Feuille 2

Dans cette feuille et les suivantes, on manipulera régulièrement des vecteurs sans expliciter leurs coordonnées, c'est-à-dire qu'un vecteur pourra juste s'écrire avec une lettre (au hasard, v).

En général en physique lorsqu'une lettre comme v désigne un vecteur, on la note $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$. C'est plus rarement le cas en mathématiques, donc lorsque vous voyez une lettre réfléchissez à l'objet qu'elle représente !

Problème 13 ().

On considère la transformation suivante

$$x' = 3x - 2y$$
$$y' = 5x - 4y$$
$$z' = 2x - y$$

1. Écrire cette relation sous la forme $v' = Mv$ en précisant quels sont les vecteurs v, v' et la matrice M.
2. Exprimer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de deux vecteurs, avec x et y comme coefficients de la combinaison linéaire.

On dit que cette opération définit alors le produit de la matrice M par le vecteur v

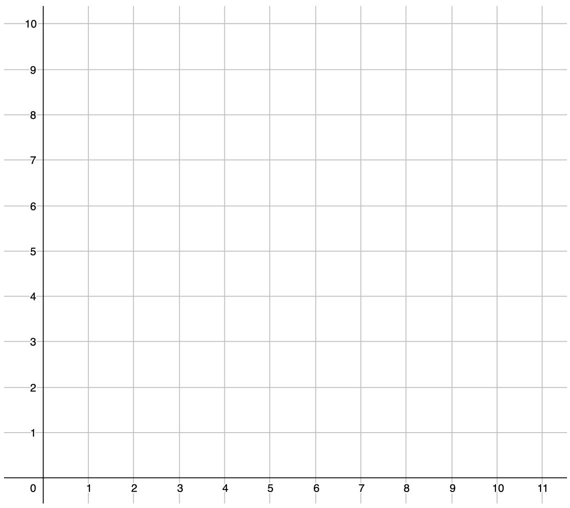
3. Calculer le produit suivante :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problème 14 ().
Lire la bande dessinée disponible via le QR code puis écrire, à l'aide du symbole somme $\sum$, la distance parcourue par le projectile au bout de N étapes de la trajectoire du projectile.

Problème 15 ().

Une fourmi se situe à l'origine du repère ci-dessous et se déplace en effectuant 10 déplacements au hasard, chaque déplacement étant soit vers le haut soit vers la droite.



Dessiner les points où elle peut se rendre et écrire l'ensemble de ces points *en compréhension*.

Problème 16 ().

Sur le lien suivant, vous pouvez faire et visualiser des combinaisons linéaires de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: https://www.geogebra.org/m/tkhmjuws Sachant que :

- Vous pouvez modifier grâce aux curseurs les coefficients de la combinaison linéaire
- Vous pouvez modifier les coordonnées des trois vecteurs w_1, w_2 et w_3
- Vous visualiser automatiquement le résultat du calcul de la combinaison linéaire
- Le vecteur v désigne un vecteur cible que l'on cherche à atteindre grâce à w_1, w_2 et w_3

1. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 qui vous semble permettre d'atteindre n'importe quel vecteur cible.
2. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 tel que w_1 tout seul permettrait d'atteindre autant de vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs.
3. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 tel que w_2 et w_1 permettent d'atteindre autant de

vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs, mais plus de vecteur cibles que w_1 tout seul.

Problème 17 ().

Posons $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En représentant graphiquement les 4 ensembles, illustrer la différence entre les ensembles suivants :

$E_1 = \{v_1 + tv_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $E_2 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$

$E_1 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+\}$ $\quad$ $E_2 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}_-, t$

Problème 18 ().

Trois étudiantes s'intéressent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Chaque équation est notée L_1 (ligne 1), L_2 (ligne 2) et L_3 (ligne 3).
Elles veulent simplifier ce système en combinant des lignes entre elles. Par exemple, l'opération L_1-L_2 donnerait l'équation suivante :

$$x - y + z - (x + 2y + z) = 1 - 0$$

c'est-à-dire

$$-3y - z = 1$$

L'opération $2L_1$ donnerait : $2(x - y + z) = 2 \times 1$, c'est-à-dire $2x - 2y + 2z = 2$.

- L'une dit : "je fais l'opération $L_1 - L_2$ pour faire une nouvelle équation, je garde L_3 aussi, et comme ça mon système n'a plus que 2 équations".

- Une autre dit "je fais l'opération $L_3 + 2L_1$, je remplace L_3 par la nouvelle équation obtenue et je garde aussi L_1 et L_2

- Une troisième dit : ”Je calcule $L_1 - L_2$ et $L_2 - L_1$, je remplace la première ligne par le premier résultat, la deuxième ligne par le deuxième résultat, et je garde L_3”

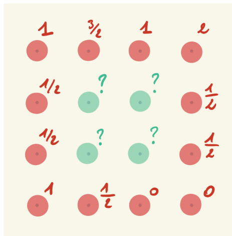
1. Écrire dans chacun des cas le nouveau système obtenu.
2. Peut-on à chaque fois revenir en arrière, c’est-à-dire retrouver l’ancien système à partir du nouveau en combinant les lignes ?
3. Défendez alors la méthode qui vous paraît la plus pertinente parmi les 3.

Problème 19 ().

L’ARS (Agence Régionale de Santé) Bretagne souhaite étudier la prolifération des cyanobactéries (”Algues bleues”) dans le lac de Guerledan. Au-delà de 100 000 cellules par millilitre d’eau elle recommande d’interdire la baignade.

La concentration en cyanobactéries n’étant pas identique dans tout le lac, des prélèvements sont faits de manières régulières en bord de lac.

On simplifie la situation par le schéma suivant, sur lequel les concentrations au bord du lac (en rouge) sont indiquées (une valeur de 1 correspond à 100 000 cellules par millilitre d'eau).



Dans une hypothèse de diffusion uniforme, la concentration en un point au milieu du lac (en vert) est la moyenne des concentrations de tous les points autour.

Établir un système linéaire dont les inconnues sont les 4 valeurs de concentration au milieu du lac.

Problème 20 ().

Soit $n \geq 3$ un nombre entier.

1. Écire, à l'aide du symbole $\sum$ et en appelant l'indice i, la somme suivante : $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

2. On pose un nouvel indice j, calculé à partir de i en faisant $j = n - i$.

   (a) Quelle est la plus petite valeur de j ? La plus grande ?

   (b) Exprimer i en fonction de j.

   (c) Réécrire alors la somme S en utilisant cette fois l'indice j. Concrètement, qu'est-ce que cela revient à faire sur l'écriture de la somme ?

3. Calculer $2 \times S$ en additionnant les deux expressions de S trouvées précédemment.

4. En déduire la valeur de S.

5. Comment pourrait-on alors calculer alors $\sum_{i=3}^{50} i$?

Problème 21 ().

On pose la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle qu'on exprime la transformation d'un vecteur (x, y, z) vers un vecteur (x', y', z') par l'opération :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On dira qu'on fait alors *le produit* de la matrice M par le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Rappeler comment s'écrivent individuellement chaque coordonnées $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ en fonction de x, y et z.
2. Écrire alors le vecteur $\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de 3 vecteurs, avec x, y et z comme coefficients de la combinaison linéaire.
3. Calculer ainsi $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Problème 22 ().

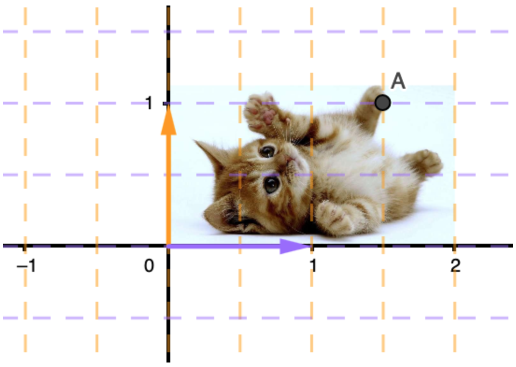
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite *polynomiale* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

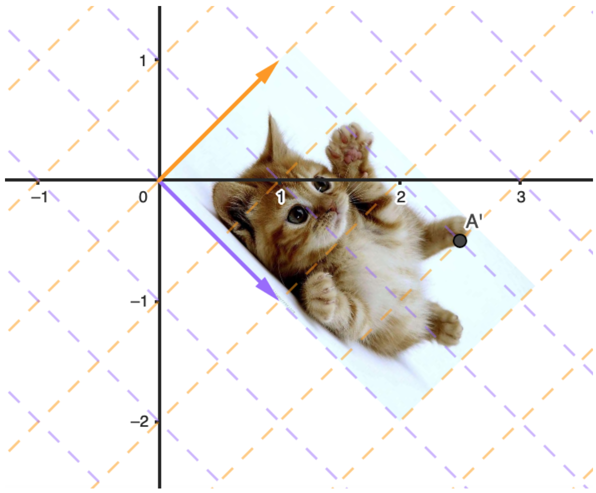
1. Exprimer la dérivée $f^{'}$ sous forme de fonction polynomiale.

2. Démontrer que la somme de deux fonctions polynomiales est encore une fonction polynomiale, et expliciter son écriture.

Problème 23 ().

Ci-dessous est représentée une image avant transformation (à gauche) et après transformation (à droite). Déterminer la matrice responsable de cette transformation.





Problème 24 ().

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit M une matrice possédant n colonnes. Posons $v_1 \in \mathbb{R}^n$ et $v_2 \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs ayant n cordonnées.

Démontrer que :

$$M(v_1 + v_2) = Mv_1 + Mv_2$$