage : c'est un montage tampon appelé « suiveur ». Dans ce cas, on aura bien  $H = H_1 \cdot H_2$ . C'est une méthode simple mais qui nécessite un composant supplémentaire (le suiveur)<sup>5</sup>.
- on prend en compte les impédances de  $H_2$  dans le calcul de  $H_1$  : on voit alors le montage comme un seul quadripôle (un seul filtre) et non une mise en cascade. Cela est facile à faire pour deux montages en cascade, plus complexe dans le cas d'un plus grand nombre. En outre, si on veut changer un élément du montage, il faut tout recalculer.

En se plaçant dans ce cas là (impédances de  $H_2$  prise en compte dans le calcul de  $H_1$ ), il est juste écrire :

$$H = \frac{V_{s2}}{V_{e1}} = \frac{V_{s2}V_{e2}}{V_{e2}V_{e1}} = H_2 H_1 \frac{Z_{in2}}{Z_{in2} + Z_{out1}}$$

On voit donc que la fonction de transfert globale n'est pas le produit des fonctions de transfert uniquement, il y a un pont diviseur de tension (dû aux impédance  $Z_{in2}$  et  $Z_{out1}$ ) qui perturbe ce produit par rapport au cas idéal vu dans le chapitre sur les filtres d'ordre 1.

L'équation précédente montre que si l'on souhaite avoir  $H = H_1 \cdot H_2$  (sans utiliser de suiveur) il faut respecter la condition d'adaptation en tension :  $Z_{in2} \gg Z_{out1}$ . Ainsi les quadripôles devront avoir, dans l'idéal, une forte impédance d'entrée et une très faible impédance de sortie.

Considérons deux filtres RC mis en cascade (cf. figure 13.9), avec  $R_1 = R_2 = R$  et  $C_1 = C_2 = C$ .

Pour déterminer la fonction de transfert de l'ensemble des résistances et capacités, on a plusieurs solutions :

- Soit on calcule  $\frac{V_s}{V_e}$  directement par le calcul<sup>6</sup>

3. dans ce cas, le pont diviseur de tension n'a plus de sens

4. On considère que le circuit 2 n'affecte pas le circuit 1 ce qui n'est pas nécessairement vraie

5. qui fera le sujet du prochain chapitre sur les Amplificateurs Opérationnels

6. en considérant  $R_1$  en série avec  $C_2$ , le tout en parallèle avec  $C_1$ , en d'autre terme  $R_1$  sera en série. On se place dans le cas où  $R_1 = R_2 = R$  et  $C_1 = C_2 = C$ . On aura alors : avec :  $Z_{eq} = (R + \frac{1}{jC\omega}) \frac{1}{jC\omega}$

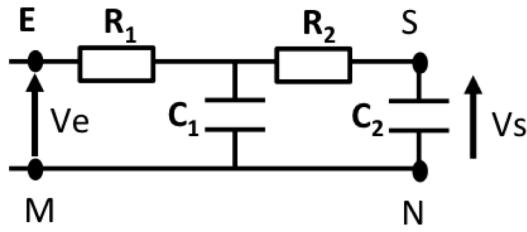


FIGURE 13.9 – exemple de 2 quadripôles en cascade

- Soit on applique le modèle des quadripôles <sup>7</sup>

$$H_1(j\omega) = H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Pour déterminer la fonction de transfert de l'ensemble des résistances et capacités, on a plusieurs solutions :

- Soit on calcule  $\frac{V_s}{V_e}$  directement par le calcul <sup>8</sup>
- Soit on applique le modèle des quadripôles <sup>9</sup>

$$Z_{in2} = \frac{1 + jC\omega}{jC\omega}$$

$$Z_{out1} = \frac{R}{1 + jC\omega}$$

La fonction de transfert globale est donc égale à :

$$H(j\omega) = H_2(j\omega) \frac{Z_{in2}}{Z_{in2} + Z_{out1}} H_1(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

---

7. ce que nous allons faire de suite  
 8. en considérant  $R_1$  en série avec  $C_2$ , le tout en parallèle avec  $C_1$ , en d'autre terme  $R_1$  sera en série. On se place dans le cas où  $R_1 = R_2 = R$  et  $C_1 = C_2 = C$ . On aura alors : avec :  $Z_{eq} = (R + \frac{1}{jC\omega}) \frac{1}{jC\omega}$   
 9. ce que nous allons faire de suite

On retrouve bien le résultat du calcul direct. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité lorsqu'on met un grand nombre de quadripôles en cascade, et que l'on rajoute par exemple un filtre sur un quadripôle existant et déjà dimensionné pour une application sans ce filtre.

### 13.3 filtre en cascade - synthèse

On considère  $n$  systèmes de fonctions de transfert  $H_1, H_2, \dots, H_n$  montés en cascade (cf. figure 13.10)

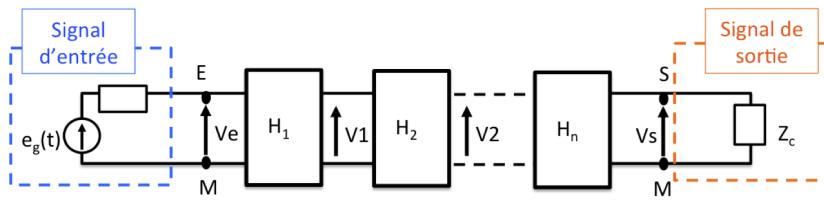


FIGURE 13.10 – cascade de  $n$  quadripôles

Dans le cas où l'on branche des filtres en cascade (cf. figure 13.10), on cherche la fonction de transfert équivalente à nos différents filtres. On a naturellement envie de dire :

$$V_1 = H_1 V_e, \quad V_2 = H_2 V_1 = H_2 H_1 V_e \text{ et } V_s = H_1 \cdot H_2 \dots H_n V_e$$

$$V_s = \prod_{k=1}^n H_k V_e$$

Attention ces relations ont été établies pour un courant de sortie nul ! Ce qui n'est pas forcément le cas lorsque l'on branche une charge à la sortie du filtre (typiquement si cette charge n'est pas infinie). Ceci étant la suite de notre démonstration se place dans le cas de l'adaptation en tension des différents filtres.

La fonction de transfert globale  $H$  s'écrit alors, à cette condition d'être adapté en tension :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = H_1 \cdot H_2 \dots H_n = \prod_{k=1}^n H_k$$

$G$  et  $G_{dB}$  s'écrivent alors :

$$G = \prod_{k=1}^n G_k$$

et

$$G_{dB} = 20 \log(H) = 20 \log\left(\prod_{k=1}^n G_k\right) = \sum_{k=1}^n G_{dB\ k}(dB)$$

Le phase s'écrit alors :

$$\phi = \sum_{k=1}^n \phi_k$$

Au final, le module en dB et la phase de la fonction de transfert globale s'obtiennent en additionnant les modules en dB et les phases des fonctions de transfert de chacun des câblages. Il est alors "facile" de tracer les diagramme de Bode asymptotiques de  $G$  à partir des diagrammes asymptotiques des  $G_k$  en additionnant leur asymptotes.

Prenons l'exemple d'une fonction de transfert de la forme :

$$H = H_1 \cdot H_2 = \frac{A_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{A_2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Et considérons deux filtre du premier ordre, mais de fréquences de coupures différentes ( $\omega_1 = R_1 C_1$  et  $\omega_2 = R_2 C_2$  par exemple). On aura alors les deux fonctions de transfert respectives  $H_1$  et  $H_2$  :

$$H_1 = \frac{A_1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})}$$

et

$$H_2 = \frac{A_2}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$$

Sur la figure 13.11, on a représenté les diagrammes de Bode de  $H_1$  et  $H_2$  (dans le cas où  $\omega_2 < \omega_1$ ), et celui de  $H = H_1 \cdot H_2$ .

Pour le module de  $H$  ou  $G_{dB}$ , on observe 3 tendances :

- (a) pour  $\omega \ll \omega_2$  on a une asymptote horizontale  $G_{dB} = 0dB$
- (b) entre  $\omega_2$  et  $\omega_1$  une pente de  $-20dB/\text{décade}$
- (c) pour  $\omega \gg \omega_1$  une asymptote de pente  $-40dB/\text{décade}$

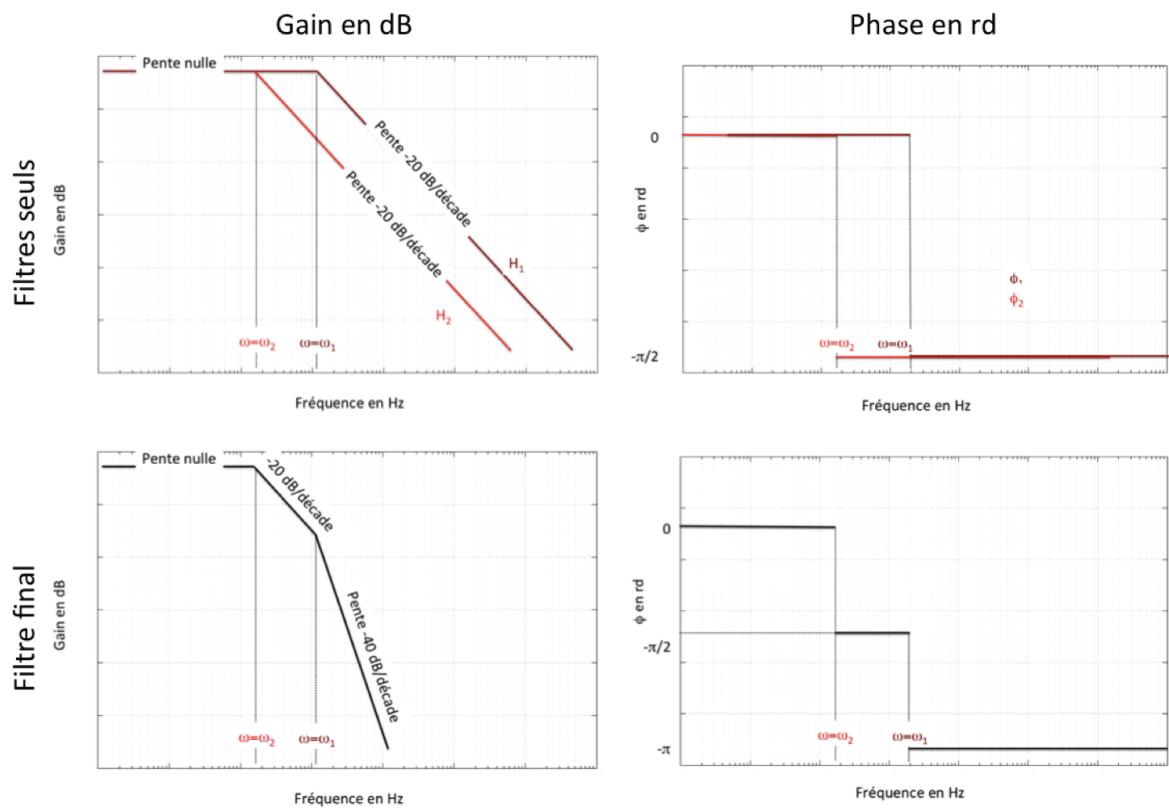


FIGURE 13.11 – gabarit d'un filtre issue de la mise en cascade de filtre passe bas

Pour la phase de  $H$ , de la même manière, on observe 3 tendances :

- (a) pour  $\omega \ll \omega_2$  on a une asymptote horizontale  $\phi = 0$
- (b) entre  $\omega_2$  et  $\omega_1$  un palier  $\phi = -\frac{\pi}{2}$
- (c) pour  $\omega \gg \omega_1$  une asymptote  $\phi = -\pi$

L'allure des courbes réelles se déduit ensuite très simplement à partir des tracés asymptotiques.

## 13.4 les principaux filtres d'ordre 2

Le dénominateur d'une telle fonction est un polynôme de second degré de la variable  $j\omega$ <sup>10</sup>.

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + j^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

On calcule le module et l'argument (dont je vous rappelle que nous extrairons... la phase)<sup>11</sup>

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 2m(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{2m\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}\right)$$

De la même manière que précédemment, les diagrammes asymptotiques sont donnés en étudiant les limites.  $G_0$  étant une constante, nous nous simplifions la vie en la considérant égale à 1 ici.

- (a)  $\omega \ll \omega_0$  alors  $H = 1$  i.e  $G_{dB} = 0dB$ , l'asymptote est horizontale. Le déphasage est  $\phi = 0$ , idem une asymptote horizontale.
- (b)  $\omega \gg \omega_0$  alors  $H = (\frac{\omega}{\omega_0})^2$  i.e  $G_{v dB} = 40\log(\frac{\omega}{\omega_0}) = 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega)$ , l'asymptote est de  $-40dB$  /décade. Le déphasage est  $\phi = -\pi$ , ici il s'agit d'une asymptote horizontale à  $-\pi$

---

10. Si votre mémoire ne vous joue pas de tour, vous devriez reconnaître des éléments introduits dans la partie oscillateur du 2d ordre, mais seulement si votre mémoire est intacte....

11.  $G_0$  est la gain statique, quand  $\omega = 0$

L'étude de la variation réelle du gain et de la phase en fonction de la fréquence montre que trois cas se présentent selon le signe du discriminant du polynôme de second ordre.

— **régime critique**

polynôme de second ordre à deux racines identiques..

$$H = \frac{H_0}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2} = H_0 \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})} \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})}$$

— **régime apériodique**

Le discriminant est positif, le polynôme possède deux racines réelles. Il est donc possible de le décomposer en deux filtres de premier ordre.

$$H = H_0 \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})} \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$$

avec

$$\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$$

et

$$\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$$

Le système revient à la mise en cascade de deux fonctions simples du premier ordre <sup>12</sup>.  
Nous remarquons que :  $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ .

Pour  $\omega = \omega_0$ , le déphasage est de  $-\frac{\pi}{2}$ .

La pulsation de coupure <sup>13</sup> notée  $\omega_c$  est toujours inférieure à  $\omega_2$  <sup>14</sup>. On nomme  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des pulsations de cassures.

— **régime oscillant - système à faible amortissement** Le discriminant est négatif, le polynôme possède deux racines complexes conjuguées notées respectivement :

$$\omega_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

et

$$\omega_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

La fonction de transfert devient donc :

$$H = \frac{G_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q}}$$

12. Comme nous l'avons vu précédemment, les tracés asymptotiques se construisent en ajoutant les tracés des deux fonctions construits séparément

13.  $G = -3dB$  quand on  $\omega = \omega_c$

14. en se plaçant dans le cas où  $\omega_2 > \omega_1$

Q est le facteur de surtension ou facteur de qualité (inversement proportionnel à l'amortissement).

Le module de la fonction de transfert est alors :

$$H = \frac{G_0}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{Q^2}}}$$

Le déphasage est :

$$\phi = -\arctan \left( \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

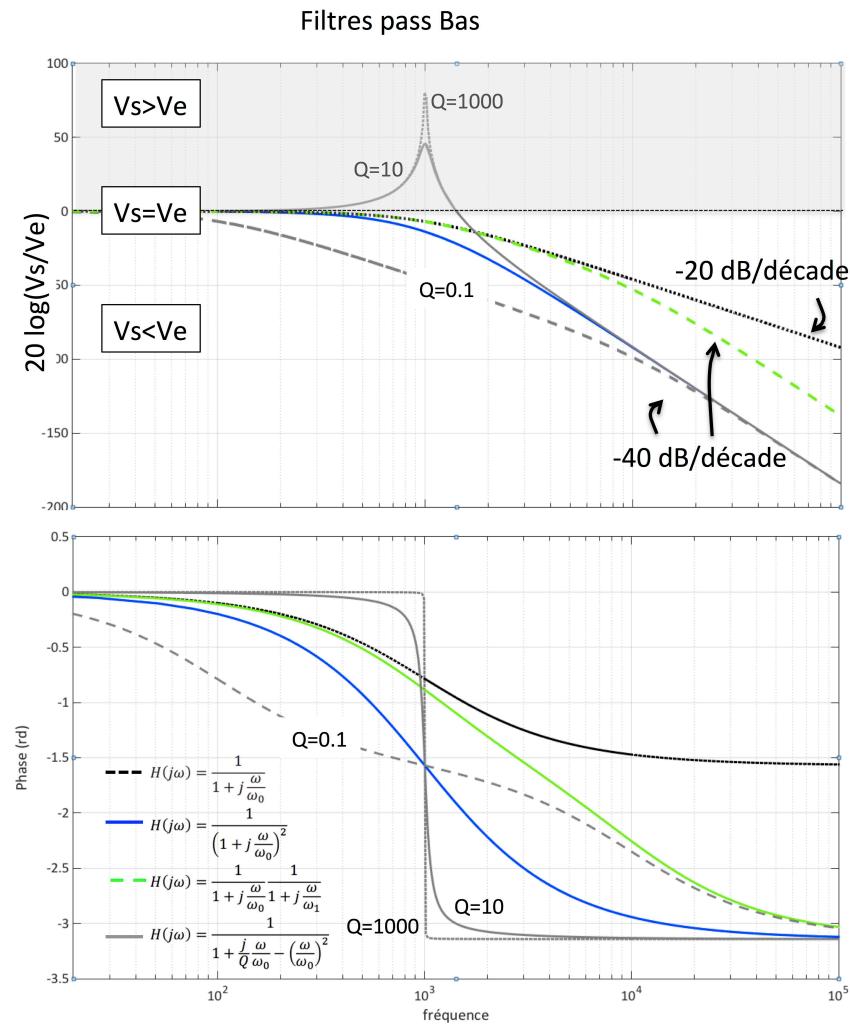


FIGURE 13.12 – diagramme de Bode de filtres passe bas du 1er et du 2d ordre

## Forme canonique de filtres

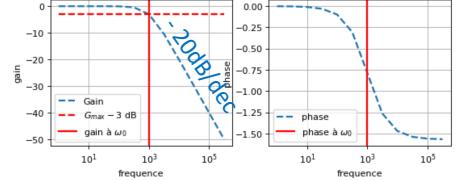
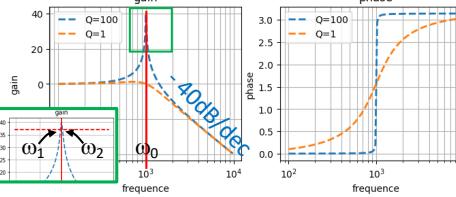
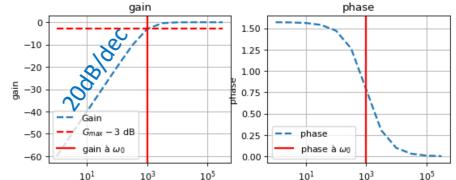
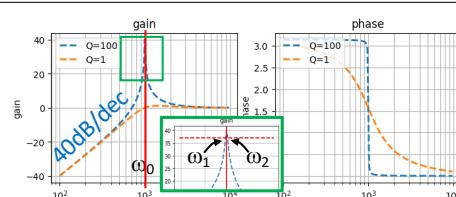
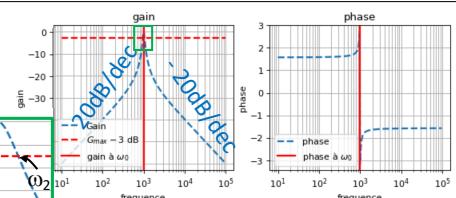
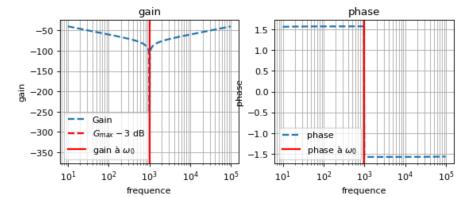
Type	Forme canonique	Bode
Filtre passe bas 1 <sup>er</sup> ordre	$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	 <p><math>\omega_0</math> : pulsation de <u>coupe</u></p>
Filtre passe bas 2 <sup>nd</sup> ordre	$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$	 <p><math>\omega_0</math> : pulsation <u>propre</u>  <math>\omega_1</math> et <math>\omega_2</math> : pulsations de <u>coupe</u> quand <math>Q &gt; 0.7</math></p>
Filtre passe haut 1 <sup>er</sup> ordre	$H(j\omega) = \frac{Kj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	 <p><math>\omega_0</math> : pulsation de <u>coupe</u></p>
Filtre passe haut 2 <sup>nd</sup> ordre	$H(j\omega) = \frac{K(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$	 <p><math>\omega_0</math> : pulsation <u>propre</u>  <math>\omega_1</math> et <math>\omega_2</math> : pulsations de <u>coupe</u> quand <math>Q &gt; 0.7</math></p>
Filtre passe bande	$H(j\omega) = K \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ <p><math>\omega_0</math> : pulsation de <u>résonance</u>  <math>\omega_1</math> et <math>\omega_2</math> : pulsations de <u>coupe</u></p>	
Filtre coupe bande	$H(j\omega) = K \frac{1 + (\frac{j\omega}{\omega_0})^2}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$	 <p><math>\omega_0</math> : pulsation de <u>résonance</u>  <math>\omega_1</math> et <math>\omega_2</math> : pulsations de <u>coupe</u></p>
$Q \text{ le facteur de qualité du circuit, } m = 1/2Q \text{ le coeff d'amortissement}$ $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ $\omega_{1,2} = \omega_0 \left( \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 1} \right)$		

FIGURE 13.13 – diagramme de Bode de filtres passe bas du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>d</sup> ordre



## Chapitre 14

# Système filtrant - Exercices en cours

### Exercice 1 : Filtre RC et tracé d'un diagramme de Bode asymptotique

On considère le circuit figure 14.1 :

1. Déterminez le circuit équivalent à ce circuit vu par la source de  $u_{in} = u_0 \sin(\omega t)$  à très basse fréquence et à très haute fréquence.
2. Sur base de la question 1, déterminez la réponse en courant  $i$  de ce circuit soumis à une excitation sinusoïdale à très haute et très basse fréquence
3. On considère maintenant comme sortie la tension  $u_{out}$ . Donnez alors, sans calculer la fonction de transfert, l'amplitude de  $u_{out}$  à très haute et très basse fréquence, par rapport à l'amplitude  $u_0$  de  $u_{in}$ . les caractéristiques du filtre liant  $u_{out}$  à  $u_{in}$  aux pulsations hautes et basses, ainsi qu'à la pulsation  $\omega_0$ .

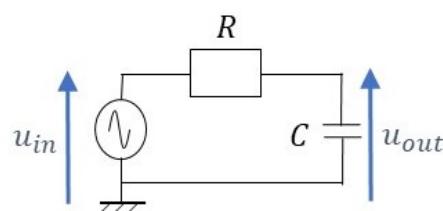


FIGURE 14.1 – Exercice 1 : filtre RC.

4. Par la méthode de votre choix, déterminez la fonction de transfert reliant la sortie  $u_{out}$  à l'entrée  $u_{in}$  et vérifiez les conclusions de la question 3.
5. Dessinez qualitativement le diagramme de Bode en amplitude de ce filtre, en dB, en indiquant l'expression de la pulsation de coupure à  $-3dB$ . On suppose désormais que le condensateur n'est pas idéal et qu'en réalité il se comporte comme une capacité  $C$  en parallèle avec une résistance de fuite  $R_c$ .
6. Dessinez le schéma correspondant en indiquant où se trouvent  $u_{in}$  et  $u_{out}$ .
7. Reprenez les questions 1 à 5 dans ce cas et comparez à chaque fois les résultats par rapport aux résultats obtenus précédemment. On suppose maintenant qu'on branche un oscilloscope au niveau du condensateur (en prenant toujours en compte la résistance  $R_c$ ) pour mesurer  $u_{out}$ . On considère que l'oscilloscope se comporte, vu du circuit, comme une résistance  $R_{in}$  (typiquement de  $1 M\Omega$ ).
8. Dessinez à nouveau le schéma correspondant.
9. Reprenez à nouveau les questions 1 à 5 en comparant les résultats aux résultats précédents, pour analyser l'impact de la résistance  $R_{in}$  liée au branchement de l'oscilloscope. En particulier, discutez à quelle(s) condition(s) on pourra considérer que brancher l'oscilloscope ne modifie pas le comportement du système.

## Exercice 2 : filtre d'ordre 1 - le circuit RC

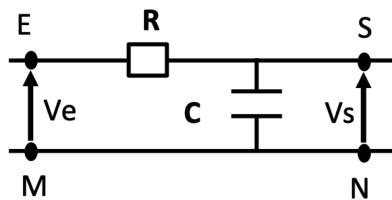


FIGURE 14.2 – Exercice 2 : filtre RC ou cellule RC

On considère le circuit figure 14.2, constitué d'un générateur de fonction délivrant un signal sinusoïdal de la forme :

$$V_e(t) = V_e \sin(\omega t)$$

qu'on pourra mettre sous la forme

$$V_e(t) = V_e \exp(j\omega t)$$

1. Sans calcul, donnez l'allure de ce filtre aux basses ( $\omega - > 0$ ) et hautes fréquences ( $\omega - > \infty$ ).
2. Montrez que sa fonction de transfert,  $H$  peut se mettre sous la forme:

$$H(j\omega) = \frac{V_s(t)}{V_e(t)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (14.1)$$

3. Donnez l'expression de  $\omega_0$ .
4. Calculez la valeur du module de  $H$  et de sa phase
5. Calculez le gain  $G$  pour les hautes et les basses fréquences et le mettre sous la forme  $G = G_0 + \alpha \log(\omega)$  en déterminant la valeur de  $\alpha$  et de  $G_0$
6. Tracez le diagramme asymptotiques d'amplitude et de phase
7. Déterminez la fréquence de coupure, les valeurs asymptotiques, l'atténuation et la phase à la fréquence de coupure.
8. Vérifiez la cohérence entre ce diagramme de Bode et ce que vous avez observé dans la première question.
9. Montrez, en utilisant une loi de maille que la fonction de transfert  $H_R = \frac{U_R}{V_e(t)}$ , avec  $U_R$  la tension aux bornes de la résistance peut se mettre sous la forme:

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_1}{H_2} \quad (14.2)$$

10. Donnez l'expression de  $H_1$  et  $H_2$ .
11. Tracez le diagramme de Bode de  $H_R$  en se rappelant que si  $H = H_1 * H_2$  alors  $G = G_1 + G_2$  et  $\phi = \phi_1 + \phi_2$

### Exercice 3 : filtre d'ordre 1 - le circuit RL

On considère le circuit suivant, figure 14.3, constitué d'un générateur de fonction délivrant un signal sinusoïdal de la forme:

$$e(t) = V_e \sin(\omega t)$$

qu'on pourra mettre sous la forme

$$e(t) = V_e \exp(j\omega t)$$

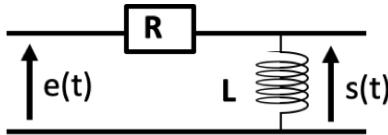


FIGURE 14.3 – filtre RL

1. Sans calcul, donnez l'allure de ce filtre aux basses ( $\omega - > 0$ ) et hautes fréquences ( $\omega - > \infty$ ).

2. Montrez que sa fonction de transfert,  $H$  peut se mettre sous la forme:

$$H(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (14.3)$$

3. Donnez l'expression de  $\omega_0$ .

4. Calculez la valeur du module de  $H$  et de sa phase.

5. Calculez le gain  $G$  pour les hautes et les basses fréquences et mettez-le sous la forme  $G = G_0 + \alpha \log(\omega)$  en déterminant la valeur de  $\alpha$  et de  $G_0$ .

6. Tracez le diagramme asymptotique d'amplitude et de phase.

7. Déterminez la fréquence de coupure, les valeurs asymptotiques, l'atténuation et la phase à la fréquence de coupure.

8. Vérifiez la cohérence entre ce diagramme de Bode et ce que vous avez observé dans la première question.

9. Montrez, en utilisant une loi de maille que la fonction de transfert  $H_R = \frac{U_R}{e(t)}$ , avec  $U_R$  la tension aux bornes de la résistance peut se mettre sous la forme:

$$H_R(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (14.4)$$

10. Tracez le diagramme de Bode de  $H_R$ .

#### Exercice 4 : Apprendre à décoder une fonction de transfert

On considère le filtre dont la fonction de transfert est de la forme:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (14.5)$$

- la fréquence de coupure vaut  $f_c = \frac{\omega_0}{2\pi}$
- aux basses fréquences, le module de la fonction de transfert vaut 1 et le déphasage 90 degrés
- le module de la fonction de transfert aux fréquences élevées vaut pratiquement  $\frac{\omega}{\omega_0}$
- à  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ , le module vaut  $H=1,414$
- le déphasage introduit aux fréquences élevées vaut  $-90$  degrés

### Exercice 5 : Apprendre à lire dans l'espace des fréquence

Un filtre est caractérisé par la courbe de gain en fonction de la fréquence suivante (14.4)

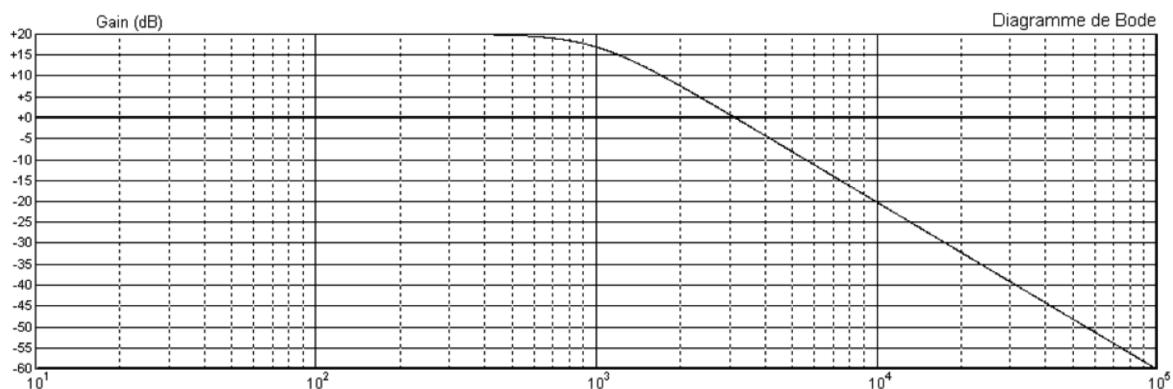


FIGURE 14.4 – gabarit d'un filtre passe bas

- ce filtre est un passe-bas du premier ordre
- la fréquence de coupure est de  $f_c = 1$  kHz
- le module de la fonction de transfert en continu vaut  $H_0 = 20$
- ce filtre est un passe-bas du second ordre
- l'amortissement vaut  $m = 0,2$
- l'amortissement vaut  $m = 0,7$

## Exercice 6 : Lecture d'un diagramme de Bode

On considère un circuit dont on donne le diagramme de Bode (14.5). Il s'agit d'un système ayant comme entrée  $u_{in}$  et comme sortie  $u_{out}$  (c'est donc le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $u_{out}/u_{in}$ ).

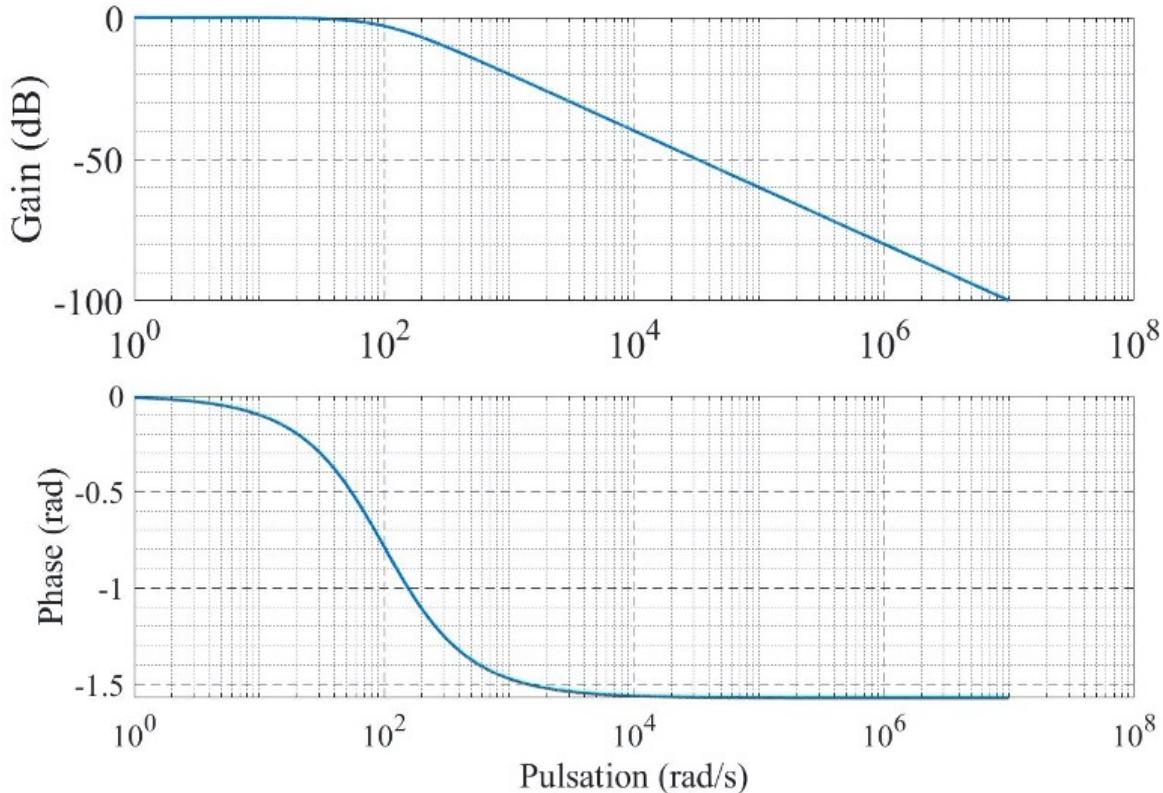


FIGURE 14.5

1. On impose une entrée sinusoïdale  $u_{in} = u_0 \sin(\omega t)$  d'amplitude 2V à la pulsation  $\omega = 1000$  rad/s. Que vaut la tension de sortie  $u_{out}$  en régime permanent ? Vous indiquerez l'expression de  $u_{out}(t)$  et les valeurs d'amplitude et de phase correspondantes.
2. De quel facteur  $u_{out}$  est-il atténué par rapport à  $u_{in}$  ?
3. De combien de temps le signal  $u_{out}$  est-il en retard par rapport à  $u_{in}$  ?
4. Vous vous demandez s'il s'agit d'un circuit LR ou d'un circuit RC. On vous dit la résistance utilisée est  $R = 100$  k $\Omega$ . A l'aide d'une réflexion sur les ordres de grandeurs et d'une lecture du diagramme de Bode, trouvez s'il s'agit d'un circuit LR ou d'un circuit RC.

## Exercice 7 : Circuit résonant

Le filtre ci-dessous (14.6) est un filtre dit sélectif. On donne  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0.5 \text{ mH}$  et  $C = 2 \mu\text{F}$ .

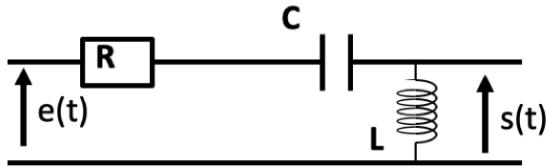


FIGURE 14.6 – circuit RLC

1. Sans calcul, donnez l'allure de ce filtre (cf fig 14.6) aux basses et hautes fréquences.

2. Calculez sa fonction de transfert, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{Q\omega} - (\frac{\omega_0}{\omega})^2}$$

3. Déterminez la fréquence  $\omega_0$ .

4. Calculez l'atténuation et la phase à la fréquence de coupure.

5. Calculez le gain  $G$  pour les hautes et les basses fréquences et le mettre sous la forme  $G = G_0 + \alpha \log(\omega)$  en déterminant la valeur de  $\alpha$  et de  $G_0$

6. Tracez le diagramme de Bode asymptotique.

7. A quelle fréquence  $s(t)$  et  $e(t)$  sont elles en phase ?

## Exercice 8 : filtre d'ordre 1 - rien de bien difficile

Le filtre ci-dessous (14.7) est un filtre dit à avance de phase. On donne  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$  et  $C = 1 \mu\text{F}$ .

1. Sans calcul, donnez l'allure de ce filtre aux basses et hautes fréquences.

2. Montrer que sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme:

$$H(j\omega) = K \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \quad (14.6)$$

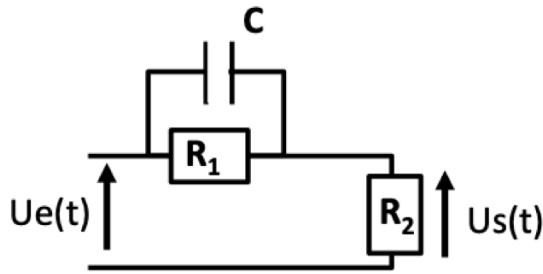


FIGURE 14.7 – filtre RCR

3. Donnez les expressions de  $a$ ,  $\tau_1$  et de  $\tau_2$ .
4. Tracez le diagramme asymptotiques d'amplitude et de phase
5. Déterminez les fréquences de coupure, l'atténuation et la phase à ces fréquences de coupures.
6. Calculez la valeur de la pulsation correspondant au maximum de déphasage entre  $U_e$  et  $U_s$

### Exercice 9 : Filtre d'ordre 2, un chouilla plus compliqué

Le filtre représenté fig.14.8 est un filtre dit à avance de phase. On donne  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$  et  $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$ .

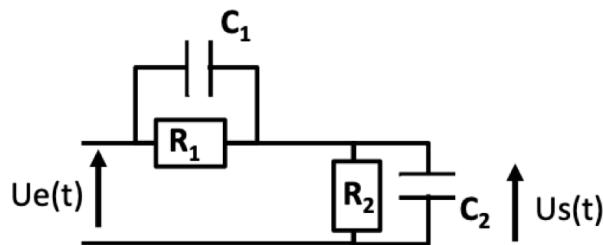


FIGURE 14.8 – mise en cascade de filtres

1. Etude en régime continu  $e(t) = E = \text{constante}$ 
  - (a) Redessiner le circuit en régime continu
  - (b) Exprimer  $U_s$  en fonction des paramètres du circuit

- (c) Calculer le générateur de Thevenin équivalent ( $E_{Th}$  et  $R_{Th}$ ) entre A et B.
- (d) Calculer la puissance dissipée dans une résistance de charge  $R_L$  placée entre A et B.
2. Etude en régime variable
- $U_e(t)$  est de la forme :  $U_e(t) = E \cos(\omega t)$  et  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + f)$
- Exprimer la tension  $e(t)$  et  $i(t)$  sous leur forme complexe.
  - Comment s'exprime l'amplitude complexe de  $e(t)$  et de  $i(t)$  respectivement ?
  - Exprimer  $I_0$  et  $f$  en fonction des paramètres du circuit (on se placera dans le cas où  $R_1 = R_2, C_1 = C_2$ ).

### Exercice 10 : Mise en cascade de filtre - quid de l'adaptation

Soit le montage représenté sur la figure ci-dessous (14.9). On se place dans le cadre du régime permanent sinusoïdal

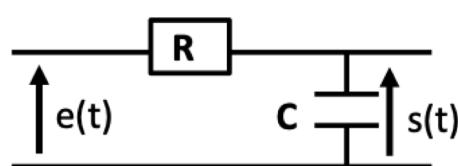


FIGURE 14.9 – circuit RC

- Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega) = \frac{V_{s1}}{V_e}$  de ce montage.
- Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants.

Soit le montage de figure (14.10), formé de la mise en cascades de deux quadripôles étudiés précédemment. On cherche à calculer sa fonction de transfert  $H_1(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ . Calculez la fonction de transfert  $H_1 = H * H$

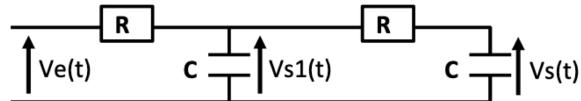


FIGURE 14.10 – filtre RC cascadé avec un filtre RC

Pour cela chercher le générateur équivalent de Thevenin aux bornes de C.

1. A l'aide de transformation de source, mettre le circuit de la figure 14.10 sous la forme d'un générateur de tension  $e_{th}$  en série avec une impédance équivalente  $Z_{eq}$  (cf 14.11).

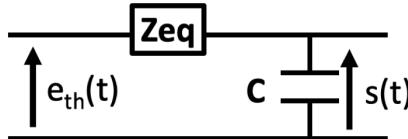


FIGURE 14.11 – circuit Thevenin équivalent

2. Que valent  $e_{th}$  et  $Z_{eq}$
3. A partir du pont diviseur de tension, calculez la fonction de transfert  $H_0 = \frac{V_s}{V_e}$ , et la mettre sous la forme
- $$\frac{1}{1 + 3j\frac{\omega}{\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (14.7)$$
- que vaut  $\omega_0$  ?
4. Montrer qu'on peut écrire  $H_0$  sous la forme

$$\frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})} \quad (14.8)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont à déterminer en fonction de  $\omega_0$  ?

5. Tracer alors les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants.
6. Comparer  $H_0$  et  $H_1$ , que pouvez vous en conclure ?

## **Troisième partie**

# **Amplificateurs Opérationnels - Filtre Actifs**



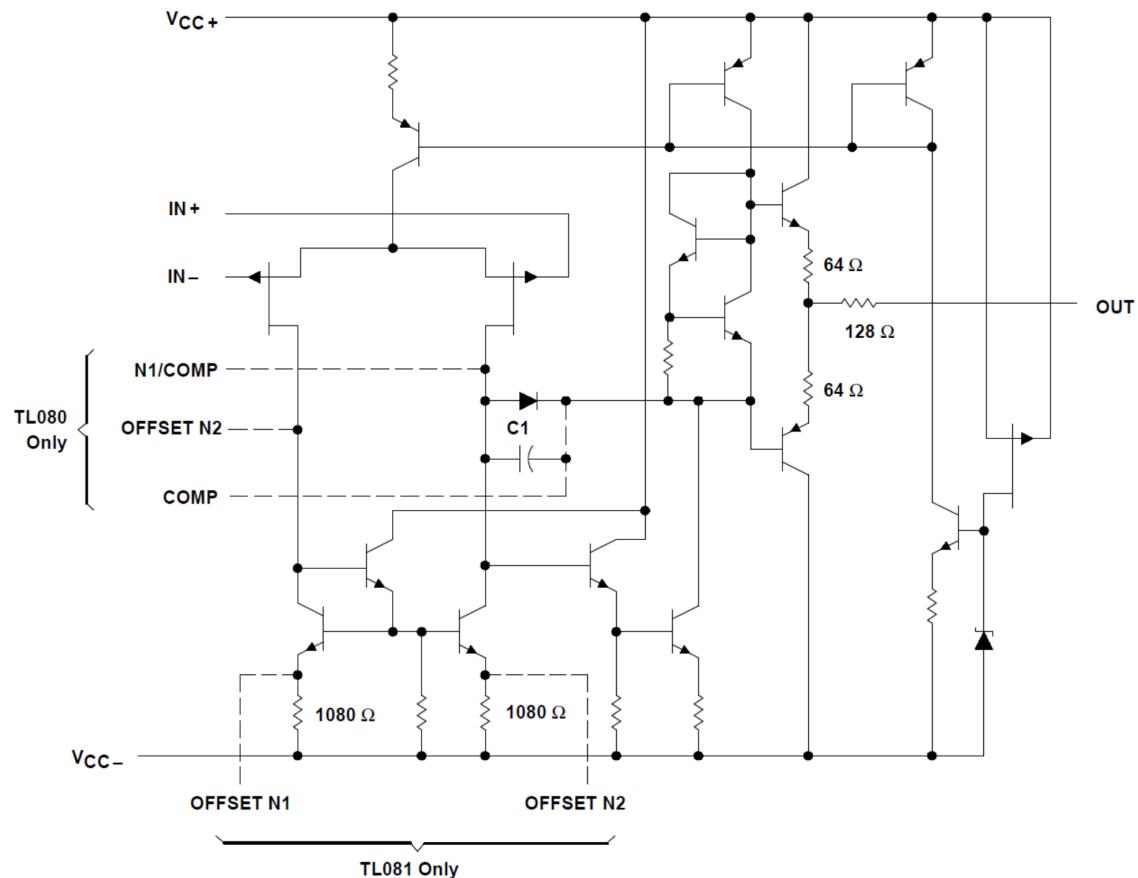
## Chapitre 15

# L'amplificateur Opérationnel

LE BUT de ce chapitre, n'est pas de vous présenter l'Amplificateur Opérationnel (ou ampli. Op. ou encore AO pour les intimes) en détails. Nous nous contenterons de vous définir son mode de fonctionnement (ou plus exactement ses deux modes de fonctionnement), ainsi que les principaux montages dans lesquels il est impliqué. Il restera donc *une boîte noire magique* pour vous. Pour ne pas vous frustrer quand même, voici sur la figure 15.1 ce qu'il y a dans l'ampli. que vous allez utiliser en salle de TP (le TL081). Il y a plein de composants que vous n'avez pas vu (et que vous ne verrez cette année) : des transistors bipolaires, des transistors à effet de champ.

Rien ne vous empêche d'approfondir vos connaissances par vous-mêmes sur ce composant (si vous êtes curieux et impatients, allez jeter un oeil sur <https://fr.wikibooks.org/wiki/Électronique/>), mais le but ici est de vous faire faire connaissance ! De plus afin d'apprécier le fonctionnement et l'utilité d'un amplificateur opérationnel, il n'est nul besoin d'aller trop loin dans sa description.

schematic (each amplifier)

FIGURE 15.1 – Schéma interne d'un amplificateur TL081 (tiré de la *datasheet*)

## 15.1 Théorème de Millman

Je ne vous ai pas introduit le théorème de Millman, dans la mesure où les transformations de sources et les lois de Kirchoff étaient largement suffisantes pour vous faire apprécier les circuits de bases en électronique.

Dans le cas des AO, l'utilisation du théorème de Millman est pratiquement inévitable et permet souvent d'obtenir rapidement la solution des problèmes relatifs aux AO idéaux (patience je vous en parle dans quelques paragraphes...).

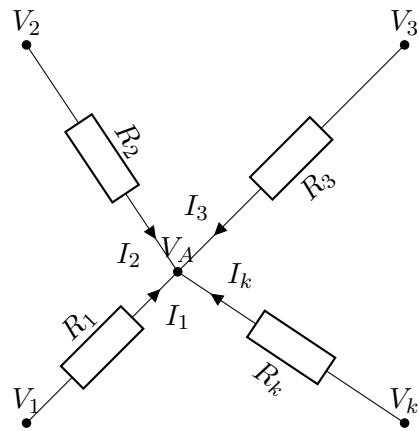


FIGURE 15.2 – théorème de Millman ou loi des noeuds améliorées

THÈMORÈME DE MILLMAN : On considère un noeud A auquel aboutissent k branches (cf. figure 15.2). Les potentiels  $V_n$  des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence  $V_{ref}$ . Soit  $R_n$  la résistance de la branche n, la loi des noeuds s'écrit :

$$\sum_{n=1}^k i_n = i_1 + i_2 + \dots + i_k = 0$$

ou encore

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \dots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

soit

$$V_A \sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n} = \sum_{n=1}^k \frac{V_n}{R_n}$$

Le potentiel du point A s'écrit par rapport au potentiel de référence  $V_{ref}$  (par rapport auquel tous les autres potentiels  $V_n$  sont référencés) :

$$V_A = \frac{\sum_{n=1}^k \frac{V_n}{R_n}}{\sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n}}$$

ATTENTION : Ne pas oublier de faire apparaître au dénominateur les branches dont le potentiel à l'extrémité est nul !

## 15.2 Généralités (on commence toujours par cela)

L'AO est un composant actif, il a donc besoin d'être alimenté en tension pour fonctionner (ne pas confondre l'alimentation et les signaux d'entrée que nous chercherons à analyser). Voyez cela comme votre télé, elle à besoin d'être branchée à la prise de courant (c'est son alimentation) pour vous afficher des images (ce sont ses signaux).

Un AO est typiquement composé de deux broches d'alimentation ( $V_{CC-}$  et  $V_{CC+}$ ), deux entrées de signaux ( $e_-$  et  $e_+$ ) et d'une sortie ( $s$ ) comme représentées sur la figure 15.3). L'entrée notée  $e_+$  est dite non-inverseuse tandis que l'entrée  $e_-$  est dite inverseuse, ceci en raison de leur rôle respectif dans les relations entrée/sortie de l'amplificateur. La différence de potentiel entre ces deux entrées ( $e_+ - e_-$ ) est appelée tension différentielle d'entrée.

La broche d'alimentation positive est souvent repérée par  $V_{CC+}$  ( $V_{DD}$ ,  $V_{CC}$ , ou  $V_{S+}$ ), alors que la broche d'alimentation négative est elle repérée par  $V_{CC-}$  ( $V_{EE}$ ,  $V_{SS}$ , ou  $V_{S-}$ ).

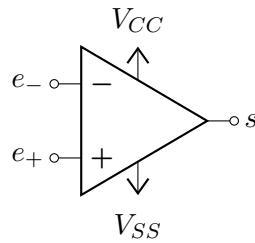


FIGURE 15.3 – brochage d'un Amplificateur Opérationnel.

### L'AO idéal ou parfait :

La notion d'amplificateur opérationnel parfait ou idéal implique un fonctionnement théorique de l'amplificateur opérationnel. On entend par cela<sup>1</sup> :

- une impédance d'entrée infinie
- une impédance de sortie nulle
- une tension d'offset = 0 V
- un courant de polarisation = 0 A
- un gain différentiel  $A_v$  constant

Ces caractéristiques traduisent le fait que l'amplificateur opérationnel parfait ne perturbe pas le signal qu'il va amplifier et que sa tension de sortie dépend uniquement de la différence de tension entre ses deux entrées  $e_+$  et  $e_-$ .

L'AO peut alors s'utiliser dans deux régimes :

- RÉGIME LINÉAIRE : la sortie  $s$  est proportionnelle à la tension différentielle  $(e_+ - e_-)$ ,  $s = A_v(e_+ - e_-)$ , ce gain est très grand, et donc il est nécessaire d'avoir  $e_+ \approx e_-$  si l'on ne veut pas que la sortie soit saturée (cf. régime saturé). Cette condition est remplie grâce à une rétroaction (retour de tension) sur l'entrée négative.
- RÉGIME SATURÉ : Le gain  $A_v$  intrinsèque de l'AO a une valeur très très grande (de l'ordre de  $10^6$  au minimum). Par conséquent si  $(e_+ - e_-) \neq 0$  alors la tension en sortie doit être tellement grande que l'AO ne peut pas la fournir. Elle va être égale à la tension de saturation de l'AO (tension maximale que peut fournir l'AO) :  $s = \pm V_{sat}$ . De manière générale cette tension est différente, inférieure, à la tension d'alimentation (qui est la tension maximale accessible par l'AO). Pour simplifier l'étude nous supposerons que tout les AO ont  $\pm V_{sat} = V_{CC\pm}$  (ces AO sont appelés *rail to rail*).

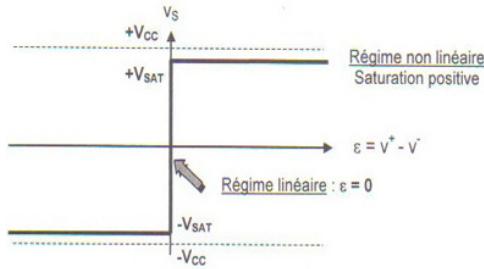


FIGURE 15.4 – Caractéristique entrée-sortie d'un AO parfait ou idéal

La caractéristique d'un AO parfait est représentée sur la figure 15.4. On constate que la plage dite « linéaire » (quand  $(e_+ - e_-) \neq 0$  mais que  $V_s \neq \pm V_{sat}$ ) est nulle (ou pratiquement nulle). Pour rappel, la pente de cette plage linéaire est le gain  $A_v$  de l'AO.

### L'AO réel :

Comme pour les sources de puissance, afin de décrire au mieux la réalité, au modèle parfait il faut rajouter des notions. Pour les AO c'est pareil. Nous n'allons pas rentrer dans les détails mais si vous ne devez retenir que deux choses au sujet des AO réels ce sont :

- LE MODE COMMUN : l'AO ne fait pas qu'amplifier la différence de potentiel  $(e_+ - e_-)$  mais en réalité la sortie  $s$  est  $s = A_v (e_+ - e_-) + A_{MC} \frac{(e_+ + e_-)}{2}$ . Bien entendu le gain  $A_{MC}$  de mode commun est toujours cherché à être minimisé. La qualité d'un AO est souvent caractérisé (entre autre) par le Taux de Réjection de Mode Commun (TRMC =  $A_v/A_{MC}$ ) qui doit être le plus élevé possible.

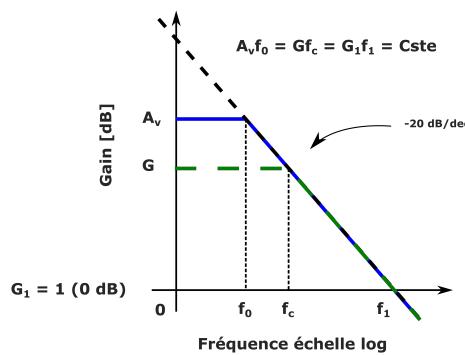


FIGURE 15.5 – Variation de la bande-passante en fonction du gain

- LE PRODUIT GAIN X BANDE-PASSANTE : L'AO réel est limité par ses composants internes qui ont besoin de temps pour réagir aux différentes variations en entrée et ne peuvent

1. Je ne vous ai retenu que ce qui nous semblait essentiel, cela implique en réalité beaucoup d'autres choses.

pas fournir une puissance infinie. Ces composants forment en première approximation une structure du premier ordre (un filtre passe-bas d'ordre 1) qui sera la limite intrinsèque ultime à l'AO. Tout cela pris en compte introduit une caractéristique importante de l'AO, le produit gain fois bande-passante (souvent noté  $G\Delta\omega$ ) est une constante. Cela signifie que l'AO ne peut pas amplifier toutes les fréquences avec le même gain. Cette caractéristique est souvent mentionnée avec l'intitulé « bande-passant pour un gain unité », ou *Unity-gain bandwidth* en anglais, les constructeur donne en fait la bande-passante pour un gain  $G = 1$  (montage suiveur, cf. section 16.1.1). Ainsi garder en tête que si vous souhaitez amplifier fortement une grande plage de fréquence il vous faudra surement plusieurs amplificateurs. Pour illustrer ces propos la figure 15.5 représente 3 cas de gains différents : gain en boucle ouverte (gain  $A_v$  total de l'AO), un gain  $G$  quelconque et le gain unité.

### 15.3 Régime saturé

L'absence de rétroaction sur l'entrée  $e_-$  (contre-réaction) ou une rétroaction sur l'entrée non-inverseuse ( $e_+$ ) permet d'effectuer une rétroaction positive : toute augmentation de la tension de sortie va augmenter la tension différentielle d'entrée de l'AOP. Cette rétroaction de l'AO amènera l'amplificateur à saturation (positive ou négative suivant le signal appliquée en entrée). On parle alors de mode comparateur (ou saturé) car la moindre différence entre  $e_+$  et  $e_-$  va impliquer une tension de sortie égale à la tension de saturation (on compare donc  $e_+$  avec  $e_-$ ).

Le montage le plus courant dans ce régime est la *bascule de Schmitt* (ou *trigger de Schmitt*). Une bascule est une porte logique, à deux états en sortie, un état haut (ici  $V_{sat+}$ ) et un état bas ( $V_{sat-}$ ). Un exemple de schéma de câblage d'un trigger de Schmitt est représenté sur la figure 15.6.

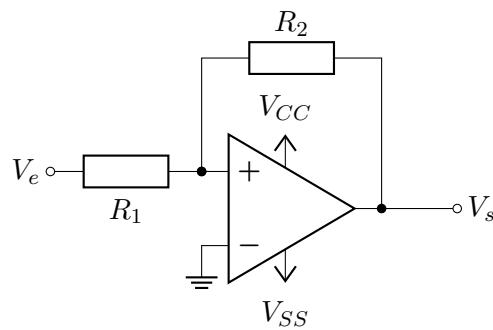


FIGURE 15.6 – Schéma d'un trigger de Schmitt

### 15.3.1 Étude de cas : le trigger de Schmitt

Pour le schéma de la figure 15.6, on calcul la différence de tension  $V_{\text{diff}} = e_+ - e_-$ , en entrée de l'AO<sup>2</sup> :

$$V_{\text{diff}} = e_+ - e_- = e_+ = V_e \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (15.1)$$

Prenons le cas initial où la tension  $V_s = 0$ ,  $V_e \neq 0$  alors  $V_{\text{diff}}$  n'est pas nulle. Cela implique que la sortie devient non nulle :  $V_s = A_v V_{\text{diff}} \neq 0$ , ce qui aura pour effet d'augmenter la tension  $V_{\text{diff}}$ , qui à son tour va faire augmenter la tension de rétroaction  $V_s$ , et ainsi de suite. Au final la tension arrive très vite à la tension de saturation de l'AO, alors même que la tension  $V_e$  n'a pas bougé.

Une fois l'AO à saturation, pour annuler la tension différentielle  $V_{\text{diff}}$  et sortir de la saturation, il faut que la tension  $V_e$  soit égale à :

$$V_e = -V_s \frac{R_1}{R_2} = -V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_2} \quad (15.2)$$

À ce moment la tension  $V_s$  n'est plus à saturation ( $V_{\text{diff}} = 0 \implies V_s = 0$ ). On se retrouve avec les conditions initiales précédentes mais une tension  $V_e$  de signe opposé. Par conséquent l'AO retourne à la saturation (mais cette fois la saturation de signe opposée).

Suivant le signe de  $V_s$ , on peut donc définir une tension de basculement positive  $V_{T+}$  faisant passer la sortie  $V_s$  de  $-V_{CC}$  à  $+V_{CC}$ , et une tension de basculement négative  $V_{T-}$  faisant passer  $V_s$  de  $V_{sat+}$  à  $V_{sat-}$ . Si  $V_{sat+} = V_{CC}$  et  $V_{sat-} = V_{SS}$ , alors on a la tension de basculement positive

$$V_{T+} = V_{CC} \left( \frac{R_1}{R_2} \right),$$

et la tension de basculement négative

$$V_{T-} = V_{SS} \left( \frac{R_1}{R_2} \right),$$

avec  $T$  pour *threshold*, signifiant seuil en anglais.

C'est pour cela que cette bascule est dite à seuils, il faut que le signal en entrée dépasse un certain niveau (seuil) pour que la bascule change d'état. Cette caractéristique est représentée sur la figure 15.7, où l'on peut voir l'hystérésis<sup>3</sup> du système.

2. pour cela on utilise le théorème de Millman en  $e_+$ , voir section 15.1

3. l'hystérésis est le fait que la réponse (courbe) n'est pas la même (ne se superpose pas) lorsque la tension balaie du + vers le - de se superpose pas à celle lorsque la tension balaie du - vers le +

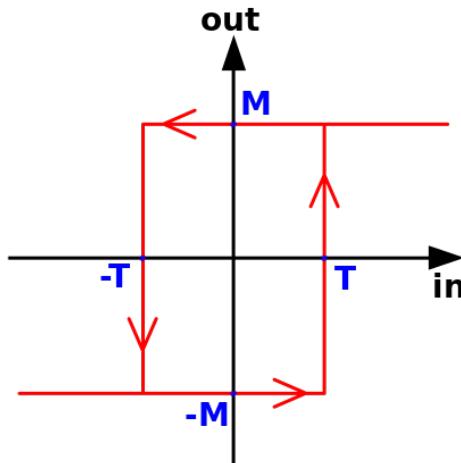


FIGURE 15.7 – Caractéristique entrée ( $in = e^+ - e^-$ ) sortie ( $out = V_s$ ) d'un trigger de Schmitt

## 15.4 Régime linéaire

Si on désire que la tension de sortie de l'amplificateur ne soit pas uniquement égale à  $\pm V_{sat}$  (suivant le signe de la différence de potentiel entre les deux entrées de l'amplificateur), il faut utiliser une contre-réaction sur l'entrée  $e^-$  (cf. figure 15.8<sup>4</sup>). La contre-réaction sur l'entrée inverseuse  $e^-$  (ou rétroaction négative) d'un AOP permet de réduire la différence de tension en entrée de l'amplificateur grâce à une partie de la tension de sortie. La contre-réaction permet de garder une différence de potentiel proche de 0 en entrée de l'amplificateur.

On parle alors de régime linéaire car on toujours l'équation

$$V_s = A_v \epsilon = A_v(e_+ - e_-), \quad (15.3)$$

de vérifiée<sup>5</sup>. On peut alors faire varier la tension de sortie entre  $+V_{sat}$  et  $-V_{sat}$  suivant la tension appliquée en entrée de l'amplificateur.

### 15.4.1 Étude de cas : montage amplificateur non-inverseur

L'un des montages les plus courant à base d'AOP est le montage amplificateur non-inverseur. Ce montage est représenté sur la figure 15.8, l'AO est ici considéré comme idéal et en régime linéaire, ce qui implique (pour rappel) :

- l'impédance d'entrée  $Z_e$  entre  $e_+$  et  $e_-$  est infinie

4. Notez que nous n'avons pas représenté les entrées d'alimentation de l'AO afin de simplifier le schéma.

5. car en réalité  $(e_+ - e_-) = \epsilon \rightarrow 0$  ce qui implique que  $V_s = A_v \epsilon$  reste petit ( $< \|V_{sat}\|$ )

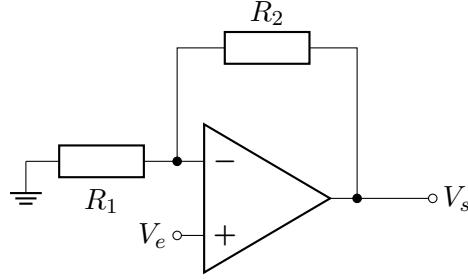


FIGURE 15.8 – exemple de montage en régime linéaire (non-inverseur)

- donc les courants  $i_+$  et  $i_-$  sont nuls
- $e_+ = e_-$  (régime linéaire).

On sait que  $V_s = A_v \epsilon = A_v(e_+ - e_-)$ ,  $e_+ = V_e$  et en appliquant Millman sur  $e_-$

$$e_- = \frac{\frac{V_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 V_s}{R_1 + R_2}. \quad (15.4)$$

Donc  $V_s = A_v(V_e - \frac{R_1 V_s}{R_1 + R_2})$  et en réarrangeant on obtient :

$$V_s \left( 1 + \frac{A_v R_1}{R_1 + R_2} \right) = A_v V_e. \quad (15.5)$$

Enfin on trouve

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{A_v}{1 + \frac{A_v R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{A_v (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + A_v R_1} = \frac{R_1 + R_2}{\frac{R_1 + R_2}{A_v} + R_1} \quad (15.6)$$

$$= \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{A_v R_1}}. \quad (15.7)$$

On voit que si le gain  $A_v$  de l'AO est très élevé (ce qui est le cas), alors on a  $\frac{R_1 + R_2}{A_v R_1} \ll 1$  (à une condition près que l'on verra juste après). Au final on trouve avec cette approximation

$$V_s = V_e \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = G V_e, \quad (15.8)$$

on a bien une amplification de gain  $G$  entre la sortie  $V_s$  du montage et son entrée  $V_e$ .

Revenons à notre approximation précédente. Utilisons la notation  $G = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$  alors on a (sans approximation)

$$V_s = V_e \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{A_v R_1}} = V_e \frac{G}{1 + \frac{G}{A_v}}. \quad (15.9)$$

Notre approximation précédent  $\frac{R_1+R_2}{A_v R_1} = \frac{G}{A_v} \ll 1$  est tout simplement vérifié si le gain  $G$  du montage est largement inférieur à celui intrinsèque à l'AO ( $A_v \approx 10^6$ )<sup>6</sup>. Si ce n'est pas le cas il faut prendre en compte la formule générale.

*N.B. :* Pour tous les calculs de montage amplificateur en régime linéaire, si vous êtes raisonnable sur le gain voulu, pour vous faciliter la vie, vous pouvez directement prendre  $e_+ = e_-$  (ce qui est équivalent à l'approximation précédente)<sup>7</sup>.

MÉTHODE DE CALCUL des montage à AOP **en régime linéaire** : pour tous les calculs de ce type de montages nous nous placerons dans l'approximation d'un gain faible en comparaison à celui de l'AO. Afin de trouver la fonction de transfert  $\frac{V_s}{V_e}$ , on calcule avec le théorème de Millman indépendamment  $e_+$  et  $e_-$ , puis on pose  $e_+ = e_-$ .

6. Autrement dit si le montage amplificateur à un gain inférieur ou de l'ordre de  $10^5$

7. Refaites les calculs du montage précédent en utilisant directement  $e_+ = e_-$ , ou  $e_+ - e_- = 0$ , à la place de  $V_s = A_v(e_+ - e_-)$



# Chapitre 16

## Les montages de base avec des AO en régime linéaire

Nous allons voir ici les principaux montages de base des AO. Il en existe une infinité mais le principe restera le même.

### 16.1 Les montages amplificateurs

#### 16.1.1 Suiveur - adaptation en tension

C'est le montage le plus utile pour mettre en cascade des cellules électroniques (filtres RC, CR, etc.), adapter l'impédance de certains circuits sensibles (détecteurs, micro-contrôleur, etc.). L'amplificateur n'a qu'un gain :

$$G = 1, \quad (16.1)$$

d'où son nom de suiveur, car il recopie l'entrée à sa sortie <sup>1</sup>.

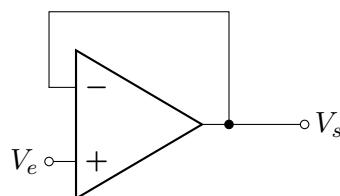


FIGURE 16.1 – Le montage suiveur

---

1. refaites les calculs !

### 16.1.2 Amplificateur inverseur

Le montage suivant permet d'amplifier une tension en inversant son signe. Le gain ici est négatif :

$$G = -\frac{R_2}{R_1}. \quad (16.2)$$

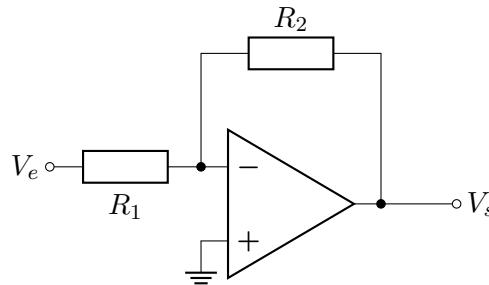


FIGURE 16.2 – Le montage amplificateur inverseur

### 16.1.3 Amplificateur non-inverseur

Le montage suivant permet d'amplifier une tension sans inverser son signe. Nous avons déjà vu ce montage précédemment (cf. section 15.4.1). Le gain ici est positif :

$$G = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right). \quad (16.3)$$

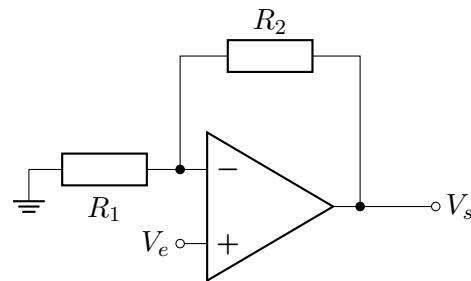


FIGURE 16.3 – Le montage amplificateur non-inverseur

## 16.2 Les montages sommateurs

Nous allons voir dans cette partie les montages à entrées multiples, ce ne sont pas obligatoirement des montages réalisant une addition, ils peuvent également faire une soustraction.

### 16.2.1 Sommateur inverseur

Le montage suivant permet de sommer et d'amplifier N tensions en inversant leur signe. La sortie du montage est :

$$V_s = \sum_{i=1}^N \left( -V_i \frac{R_T}{R_i} \right). \quad (16.4)$$

On remarque de la fonction de transfert est très proche de celle de l'amplificateur inverseur (c'est la même pour chaque entrée indépendamment). Il est donc possible, sur le même principe, d'imaginer une sommateur non-inverseur.

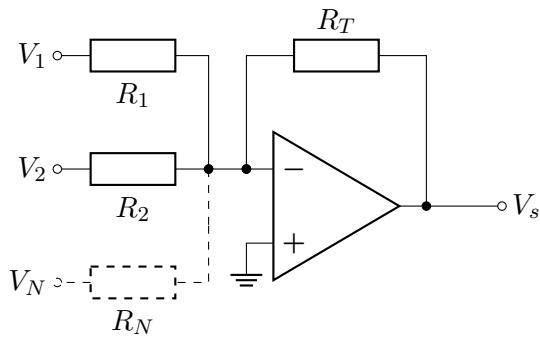


FIGURE 16.4 – Le montage sommateur inverseur

### 16.2.2 Le montage différentiel

Le montage suivant permet de faire la différence entre deux entrées amplifiées. La sortie du montage est :

$$V_s = V_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - V_1 \frac{R_2}{R_1}. \quad (16.5)$$

On remarque de la fonction de transfert est simplement l'addition des deux fonctions de transfert de l'amplificateur inverseur et non-inverseur. C'est un exemple de ce que l'on peut faire en associant « les montages de bases » des AO.

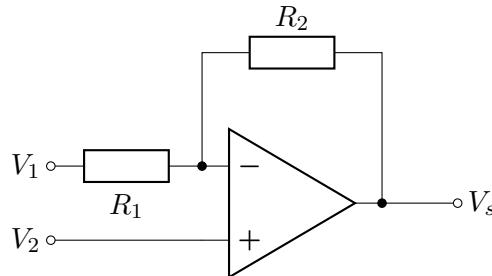


FIGURE 16.5 – Le montage différentiel.

## 16.3 Les filtres actifs

Nous allons étudier les filtres actifs, qui sont un formidable moyen de filtrage avec peu de contraintes d'adaptation. Bien évidemment il est impossible de vous montrer toutes les formes et structures de ces filtres. Comme pour les sections précédentes nous allons vous présenter les plus importantes et représentatives.

### 16.3.1 Les filtres du premier ordre

#### 16.3.1.1 Filtre passe-bas

Le montage suivant est un filtre passe-bas dont la fonction de transfert ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ ) est la suivante :

$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{1 + jR_2C\omega} \right). \quad (16.6)$$

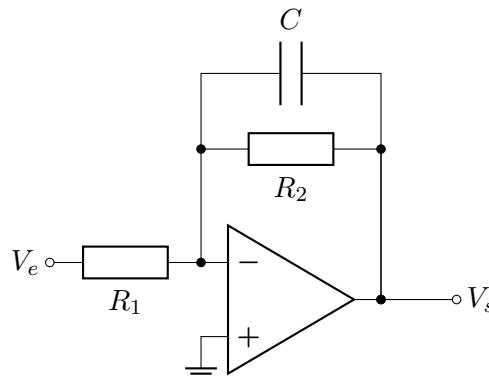


FIGURE 16.6 – Montage d'un filtre passe-bas du 1<sup>e</sup> ordre.

L'avantage immédiat d'utiliser un filtre actif est double, premièrement l'adaptation en sortie est assurée par l'AO et deuxièmement en plus de faire la fonction de filtrage nous avons une fonction d'amplification assuré par le gain statique  $G_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ . Le diagramme de Bode d'un tel montage est représenté sur la figure 16.7.

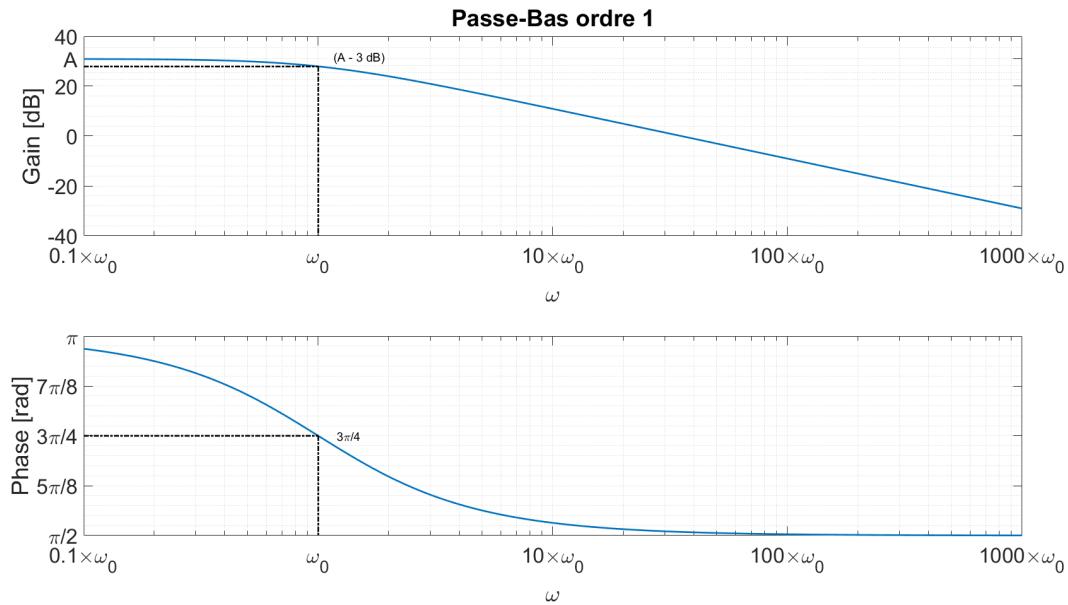


FIGURE 16.7 – Exemple d'un filtre passe-bas d'ordre 1 avec une amplification ( $A = \frac{R_2}{R_1} = -G_0$ ).

### 16.3.1.2 Filtre passe-haut

Le montage suivant est un filtre passe-haut dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}. \quad (16.7)$$

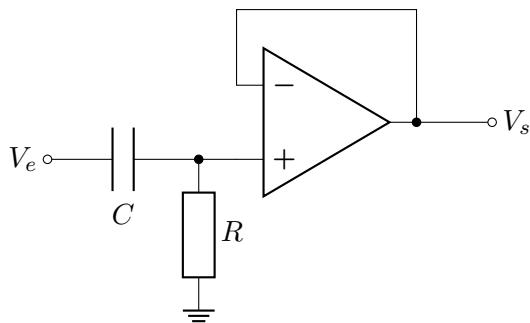


FIGURE 16.8 – Montage d'un filtre passe-haut du 1<sup>e</sup> ordre.

De manière générale on peut mettre des filtres passifs un peu n'importe où sur le montage : au niveau de l'entrée  $e_+$ , au niveau de l'entrée  $e_-$  ou au niveau de la rétroaction. Cela influencera le gain statique final, il sera positif ou négatif. Sur la figure 16.9 est représenté le diagramme de Bode du filtre précédent (cf. figure 16.8), notez qu'il n'y a pas d'amplification de faite ici (la rétroaction n'est qu'un montage suiveur, voir section 16.1.1).

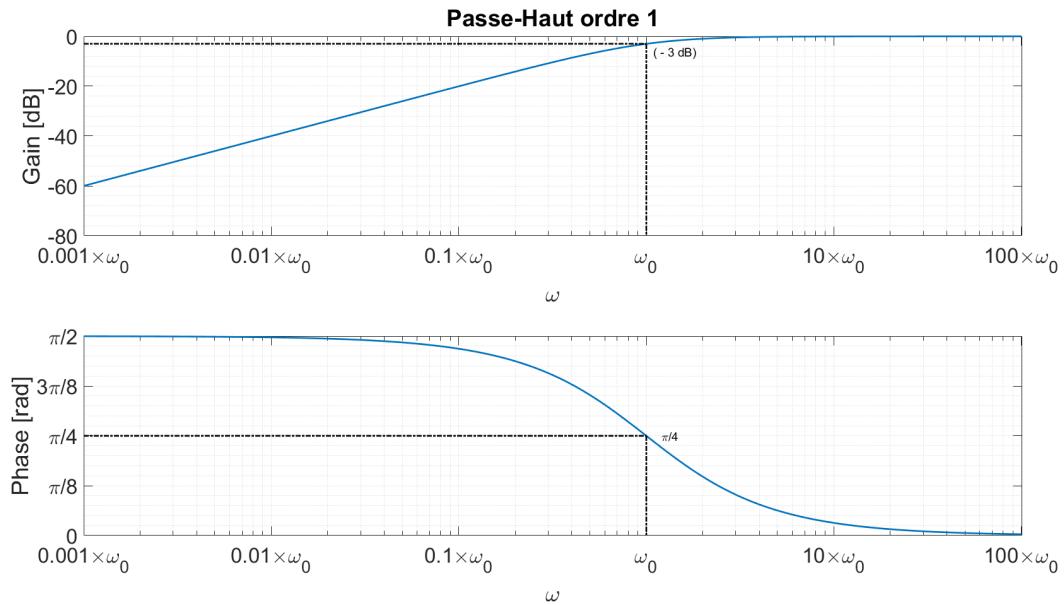


FIGURE 16.9 – Exemple du diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 1 sans amplification ( $A = 1$ ).

#### 16.3.1.3 Filtre intégrateur

Le montage suivant est un filtre dit « intégrateur » dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}. \quad (16.8)$$

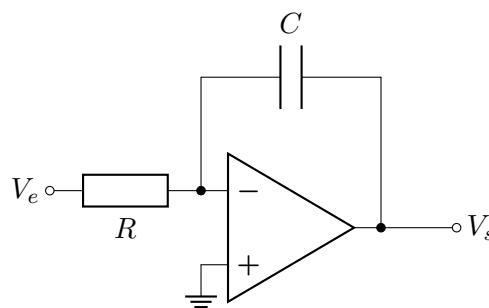


FIGURE 16.10 – Montage d'un filtre intégrateur du 1<sup>e</sup> ordre.

Le diagramme de Bode d'un filtre intégrateur est représenté sur la figure 16.11. Ce type de filtre n'est pas physique car on voit qu'en basses fréquences le gain est infini. En réalité cela est un artéfact dans nos calculs, où à basse fréquence le condensateur se comporte comme un circuit ouvert, donc le gain du montage est théoriquement infini (cf. équation (15.7) et les commentaires associés). Mais en réalité nous serons limité par le gain  $A_v$  intrinsèque à l'AO.

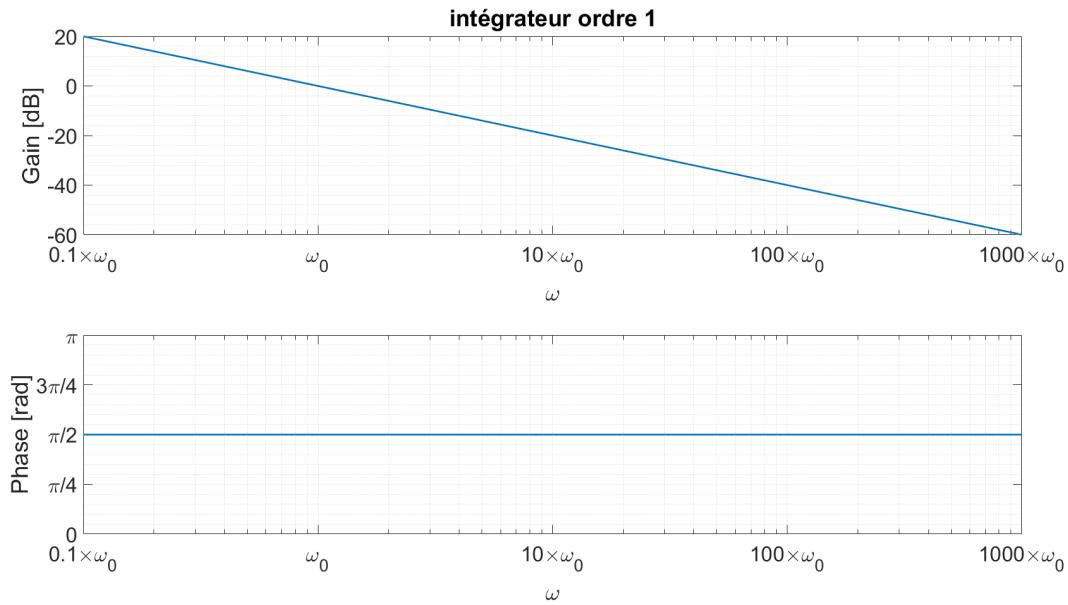


FIGURE 16.11 – Exemple du diagramme de Bode d'un filtre intégrateur d'ordre 1.

#### 16.3.1.4 Filtre déivateur

Le montage suivant est un filtre dit « déivateur » dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(j\omega) = -jRC\omega. \quad (16.9)$$

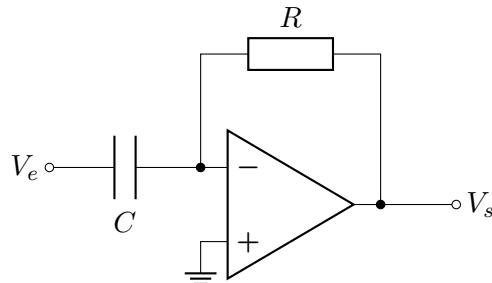


FIGURE 16.12 – Montage d'un filtre déivateur du 1<sup>e</sup> ordre.

Le diagramme de Bode d'un filtre déivateur est représenté sur la figure 16.13. Ce type de filtre, comme pour le filtre intégrateur (cf. section 16.3.1.3), n'est pas physique car on voit ici que le gain est infini en hautes fréquences. En réalité il sera lui aussi limité par le gain  $A_v$  intrinsèque à l'AO (pour les mêmes considérations). Le montage de ces deux filtres est dit « instable ».

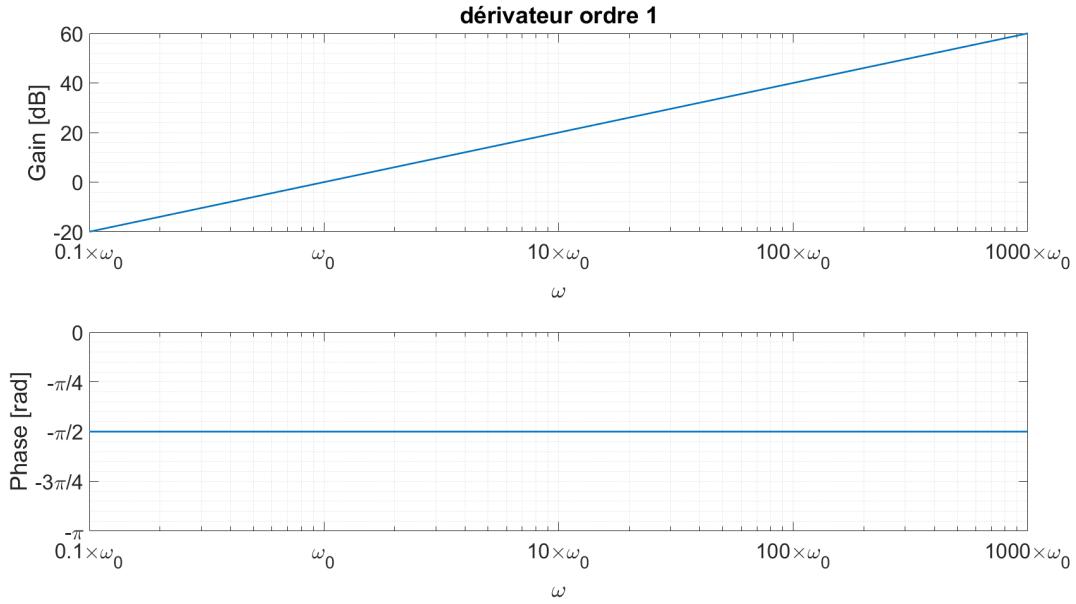


FIGURE 16.13 – Exemple du diagramme de Bode d'un filtre déivateur d'ordre 1.

### 16.3.2 Les filtres du second ordre

#### 16.3.2.1 Filtre passe-bande

Le montage suivant est un filtre passe-bande dont la fonction de transfert ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ ) est la suivante :

$$H(j\omega) = -\frac{jR_2C_1\omega}{(1+jR_1C_1\omega)(1+jR_2C_2\omega)} \quad (16.10)$$

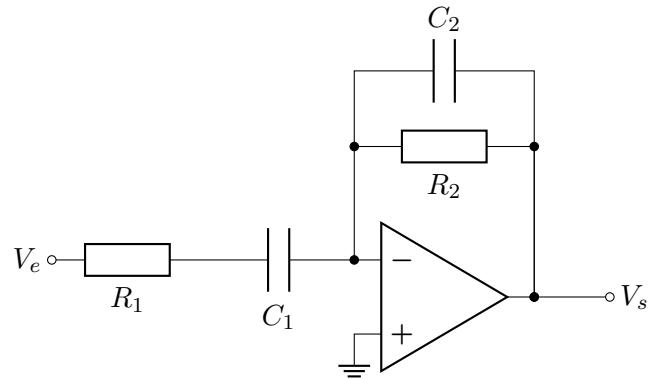
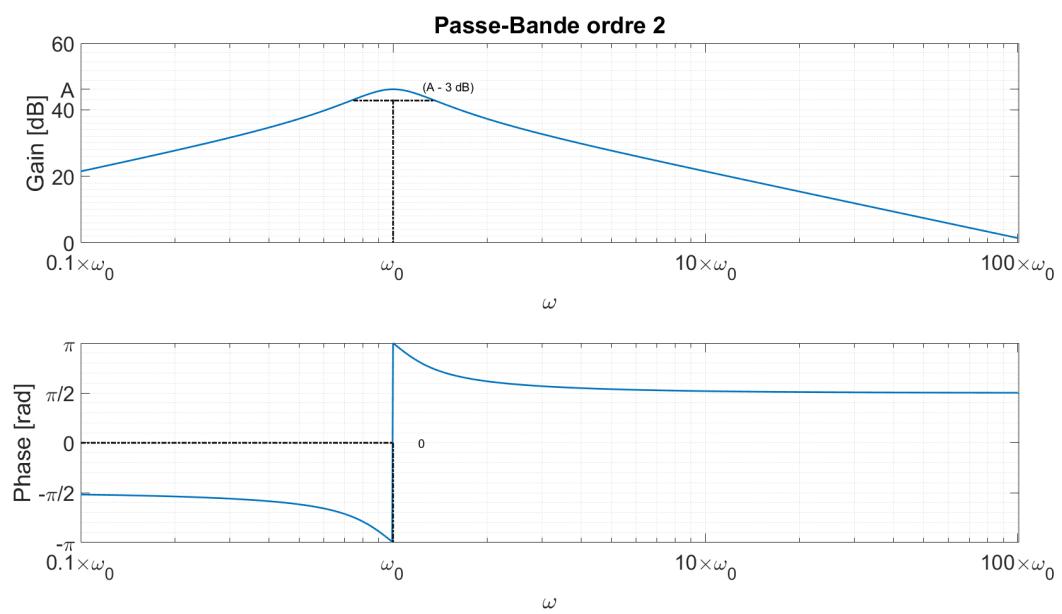
$$= -\left(\frac{R_2C_1}{R_1C_1 + R_2C_2}\right) \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (16.11)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad (16.12)$$

$$2m = \frac{R_2C_2 + R_1C_1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}. \quad (16.13)$$

Le diagramme de Bode d'un montage de ce type est représenté sur la figure 16.15, on peut voir qu'il est composé de deux pentes de  $\pm 20$  dB/decades (c'est bien un filtre d'ordre 2). Dans ce cas la notion de fréquence de coupure n'a pas de sens, nous allons utiliser la notion de bande passante. La bande passante est l'intervalle de fréquences où l'amplitude du signal est atténuée de moins de 3 dB par rapport à l'amplitude maximale. Sur la figure 16.15 la bande passante est représentée par un trait horizontal autour de  $\omega_0$ .

FIGURE 16.14 – Montage d'un filtre passe-bande du 2<sup>e</sup> ordre.FIGURE 16.15 – Exemple du diagramme de Bode d'un filtre passe-bande d'ordre 2 avec une amplification ( $A = \left( \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \right)$ ).

### 16.3.2.2 Filtre coupe-bande (ou réjecteur)

Le montage suivant est un filtre coupe-bande ou réjecteur dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(j\omega) = \left( \frac{C_1 L_1}{C_2 L_2} \right) \frac{1 + C_2 L_2 (j\omega)^2}{1 + R_1 C_1 j\omega + C_1 L_1 (j\omega)^2} \quad (16.14)$$

$$= \left( \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \frac{1 + \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_1} + \left( j \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2}, \quad (16.15)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}} \quad (16.16)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} \quad (16.17)$$

$$2m = \frac{R_1 C_1}{\sqrt{C_1 L_1}}. \quad (16.18)$$

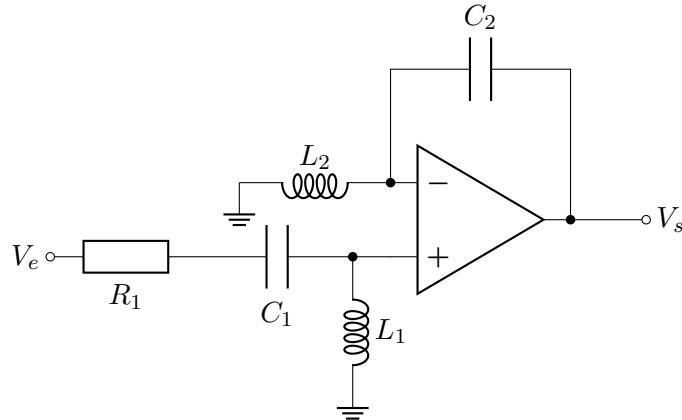


FIGURE 16.16 – Montage d'un filtre réjecteur du 2<sup>e</sup> ordre.

Le diagramme de Bode d'un montage réjecteur est représenté sur la figure 16.17. On peut voir nettement la contribution des deux pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_1$ .

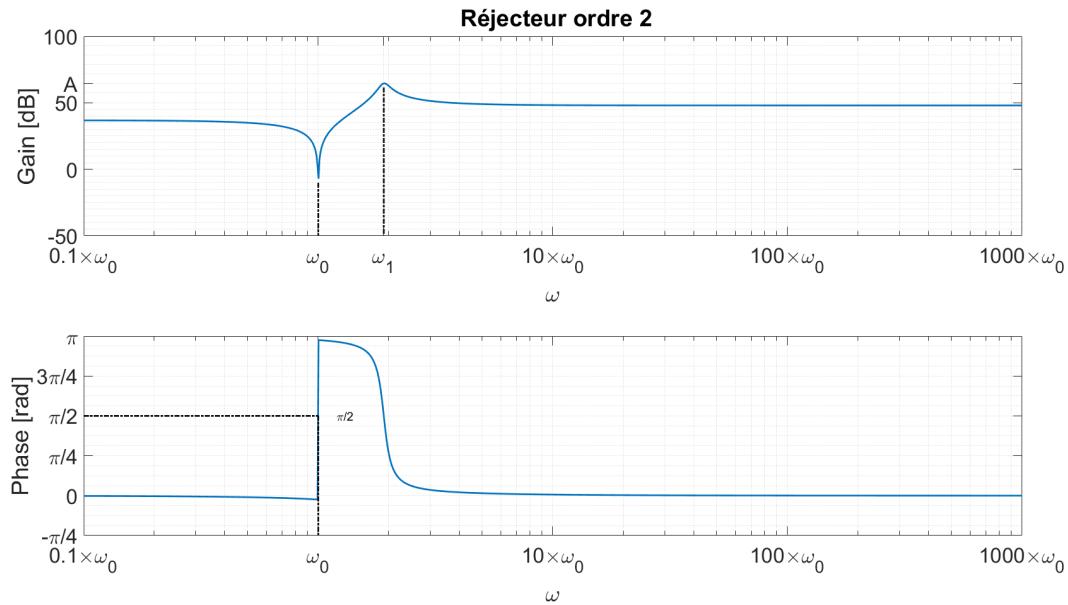


FIGURE 16.17 – Exemple du diagramme de Bode d'un filtre réjecteur d'ordre 2.

### 16.3.3 Les structures de bases du second ordre

On a vu que l'on pouvait mettre les filtres actifs sous une multitude de formes en n'utilisant que 3 composants de bases : la résistance, la bobine et le condensateur. Il existe cependant des formes usuelles que les gens ont l'habitude d'utiliser car elles permettent de générer rapidement quasiment tous les filtres possibles du seconde ordre.

Pour plus de simplicité dans les calculs nous allons utiliser les admittances  $Y = \frac{1}{Z}$  (inverses des impédances) à la place des impédances. Cela est simplement dû au fait que pour calculer les fonctions de transfert des montages avec des AO nous appliquons le théorème de Millman<sup>2</sup>.

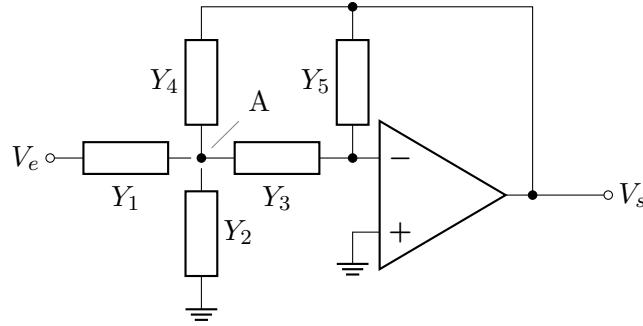
#### 16.3.3.1 Structure de Rauch

La fonction de transfert de cette structure peut être calculée comme ceci :

1. commençons par calculer le potentiel au point A

$$V_A = \frac{V_e Y_1 + V_s Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}, \quad (16.19)$$

2. Ayez confiance, raisonner avec les admittances c'est bien plus simple. Vous allez le constater dans quelques instants.

FIGURE 16.18 – Structre de Rauch du 2<sup>e</sup> ordre.

2. puis celui en  $e_-$  en fonction de  $V_A$

$$e_- = \frac{V_s Y_5 + V_A Y_3}{Y_5 + Y_3} = \frac{V_s Y_5 + \frac{V_e Y_1 Y_3 + V_s Y_4 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}}{Y_5 + Y_3}, \quad (16.20)$$

3. l'AO est en régime linéaire, donc  $e_- = e_+ = 0$ . Faisons alors un peu de simplifications

$$e_- = \frac{V_s Y_5}{Y_5 + Y_3} + \frac{V_e Y_1 Y_3 + V_s Y_4 Y_3}{(Y_5 + Y_3)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} = 0, \quad (16.21)$$

4. enfin on obtient après encore quelques réarrangements

$$V_s \frac{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3}{(Y_5 + Y_3)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} = -V_e \frac{Y_1 Y_3}{(Y_5 + Y_3)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}. \quad (16.22)$$

Au final on a la fonction de transfert suivante<sup>3</sup> :

$$H(j\omega) = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3}. \quad (16.23)$$

De cette fonction de transfert du second ordre (dénominateur à l'ordre 2), on peut en choisissant les bonnes admittances (donc les bons composants) obtenir une grande variété de filtres. Amusez-vous à retrouver les filtres précédents.

**Les admittances usuelles :** pour vous aider, voici une petite liste des admittances usuelles :

**un conducteur ohmique de résistance  $\mathbf{R}$  :**  $Y_R = \frac{1}{R}$

**un condensateur de capacité  $\mathbf{C}$  :**  $Y_C = jC\omega$

**une bobine d'inductance  $\mathbf{L}$  :**  $Y_L = \frac{1}{jL\omega}$

3. On voit bien la puissance de passer par les admittances. Je vous laisse essayer en utilisant les impédances.

**un fil :**  $Y_s \rightarrow \infty$

**un circuit ouvert :**  $Y_s = 0$

Comme exemple nous allons prendre deux structures vues précédemment, le déivateur de la section 16.3.1.4 et le filtre passe-bande de la section 16.3.2.1.

**Cas du déivateur :** afin d'obtenir la structure de la section 16.3.1.4, nous devons remplacer,

- le composant « 1 » par un condensateur ( $Y_1 = jC\omega$ ),
- le composant « 2 » par un circuit ouvert ( $Y_2 = 0$ ),
- le composant « 3 » par un fil ( $Y_3 \rightarrow \infty$ ),
- le composant « 4 » par un circuit ouvert ( $Y_4 = 0$ ),
- et le composant « 5 » par une résistance ( $Y_5 = \frac{1}{R}$ ).

Si on injecte ces valeurs dans la fonction de transfert de l'équation (16.23), après une légère simplification on trouve :

$$H(j\omega) = -\frac{jC\omega Y_3}{\frac{1}{R}Y_3 + 0Y_3} = -jRC\omega, \quad (16.24)$$

ce qui est bien la fonction de transfert du déivateur.

**Cas du filtre passe-bande :** les admittances sont comme les impédances, elles peuvent par conséquent représenter des structures complexes (composées de plusieurs composants) par leur admittance équivalente. L'admittance de deux composants en parallèle sera la somme de leur admittance. Pour obtenir la structure de la section 16.3.2.1, nous devons remplacer,

- le composant « 1 » par une résistance ( $Y_1 = \frac{1}{R_1}$ ),
- le composant « 2 » par un circuit ouvert ( $Y_2 = 0$ ),
- le composant « 3 » par un condensateur ( $Y_3 = jC_1\omega$ ),
- le composant « 4 » par un circuit ouvert ( $Y_4 = 0$ ),
- et le composant « 5 » par une résistance en parallèle d'un condensateur ( $Y_5 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1+jR_2C_2\omega}{R_2}$ ).

Si on injecte ces valeurs dans la fonction de transfert de l'équation (16.23), après une légère simplification on trouve :

$$H(j\omega) = -\frac{\frac{jC_1\omega}{R_1}}{\frac{1+jR_2C_2\omega}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} + jC_1\omega \right) + 0} \quad (16.25)$$

$$= -\frac{jR_2C_1\omega}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)}, \quad (16.26)$$

ce qui est bien la fonction de transfert du passe-bande.

Vous avez vu quelques exemples de la force de cette structure. On peut aussi bien remplacer les admittances par celles de simples composants ou celles de montages plus complexes. Les possibilités sont infinies. Malheureusement avec la structure de Rauch vous ne pourrez jamais réaliser le montage de la section 16.3.1.2 ou celui de la section 16.3.2.2.

### 16.3.3.2 Structure de Sallen & Key

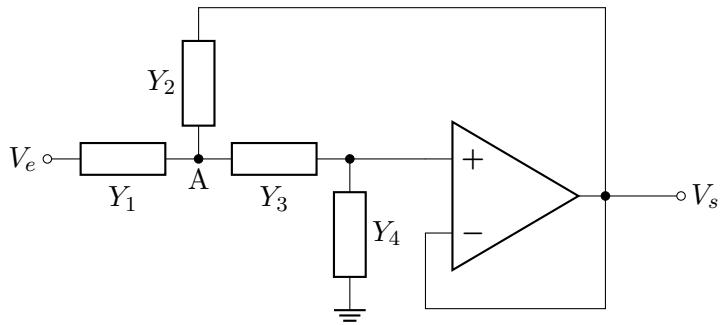


FIGURE 16.19 – Structre de Sallen & Key du 2<sup>e</sup> ordre.

**Structure de base de Sallen & Key :** La principale différence avec la structure précédente est que le signal ( $V_e$ ) est appliqué sur l'entrée non-inverseuse ( $e_+$ ). Il existe bien une contre-réaction sur l'entrée  $e_-$  qui garantie le régime linéaire. On remarque même que c'est un montage suiveur (nous y reviendrons).

La fonction de transfert de cette structure peut être calculée comme ceci :

1. commençons par calculer le potentiel au point  $e_+$

$$e_+ = e_- = V_s = \frac{V_A Y_3}{Y_3 + Y_4}, \quad (16.27)$$

2. puis celui au point A

$$V_A = \frac{V_e Y_1 + V_s Y_2 + V_s Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad (16.28)$$

3. combinons les deux équations

$$V_s = \frac{V_e Y_1 Y_3 + V_s (Y_2 + Y_3) Y_3}{(Y_3 + Y_4) (Y_1 + Y_2 + Y_3)}, \quad (16.29)$$

4. enfin on obtient

$$V_s \left( 1 - \frac{(Y_2 + Y_3) Y_3}{(Y_3 + Y_4) (Y_1 + Y_2 + Y_3)} \right) = \frac{V_e Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4) (Y_1 + Y_2 + Y_3)}. \quad (16.30)$$

Au final après quelques simplifications on a la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4) (Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_3 (Y_2 + Y_3)} \quad (16.31)$$

$$= \frac{Y_1 Y_3}{Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3) + Y_3 Y_1} \quad (16.32)$$

$$= \frac{Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4) (Y_1 + Y_2) + Y_3 (Y_4 - Y_2)}. \quad (16.33)$$

La dernière forme est la notation habituelle de la fonction de transfert de la structure de Sallen & Key. De même qu'avec la structure de Rauch, on mettra une partie des montages précédents en utilisant cette structure.

**Structure générale de Sallen & Key :** Pour aller plus loin, vous avez vu la partie suivante de la structure de Sallen & Key (cf. partie bleue encadrée de la figure 16.20(a)) ? On peut parfaitement mettre un montage amplificateur à cette place ou plus généralement n'importe quelle montage de filtre comme le montre la figure 16.20(b).

Pour calculer la fonction de transfert de la structure générale de Sallen & Key reprenons les étapes précédentes. Le principal changement vient lors du calcul de  $e_+$  alors soyez attentif :

1. calculons le potentiel au point  $e_+$

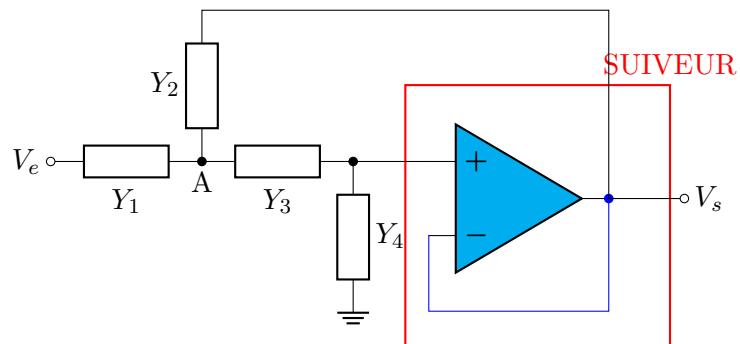
$$e_+ = e_- = \frac{V_A Y_3}{Y_3 + Y_4}, \quad (16.34)$$

2. mais attention  $e_- \neq V_s$ , nous avons maintenant

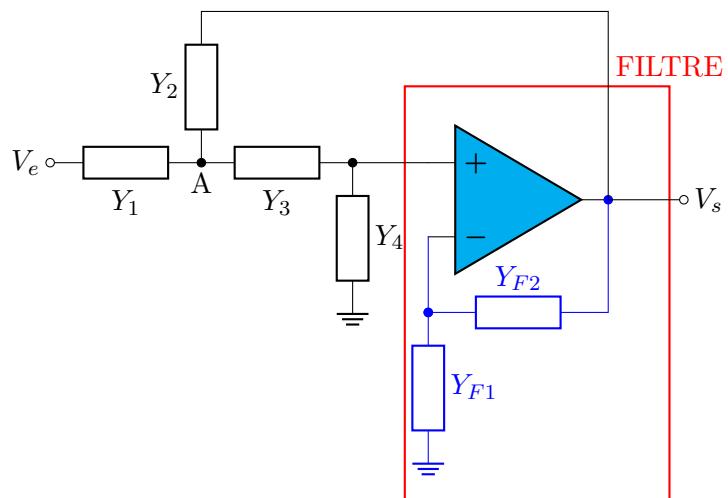
$$e_- = \frac{V_s Y_{F2}}{Y_{F1} + Y_{F2}} = \frac{V_s}{K(j\omega)}, \quad (16.35)$$

3. ceci change le calcul de  $V_A$  ainsi

$$V_A = \frac{V_e Y_1 + V_s Y_2 + \frac{V_s Y_3}{K(j\omega)}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad (16.36)$$



(a) Structure de base



(b) Structure générale

FIGURE 16.20 – Comparaison des structre de Sallen &amp; Key.

4. combinons les deux équations

$$\frac{V_s}{K(j\omega)} = \frac{V_e Y_1 Y_3 + V_s \left( Y_2 + \frac{Y_3}{K(j\omega)} \right) Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3)}, \quad (16.37)$$

5. enfin on obtient

$$V_s \left( \frac{1}{K(j\omega)} - \frac{\left( Y_2 + \frac{Y_3}{K(j\omega)} \right) Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3)} \right) = \frac{V_e Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3)}. \quad (16.38)$$

Au final après plusieurs simplifications on a la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega) Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_3 \left( Y_2 + \frac{Y_3}{K(j\omega)} \right)} \quad (16.39)$$

$$= K(j\omega) \frac{Y_1 Y_3}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2) + Y_3 (Y_4 - Y_2 K(j\omega))}. \quad (16.40)$$

Notez bien la différence entre les équations 16.33 et 16.40, le facteur  $K(j\omega)$  (qui est la fonction de transfert du filtre supplémentaire  $K(j\omega) = \frac{Y_{F1} + Y_{F2}}{Y_{F2}}$ ) apparaît deux fois dans l'équation. Ce n'est donc pas simplement un gain (ou un filtre) ajouté à la structure.

Vous pouvez à présent retrouver la fonction de transfert de toute les structures précédentes en fonctions de si l'entrée est sur la borne  $e_+$  (structure de Sallen & Key) ou  $e_-$  (Structure de Rauch). Vous pouvez aussi vous « amuser » à modifier et inventer d'autres structures selon vos besoins.



# Chapitre 17

## À retenir

### 17.1 Les amplificateur opérationnels (AO)

Un AO est composé de :

- deux broches d'alimentation ( $V_{CC-}$  et  $V_{CC+}$ ) pour fournir la puissance nécessaire à son fonctionnement
- deux entrées de signaux ( $e-$  et  $e+$ ),  $e_+$  est dite non-inverseuse et  $e_-$  est dite inverseuse
- d'une sortie ( $s$ )

La différence de potentiel entre ces deux entrées ( $e_+ - e_-$ ) est appelée tension différentielle d'entrée.

L'AO idéal ou parfait :

on entend par cela :

- une impédance d'entrée infinie
- une impédance de sortie nulle
- une tension d'offset = 0 V
- un courant de polarisation = 0 A

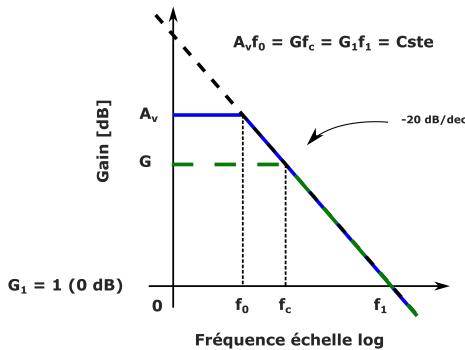


FIGURE 17.1 – Variation de la bande-passante en fonction du gain

- un gain différentiel  $A_v$  constant

L'AO peut alors s'utiliser dans deux régimes :

- RÉGIME LINÉAIRE : ce régime est atteint s'il y a une rétroaction (retour de tension) sur l'entrée inverseuse  $e_-$  (contre-réaction). On a alors  $e_+ \approx e_-$ , ainsi la sortie n'est pas saturée (cf. régime saturé). La sortie  $s$  est donc proportionnelle à la tension différentielle  $(e_+ - e_-)$ , soit  $s = A_v(e_+ - e_-)$ .
- RÉGIME SATURÉ : si n'y a pas de contre-réaction ou une rétroaction sur l'entrée non-inverseuse  $e_+$ . Par conséquent  $(e_+ - e_-) \approx 0$  et la tension en sortie va être égale à la tension de saturation de l'AO (tension maximale que peut fournir l'AO) :  $s = \pm V_{sat}$ .

### L'AO réel :

deux choses à retenir au sujet des AO réels sont :

- LE MODE COMMUN : l'AO ne fait pas qu'amplifier la différence de potentiel  $(e_+ - e_-)$ , la sortie dépend aussi du gain de mode commun  $A_{MC}$ , soit  $s = A_v(e_+ - e_-) + A_{MC} \frac{(e_+ + e_-)}{2}$ . La qualité d'un AO est caractérisé par le Taux de Réjection de Mode Commun (TRMC =  $A_v/A_{MC}$ ) qui est le plus élevé possible.
- LE PRODUIT GAIN X BANDE-PASSANTE : L'AO réel forment en première approximation une structure du premier ordre (un filtre passe-bas d'ordre 1) qui sera la limite intrinsèque ultime du montage. Cela implique que le produit gain fois bande-passante (souvent noté  $G\Delta\omega$ ) est une constante.

## 17.2 Le théorème de Millman

THÈMORÈME DE MILLMAN : On considère un noeud A auquel aboutissent k branches (cf. figure 15.2). Les potentiels  $V_n$  des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence  $V_{ref}$ . Soit  $R_n$  la résistance des la branche n, la loi des noeuds s'écrit :

$$\sum_{n=1}^k i_n = i_1 + i_2 + \dots + i_k = 0$$

ou encore

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \dots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

soit

$$V_A \sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n} = \sum_{n=1}^k \frac{V_n}{R_n}$$

Le potentiel du point A s'écrit par rapport au potentiel de référence  $V_{ref}$  (par rapport auquel tous les autres potentiels  $V_n$  sont référencés) :

$$V_A = \frac{\sum_{n=1}^k \frac{V_n}{R_n}}{\sum_{n=1}^k \frac{1}{R_n}}$$

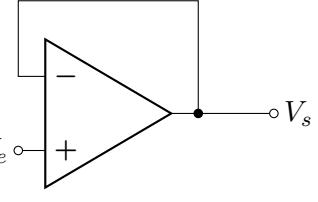
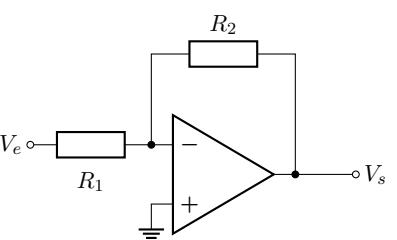
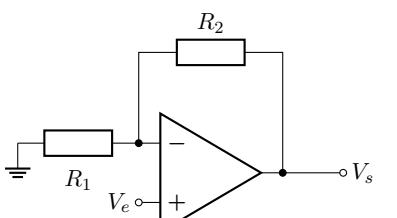
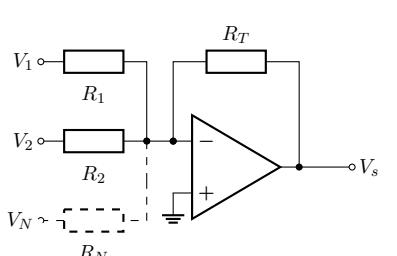
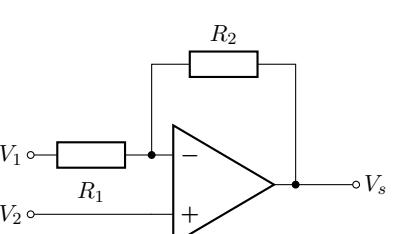
ATTENTION : Ne pas oublier de faire apparaître au dénominateur les branches dont le potentiel à l'extrémité est nul !

## 17.3 Calcul de la fonction de transfert d'un montage à base d'AO

MÉTHODE DE CALCUL des montage à AOP en régime linéaire : pour tous les calculs de ce type de montages nous nous placerons dans l'approximation d'un gain faible en comparaison à celui de l'AO. Afin de trouver la fonction de transfert  $\frac{V_s}{V_e}$ , on calcule avec le théorème de Millman indépendamment  $e_+$  et  $e_-$ , puis on pose  $e_+ = e_-$ .

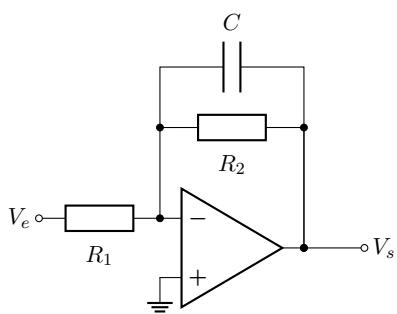
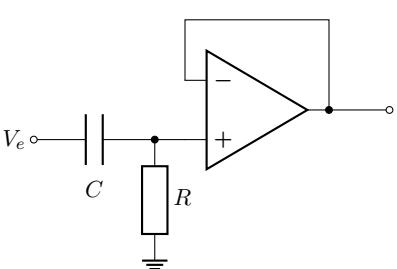
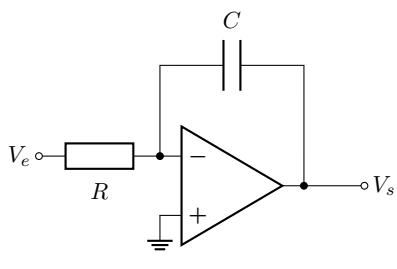
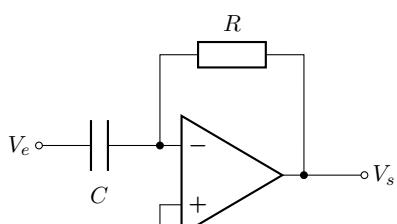
*N.B. :* il est souvent plus simple de travail avec les admittances  $Y = \frac{1}{Z}$  plutôt que les impédances  $Z$ .

## 17.4 Les montages de base avec des AO en régime linéaire

Nom	Schéma	Fonction de transfert
Suiveur		$H(j\omega) = 1$
Amplificateur inverseur		$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}$
Amplificateur non-inverseur		$H(j\omega) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$
Sommateur inverseur		$V_s = \sum_{i=1}^N \left( -V_i \frac{R_T}{R_i} \right)$
montage différentiel		$V_s = V_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - V_1 \frac{R_2}{R_1}$

---

### Filtres du 1<sup>e</sup> ordre

filtre passe-bas du 1 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{1+jR_2C\omega} \right)$
filtre passe-haut du 1 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$
filtre intégrateur du 1 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}$
filtre déivateur du 1 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = -jRC\omega$

---

### Filtres du 2<sup>e</sup> ordre

filtre passe-bande du 2 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = -A \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
filtre coupe-bande (ou réjecteur) du 2 <sup>e</sup> ordre		$H(j\omega) = A \frac{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_1} + \left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$

### Structures de base

Structure de Rauch		$H(j\omega) = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+Y_4 Y_3}$
Structure de Sallen & Key		$H(j\omega) = \frac{K Y_1 Y_3}{(Y_3+Y_4)(Y_1+Y_2)+Y_3(Y_4-Y_2 K)}$ $K = \frac{Y_{F1}+Y_{F2}}{Y_{F2}}$

TABLE 17.1 – Les montages de base avec des AO en régime linéaire.

## **Quatrième partie**

# **Amplificateurs Opérationnels - Exercices**



## Chapitre 18

# Exercices de cours

Cochez les propositions exactes :

### Exercice 1 : QCM

L'impédance d'entrée d'un AO idéal :

- Est nulle
- Est infinie
- Est inconnue

L'impédance de sortie d'un AO idéal :

- Est nulle
- Est infinie
- Est inconnue

Un AO est en régime linéaire si :

- il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse (contre-réaction)
- il y a une rétroaction sur l'entrée non-inverseuse
- on ne pas savoir cela dépend du montage

## Exercice 2 : Vrai ou Faux

1. Un AO est toujours en régime linéaire.
2. Le gain d'un AO est infini.
3. Un circuit suiveur fonctionne à haute et basse fréquences.
4. Un AO peut être en régime saturé même s'il n'y a pas de tension en entrée.
5. On peut utiliser n'importe quelle entrée d'un AO sans distinction.
6. Un AO réel amplifie également la tension moyenne entre ses bornes d'entrée.
7. Un AO est un composant actif et à toujours besoin d'être alimenté par une source de puissance (indépendamment du signal d'entrée).
8. Un AO est un composant élémentaire de l'électronique.
9. Le régime saturé d'un AO est à éviter car cela endommage le composant.
10. En régime linéaire l'AO ne peut pas saturer.

## Exercice 3 : Donner la définition de...

- Gain différentiel
- Régime linéaire
- Signal d'entrée
- Tension d'alimentation

## Exercice 4 : Questions de révisions

1. Quel théorème utilise-t-on généralement, pour trouver la fonction de transfert, des montages à base d'AO ?
2. Énoncez ce théorème ?
3. Quelle est la valeur du courant entrant dans l'AO (par l'entrée inverseuse et l'entrée non-inverseuse) ?

### Exercice 5 : Montage amplificateur

Calculer la fonction de transfert ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ ) du circuit suivant (figure 18.1) :

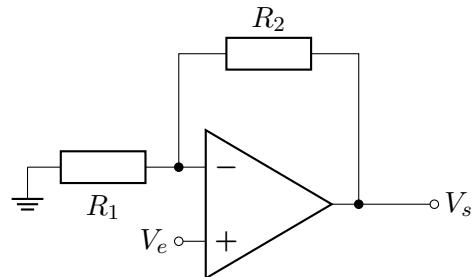


FIGURE 18.1 – Montage amplificateur

### Exercice 6 : Montage différentiel

Calculer la sortie ( $V_s$ ) du circuit suivant (figure 18.2) :

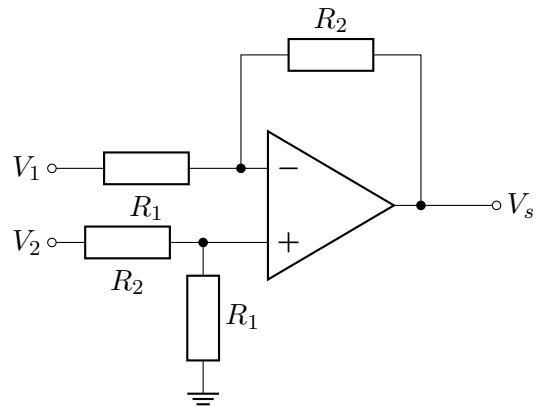


FIGURE 18.2 – Montage différentiel.

### Exercice 7 : Montage AO

On s'intéresse au circuit suivant (figure 18.3) :

1. Calculer la fonction de transfert ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ ) du circuit.
2. Quelle type de filtre est-ce ?

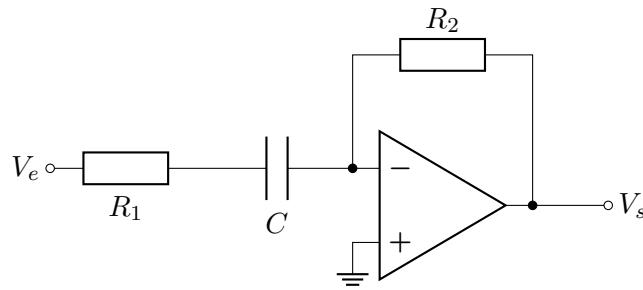


FIGURE 18.3 – Montage avec un AO

3. Tracer le diagramme de Bode.

### Exercice 8 : Montage AO bis

On s'intéresse au circuit suivant (figure 18.4) :

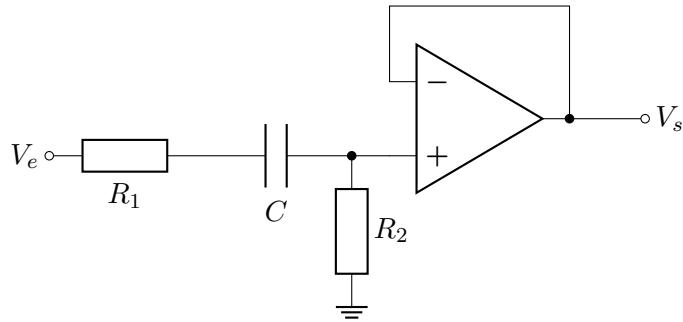


FIGURE 18.4 – Montage avec un AO

1. Calculer la fonction de transfert ( $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ ) du circuit.
2. Quelle type de filtre est-ce ?
3. Tracer le diagramme de Bode.

### Exercice 9 : Problème : AO et résistance

On s'intéresse au montage de la figure 18.5

1. Quelle est la relation entre  $V_{\text{diff}} = e_+ - e_-$ ,  $V_s$  et  $V_e$  ? Exprimez  $e_-$  en fonction de  $V_s$  et  $e_+$  en fonction de  $V_e$ .

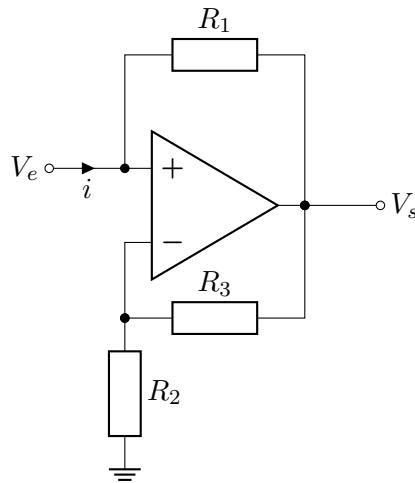


FIGURE 18.5 – Schéma modifié

2. Que se passerait-il à  $t > 0$  si à un instant  $t = 0$  on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) > 0$  ? De même si on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) < 0$  ?
3. Dans quelle régime est cet amplificateur opérationnel ?
4. Calculez  $e_+$  en fonction de  $V_s$ ,  $i$  et  $R_1$ , en déduire la relation entre  $V_e$  et  $V_s$ .
5. Appliquez la relation entre  $e_+$  et  $e_-$  issue du régime de fonctionnement et exprimez  $V_e$  en fonction de  $i$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ .
6. Posez  $R_T = \frac{R_1 R_2}{R_3}$ , à partir de la formule de  $V_e$  précédente que pouvez-vous en conclure sur ce montage ?
7. A quoi peut servir ce type de montage ?

### Exercice 10 : Problème : AO et oscillateur

Étudier le circuit de la figure 18.6 suivante.

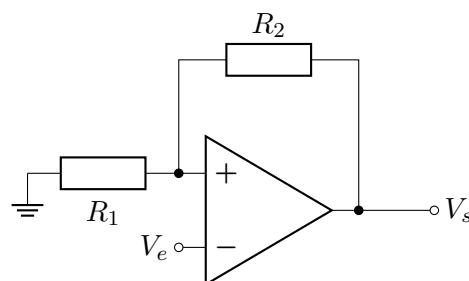


FIGURE 18.6 – Schéma d'un trigger de Schmitt inverseur

1. Dans quelle régime est cet amplificateur opérationnel ?
2. Quelle est la relation entre  $V_{\text{diff}} = e_+ - e_-$ ,  $V_s$  et  $V_e$  ?
3. Que se passerait-il à  $t > 0$  si à un instant  $t = 0$  on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) > 0$  ? De même si on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) < 0$  ? On supposera ici que les tensions de saturation minimale et maximale sont respectivement  $V_{\text{sat}-}$  et  $V_{\text{sat}+}$ .
4. Quelles sont les deux tensions  $V_{T-}$  et  $V_{T+}$  (minimale et maximale) de basculement ? Pour cela, il faut calculer  $V_e$  tel que  $V_{\text{diff}} = 0$  lorsque  $V_s = V_{\text{sat}-}$  ou  $V_s = V_{\text{sat}+}$ .
5. Représenter la courbe d'hystéresis (caractéristique entrée-sortie).
6. Quel type de montage est-ce ?

On modifie à présent le schéma précédent comme illustré sur la figure 18.7. Étudiez le comportement de ce montage.

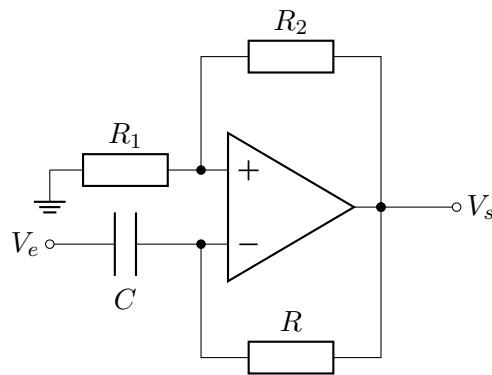


FIGURE 18.7 – Schéma modifié

7. On commence par l'étude de la première charge du condensateur (amorçage) :
  - (a) Que se passe-t-il à  $t = 0^+$  si à un instant  $t = 0$  on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) > 0$  ? Reprenez le résultat des questions précédentes, on suppose le condensateur déchargé et le temps de réaction de l'AO nul.
  - (b) De même si on avait  $V_s(0) = 0$  et  $V_e(0) < 0$  ?
  - (c) Exprimez  $e_-$  en fonction de  $V_e$ ,  $V_s$ ,  $R$ ,  $C$  et  $u_C$  la tension aux bornes du condensateur.
  - (d) Résolvez l'équation différentielle régissant  $u_C$ . On suppose sans perdre de généralité que  $V_s$  et  $V_e > 0$  sont constants et que le condensateur est déchargé. Précisez la valeur de  $V_s$  en fonction des questions précédentes.
  - (e) Donnez la tension  $e_-$  au cours du temps en fonction de  $V_e$ ,  $V_s$ ,  $C$  et  $R$ . Que se passe-t-il au bout d'un certain temps ?

8. Puis on étudie la décharge du condensateur :

- (a) Calculer la valeur de la tension  $u_C$  lors du changement d'état de l'amplificateur opérationnel.
- (b) Résolvez l'équation différentielle régissant  $u_C$ . On suppose que  $V_s$  et  $V_e$  sont constants et que le condensateur est initialement chargé à la valeur trouvé précédemment.
- (c) Donnez la tension  $e_-$  au cours du temps en fonction de  $V_e$ ,  $V_s$ ,  $C$ ,  $R$  et  $V_T$  la tension de basculement. Que se passe-t-il au bout d'un certain temps ?

9. Enfin on étudie les charges suivante :

- (a) Recommez une dernière fois ces étapes pour la charge du condensateur avec une condition initiale que vous préciserez.
- (b) Représentez l'allure temporelle de  $V_s$ , et celle de  $e_-$ .
- (c) Donnez le temps  $T$  nécessaire pour un cycle (une période) en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $V_{sat+}$ ,  $V_{sat-}$ ,  $V_{T-}$  et  $V_{T+}$ .
- (d) Application numérique, donnez la fréquence du signal pour les valeurs suivante :  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$ ,  $V_{sat+} = 15 \text{ V}$ ,  $V_{sat-} = -15 \text{ V}$ ,  $V_{T-} = \frac{2}{3}V_{sat-}$  et  $V_{T+} = \frac{2}{3}V_{sat+}$ .

10. Étude des paramètres du système :

- (a) Vous avez remarqué que la période ne dépend pas de  $V_e$ , alors selon vous à quoi peut servir  $V_e$  ?
- (b) Que contrôle les résistances  $R_1$  et  $R_2$  ?
- (c) Comment feriez-vous pour contrôler (précisément) la fréquence de cette oscillateur ?

