Institut Villebon Georges Charpak

2024/2025 L1 S2

THERMODYNAMIQUE
TD4 - Premier Principe de la Thermodynamique
Corrigé

Données : R = 8,31 $J.K^{-1}.mol^{-1}$, constante adiabatique d'un gaz parfait diatomique : γ = 7/5.

Exercice 1 - Compression réversible d'un gaz parfait

On réalise la compression réversible isotherme à T = 25 °C de 0,25 mole de N_2, de P_0 = 1 atm à P_1 = 50 atm.

1. Calculer la variation de l'énergie interne ΔU du gaz lors de la compression.

$\Delta U = 0$ J car isotherme

2. Calculer la quantité de chaleur Q échangée pendant la compression.

$\Delta U = Q + W = 0$

$\Rightarrow Q = -W = - -\int P dV = \int P dV = nRT\int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$

$= nRT.Ln\frac{V_1}{V_0}$ or $P_0V_0 = P_1V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_0}{P_1}$

$\Rightarrow Q = nRT.\ Ln\frac{P_0}{P_1}$

$= 0,25 \times 8,31 \times (273+25)\ Ln\frac{1}{50}$

$= -\ 2423,1\ J$

Exercice 2 - Détente irréversible d'un gaz parfait

Quatre moles d'oxygène sont contenues dans un récipient de 20 L à la température $T_0 = 270$ K. Lors d'une détente adiabatique irréversible contre une pression extérieure constante $P_{ext} = 0,73$ atm, le volume du gaz triple de valeur.

1. Calculer Q, puis W, ΔU et enfin ΔH lors de cette transformation.

Adiabatique $\Rightarrow Q = 0$ J

$W = -\int P_{ext}dV = -P_{ext}(V_1 - V_0)$

$= -P_{ext}(3V_0 - V_0) = -2P_{ext}V_0$

$= -2 \times 0,73 \times 1,013.10^5 \times 20.10^{-3}$

$= -2958$ J

$\Delta U = Q + W = W = -2958$ J

Or, quelle que soit la transformation :

$\Delta H = n\overline{c_P}\Delta T$ et $\Delta U = n\overline{c_V}\Delta T$.

En divisant membre à membre :

$\Delta H/\Delta U = \overline{c_P}/\overline{c_V} = \gamma$.

D'où $\Delta H = \gamma\Delta U = 7/5 \times (-2958) = -4141$ J

(oxygène : gaz diatomique => $\gamma = 7/5$)

2. En utilisant la valeur de ΔU calculée à la question précédente, calculer la température finale T_1 du gaz.

$\Delta U = n\overline{c_V}.\Delta T = \Rightarrow \Delta T = \Delta U/(n\overline{c_V})$ or $\overline{c_V} = \frac{5}{2}R$

car gaz diatomique

$\Rightarrow \Delta T = -2958/(4 \times 5 \times 8{,}31/2) = -35{,}6$ K

$\Delta T = T_1 - T_0$

$\Rightarrow T_1 = T_0 + \Delta T = 270 - 35{,}6 = 234{,}4$ K

Exercice 3 - Transformations réversibles d'un gaz parfait

Une mole de gaz parfait diatomique occupe initialement un volume de 10 L sous une pression de 1 atm (état A). Le gaz est chauffé à pression constante jusqu'à doubler son volume (état B). Puis, un chauffage à volume constant permet de doubler sa pression (état C). Enfin, une détente adiabatique permet de revenir à la température initiale T_A (état D). Toutes les transformations sont supposées réversibles.

1. Exprimer puis calculer les caractéristiques P, V et T des quatre états A, B, C et D. Les résultats pourront être présentés dans un tableau.

Etat A : $n = 1$; $P_A = 1$ atm ; $V_A = 10$ L

$\Rightarrow T_A = P_A V_A / R = 1{,}013.10^5 \times 10.10^{-3} / 8{,}31 = 122$ K

$A \rightarrow B$: isobare donc $P_B = P_A$

et d'après l'énoncé : $V_B = 2V_A \Rightarrow T_B = 2T_A$

$B \rightarrow C$: isochore donc $V_C = V_B$

et d'après l'énoncé $P_C = 2P_B \Rightarrow T_C = 2T_B$

$C \rightarrow D$: adiabatique donc $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ et d'après l'énoncé $T_D = T_A \Rightarrow 4T_A V_C^{\gamma-1} = T_A V_D^{\gamma-1}$

$\Rightarrow 4V_C^{\gamma-1} = V_D^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = 4^{\frac{1}{\gamma-1}} V_C$

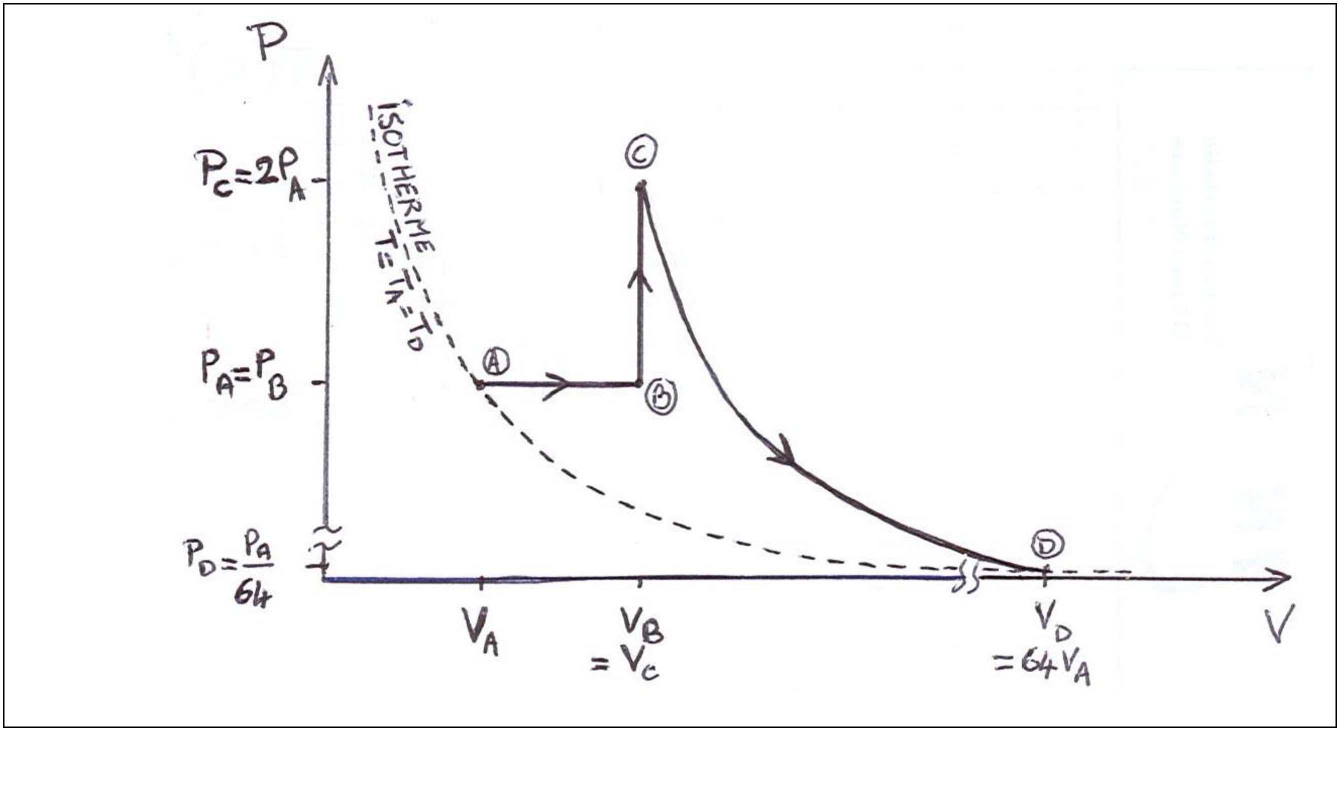
Ce GP étant diatomique, $\gamma = \frac{7}{5}$

$$\Rightarrow 4^{\frac{1}{\gamma-1}} = 4^{5/2} = 2^5 = 32 \Rightarrow V_D = 32V_C = 64\ V_A$$

$$T_D = T_A \Rightarrow P_D V_D = P_A V_A \Rightarrow P_D = P_A V_A / V_D = P_A/64$$

Etat A	Etat B	Etat C	Etat D
$P_A = 1$ atm	$P_B = P_A$ $= 1$ atm	$P_C = 2P_B$ $= 2P_A$ $= 2$ atm	$P_D = P_A V_A / V_D =$ $P_A/64$ $= 0{,}016$ atm
$V_A = 10$ L	$V_B = 2V_A$ $= 20$ L	$V_C = V_B$ $= 2V_A = 20$ L	$V_D = 64V_A$ $= 640$ L
$T_A = 122$ K	$T_B = 2T_A$ $= 244$ K	$T_C = 2T_B =$ $4T_A = 488$ K	$T_D = T_A$ $= 122$ K

2. Représenter les états et les transformations dans le diagramme de Clapeyron.



3. Calculer ΔU et ΔH, puis W et Q pour chacune des trois transformations.

$\Delta U_{AB} = n\overline{c_V}(T_B - T_A) = n\overline{c_V}(2T_A - T_A) = n\overline{c_V}T_A$

mais a priori, on ne connaît pas $\overline{c_V}$, on a juste la constante adiabatique d'un gaz parfait diatomiqu $\gamma = 7/5$ qui est donnée à la première ligne du TD

On sait que $\gamma = \frac{\overline{c_P}}{\overline{c_V}}$ et on connaît la relation de Mayer : $\overline{c_P} - \overline{c_V} = R$

$\Rightarrow \frac{\overline{c_P}}{\overline{c_V}} - 1 = \frac{R}{\overline{c_V}} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{R}{\overline{c_V}} \Rightarrow \overline{c_V} = \frac{R}{\gamma - 1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\Delta U_{AB} = n\frac{R}{\gamma-1}T_A = \frac{P_AV_A}{\gamma-1}}$

$\boldsymbol{\Delta U_{AB}} = \frac{1{,}013.10^5 \times 10.10^{-3}}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{5}{2} \times 1013 = \mathbf{2532{,}5\ J}$

$\Delta H_{AB} = Q_{AB}$ car la transformation est isobare.

On a aussi $\Delta H_{AB} = \gamma\, \Delta U_{AB}$ (voir démonstration ex 2 question 1)

$\boldsymbol{\Delta H_{AB} = Q_{AB}} = \frac{7}{5} \times \frac{5}{2} \times 1013 = \frac{7}{2} \times 1013$

$= \mathbf{3545{,}5\ J}$

$\boldsymbol{W_{AB}} = -P_A(V_B - V_A) = -P_A(2V_A - V_A) = -P_AV_A = -1{,}013.10^5 \times 10.10^{-3} = \mathbf{-1013\ J}$

Ou bien $\mathbf{W_{AB}} = \Delta U_{AB} - Q_{AB} = 3545{,}5 - 2532{,}5$

$= \mathbf{-1013\ J}$

$\mathbf{W_{BC}} = \mathbf{0\ J}$ car la transformation est isochore.

Donc $\mathbf{\Delta U_{BC} = Q_{BC}} = n\overline{c_V}(T_C - T_B) = n\overline{c_V}(4T_A - 2T_A)$

$= n\,\frac{R}{\gamma-1}\,2T_A = 2\Delta U_{AB} = 2 \times 2532{,}5 = \mathbf{5065\ J}$

$\mathbf{\Delta H_{BC}} = \gamma\ \Delta U_{BC} = \frac{7}{5} \times 2\Delta U_{AB} = \frac{7}{5} \times 2 \times \frac{5}{2} \times 1013$

$= 7 \times 1013 = \mathbf{7091\ J}$

$\Delta U_{CD} = W_{CD}$ car $\mathbf{Q_{CD} = 0\ J}$ car la transformation est adiabatique

$\mathbf{\Delta U_{CD} = W_{CD}} = n\overline{c_V}(T_D - T_C) = n\overline{c_V}(T_A - 4T_A)$

$= -3n\overline{c_V}T_A = -3n\,\frac{R}{\gamma-1}\,T_A = -3\Delta U_{AB}$

$= -3 \times 2532{,}5 = -\mathbf{7597{,}5\ J}$

$\mathbf{\Delta H_{CD}} = \gamma\ \Delta U_{CD} = \frac{7}{5} \times (-7597{,}5) = \mathbf{-10\ 636{,}5\ J}$

Exercice 4 - Piston

Un cylindre vertical, fermé par un piston de masse m négligeable et de section S, coulissant sans frottements, contient une mole de gaz parfait diatomique, et est en contact avec une atmosphère extérieure à la pression P_{atm}. Les parois du cylindre et du piston sont adiabatiques. La température initiale du gaz est T_0, sa pression P_0 et son volume $V_0 = S.h_0$ (h_0 est la hauteur initiale du piston dans le cylindre).

1. On dépose **brusquement** sur le piston une masse M. Le piston s'enfonce dans le cylindre et, l'équilibre étant atteint, le volume du gaz devient $V_1 = S.h_1$. La pression du gaz est alors P_1 et sa températureT_1.

   a) Quelle est la nature de la transformation ?

La masse étant déposée brusquement,
le gaz ne passe pas par une succession d'états d'équilibre.
La transformation est donc irréversible.
Les parois du cylindre et du piston étant adiabatiques, la transformation est aussi adiabatique.

Déterminez P_0 et P_1 en écrivant l'équilibre mécanique du piston.

A l'instant initial (état 0), les forces de pression exercées sur le piston s'équilibrent, donc les pressions de part et d'autre du piston sont égales : $\mathbf{P_0 = P_{atm} = 10^5\ Pa}$

Même constat à l'état 1 : La force de pression du gaz (vers le haut) = la force de pression atmosphérique + le poids de la masse M (vers le bas: $P_1S = P_{atm}S + Mg$

donc $\mathbf{P_1 = P_{atm} + Mg/S}$

$= 10^5 + 100\text{x}10/(100.10^{-4}) =$ $\mathbf{2.10^5\ Pa = 2P_0}$

Quelle est la hauteur h_0 du piston mesurée dans le cylindre à l'instant initial ?

$V_0 = S.h_0$ et $P_0V_0 = nRT_0$ donc $\mathbf{h_0 = nRT_0/(P_0S)}$

$1\text{x}8{,}314\text{x}300/(10^5\text{x}100.10^{-4}) =$ **2,49 m**

b) Exprimez le travail échangé $W_{0\rightarrow1}$ durant la transformation en fonction de T_0, T_1, n et R.

Pendant la transformation la pression extérieure reste constante et égale à $P_{atm} + Mg/S = P_1$!!

$\mathbf{W_{0\to1}} = -P_1(V_1-V_0) = -P_1V_1 + P_1V_0$

$= -P_1V_1 + 2P_0V_0 = -nRT_1 + 2nRT_0$

$= \mathbf{R(2T_0 - T_1)}$

c) Exprimez la variation d'énergie interne du gaz $\Delta U_{0\to1}$ en fonction de T_0, T_1, n et R.

$\mathbf{\Delta U_{0\to1} =} n\bar{c}_V(T_1 - T_0) = n\frac{5}{2}R(T_1 - T_0)$

$\mathbf{= \frac{5}{2}R(T_1 - T_0)}$

d) Utilisez les expressions trouvées aux questions b et c, pour en déduire la température finale du gaz T_1.

$\Delta U_{0\to1} = W_{0\to1}$ car $Q_{0\to1} = 0$ J car adiabatique

donc : $R(2T_0 - T_1) = \frac{5}{2}R(T_1 - T_0)$

$\Rightarrow \mathbf{T_1 = \frac{9}{7}T_0 = 385{,}7\ K = 112{,}7°C}$

e) Calculez la valeur du travail échangé durant la transformation $W_{0\to1}$.

$\mathbf{W_{0\to1}} = R(2T_0 - T_1) = 8{,}314(2x300 - 385{,}7)$

$= \mathbf{1780{,}7\ J}$

Quelle est la hauteur h_1 du piston mesurée dans le cylindre à la fin de la transformation ?

$\mathbf{h_1 = RT_1/(P_1S)}$
$= 8{,}314 \times 385{,}7/(2.10^5 \times 100.10^{-4}) = \mathbf{1{,}6\ m}$

2. On enlève maintenant la masse M du piston, et on laisse le système évoluer jusqu'à un nouvel état d'équilibre (2).

a) Que vaut la pression P_2 ?

Equilibre du piston : $P_2 = P_{atm} = P_0 = 10^5$ Pa

b) De manière analogue aux questions 1b à 1e, déterminez le travail échangé pendant la transformation $W_{1\to 2}$, la température T_2 et la hauteur h_2 du piston mesurée dans le cylindre. Pourquoi ne retourne-t-on pas à l'état initial (0) ?

Pendant la transformation la pression extérieure reste constante et égale à $P_2 = P_0 = P_1/2$
$\mathbf{W_{1\to 2}} = - P_2(V_2-V_1) = - P_2V_2 + P_2V_1$
$= - P_2V_2 + P_0V_1 = -nRT_2 + \frac{P_1}{2}V_1$
$= -nRT_2 + \frac{1}{2}nRT_1 = \mathbf{R(\frac{1}{2}T_1 - T_2)}$

$\Delta U_{1\to 2}$ = $n\bar{c}_v(T_2 - T_1) = n\frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$

$= \boldsymbol{\frac{5}{2}R(T_2 - T_1)}$

$R(\frac{1}{2}T_1 - T_2) = = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$

$\Rightarrow$ **$T_2 = \frac{6}{7}T_1$ = 330,6 K = 57,6°C**

$h_2 = RT_2/(P_2S)$ = $8,314\text{x}330,6/(10^5\text{x}100.10^{-4})$

= **2,7 m** $\neq h_0$

Le piston ne revient pas à sa hauteur initiale et le gaz ne retrouve pas sa température et son volume initiaux car il a subi deux transformations irréversibles !! Au début il a été échauffé brusquement, puis quand on relâche la pression, la chaleur ne pouvant pas se dissiper, la température reste plus élevée qu'au départ, donc le gaz occupe un plus grand volume.

Données: $P_{atm} = 10^5$ Pa ; M = 100 kg ;

S = 100 cm^2; $\bar{c}_v$. = $\frac{5}{2}R$; T_0 = 27 °C ; g = 10 m.s^{-2}.

Exercice 5 - Cycle d'un gaz parfait

Une mole de gaz parfait diatomique initialement à l'état A (à la température T_A = 300 K et à la pression P_A = 1 bar) subit le cycle de transformations réversibles suivant :

- (AB) est une compression adiabatique qui amène le gaz à la pression P_B = 5 bars ;
- (BC) est une détente isobare qui ramène le volume du gaz à sa valeur initiale V_A ;
- (CA) est un refroidissement isochore vers l'état initial.

1. Déterminer les caractéristiques des états A, B et C.

	A	B	C
P (bar)	1	5	5
V	$\mathbf{V_A} = \frac{nRT_A}{P_A}$ = 0,025 m^3 **= 25 L**		$\mathbf{V_C} = V_A$ **= 25 L**
T (K)	300		

(AB) est une transformation adiabatique

donc $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \Rightarrow V_B^\gamma = \frac{P_A}{P_B} V_A^\gamma$

$\Rightarrow V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow V_B = 25\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{7}} = 8$ L

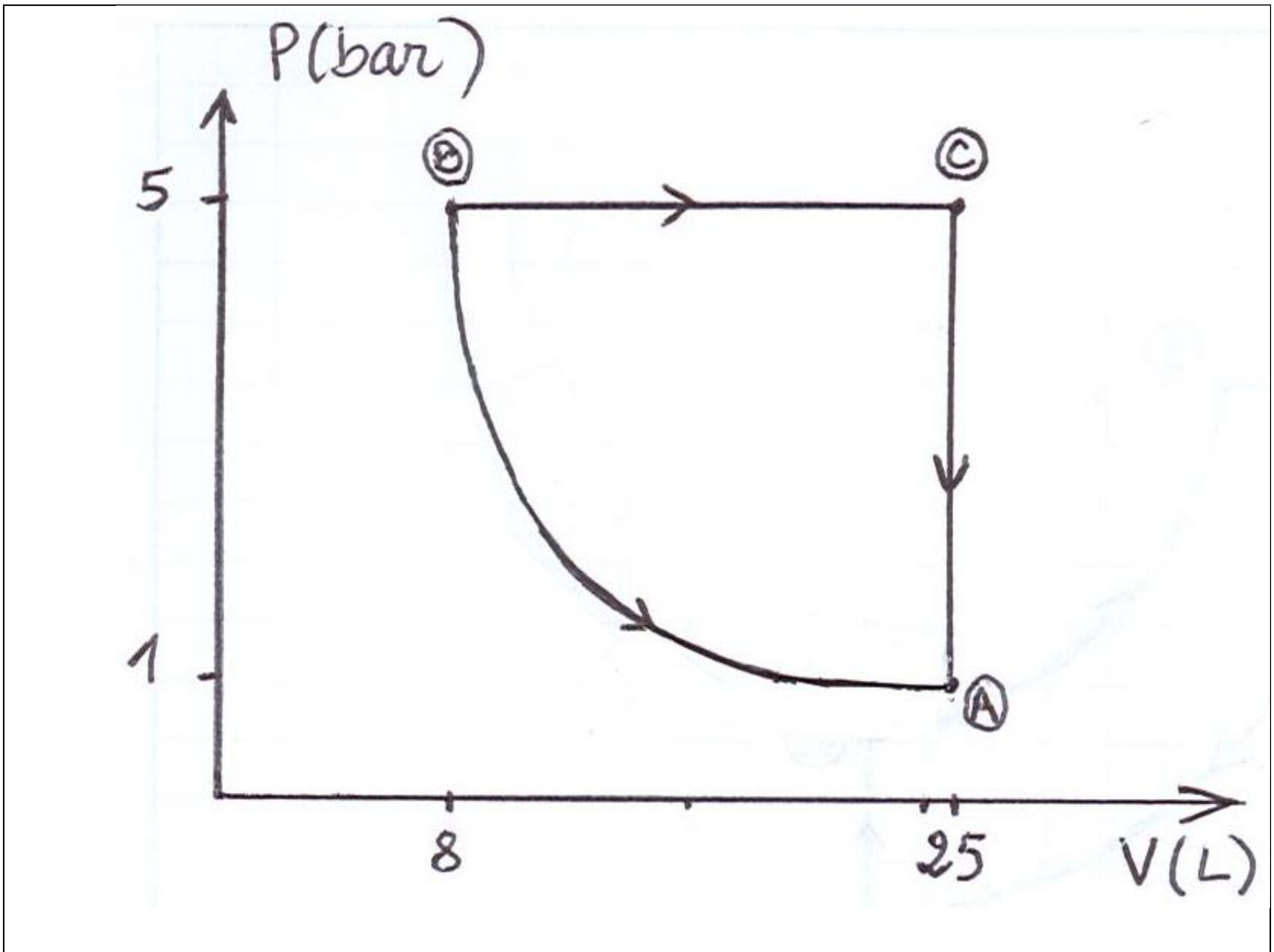
On peut alors calculer $T_B = \frac{P_B V_B}{nR}$

$= \frac{5.10^5 \times 8.10^{-3}}{8,314} = 481$ K

On remarque que $P_C = 5P_A$,

or $V_C = V_A$ donc $T_C = 5T_A = 1500$ K

2. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron.



3. Calculer le travail et la chaleur échangés par le gaz au cours d'un cycle.

$W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$

et $Q_{cycle} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$

et $W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$ J

(AB) est une transformation adiabatique

donc $\mathbf{Q_{AB} = 0\ J} \Longrightarrow \Delta U_{AB} = W_{AB}$

$\Delta U_{AB} = n\overline{c_V}(T_B - T_A) = 1 \times \frac{5}{2}R\ (T_B - T_A)$

$= \frac{5}{2} \times 8{,}314 \times (481 - 300) = \mathbf{W_{AB} = 3762\ J}$

(BC) est une transformation isobare

donc $\mathbf{W_{BC}} = - P_B(V_C - V_B)\ \mathbf{= -8500\ J}$

$\mathbf{Q_{BC} = \Delta H_{BC}} = n\overline{c_P}(T_C - T_B) = 1 \times \frac{7}{2}R(T_C - T_B)$

$= \frac{7}{2} \times 8{,}314 \times (1500 - 481) = \mathbf{29652\ J}$

(CA) est un transformation isochore

donc $\mathbf{W_{BC} = 0\ J}$

$\mathbf{Q_{CA} = \Delta U_{CA}} = n\overline{c_V}(T_A - T_C) = 1 \times \frac{5}{2}R(T_A - T_C)$

$= \frac{5}{2} \times 8{,}314 \times (300 - 1500) = \mathbf{-24942\ J}$

$\mathbf{W_{cycle}} = 3762 - 8500 = \mathbf{-4738\ J}$ et

$\mathbf{Q_{cycle}} = 29652 - 24942\ \mathbf{= 4710\ J} \approx \mathbf{-}\ W_{cycle}$