

Feuille 2 : savoir-faire associés et QCM de compréhension

Le QCM (à faire en dehors du cours!) est disponible ici :

<https://www.mathmatize.com/c/1516?task=12c18c58-4a36-4656-9d8b-3>

Ce lien est également sur eCampus.

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matrice-vecteur

Justifier que le produit Av est possible ou non dans chacun des cas suivants, puis l'effectuer si possible :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correction

$$1. Av = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. Av = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. impossible car le vecteur a moins de coordonnées que le nombre de colonnes de la matrice.

$$4. Av = -1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5. Av = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Calculer une somme arithmétique (ou s'y ramenant)

Calculer (ou exprimer) les sommes suivantes :

$$1. \sum_{j=1}^{10} j$$

$$4. \sum_{k=4}^{26} 2k$$

$$2. \sum_{n=0}^{50} n$$

$$5. \sum_{j=2}^{11} \frac{j-1}{2}$$

$$3. \sum_{n=1}^p (1-n)$$

Correction

$$1. \sum_{j=1}^{10} j = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

$$2. \sum_{n=0}^{50} n = \frac{50 \times 51}{2}$$

$$3. \sum_{n=1}^p (1-n) = \sum_{n=1}^p 1 - \sum_{n=1}^p n = p - \frac{p(p+1)}{2}$$

4. *En utilisant la linéarité et le nombre de termes pour calcu-*

er la première somme, on obtient :

$$\sum_{k=4}^{26} 2k = 2 \sum_{k=4}^{26} k = 2 \left(\sum_{k=1}^{26} k - 1 - 2 - 3 \right) = 2 \left(\frac{26 \times 27}{2} - 6 \right) = 26 \times 27 - 12$$

$$5. \sum_{j=2}^{11} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{11} j - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{11} 1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{11} j - 1 \right) - \frac{1}{2} \times 10 = \frac{1}{2} \left(\frac{11 \times 12}{2} - 1 \right) - 5 = \frac{65}{2} - 5$$

Exercice 3 ()

Savoir-Faire

- Effectuer un changement d'indice

1. Transformer les sommes suivantes en sommes dont l'indice commence à 0 :

(a)
$$\sum_{j=2}^{n+1} j - 2$$

(d)
$$\sum_{i=4}^{23} 1$$

(b)
$$\sum_{j=1}^{n+1} j + 1$$

(e)
$$\sum_{r=1}^n (r+1)^2$$

(c)
$$\sum_{k=3}^n 2^k$$

(f)
$$\sum_{m=2}^{n+1} 3^{m-1}$$

2. Effectuer le retournement $j = n - k + 1$ dans la somme

suiivante : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1}$

3. Effectuer le retournement $j = 2n - k$ dans la somme sui-

vante : $\sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Correction

1. (a) On pose $k = j - 2$, ainsi k va de 0 à $n+1-2 = n-1$,
et comme $j = k + 2$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k$$

(b) On pose $k = j - 1$, ainsi k va de 0 à $n+1-1 = n$, et
comme $j = k + 1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^n k + 2$$

(c) On pose $i = k - 3$, ainsi i va de 0 à $n-3$, et comme
 $k = i + 3$ on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-3} 2^{i+3}$$

(d) On pose $j = i - 4$, ainsi j va de 0 à $23-4 = 19$, et on
obtient :

$$\sum_{i=0}^{19} 1$$

(e) On pose $k = r - 1$, ainsi k va de 0 à $n - 1$, et comme $r = k + 1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k + 2)^2$$

(f) On pose $j = m - 2$, ainsi j va de 0 à $n + 1 - 2 = n - 1$, et comme $m = j + 2$ on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n-1} 3^{j+1}$$

2. Avec le changement d'indice proposé, j va de $n - n + 1 = 1$ à $n - 1 + 1 = n$, et on obtient la somme suivante : $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$

3. Avec le changement d'indice proposé, j va de $2n - (2n - 1) = 1$ à $2n - (n + 1) = n - 1$, $k = 2n - j$ et on obtient la somme suivante : $\sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{(2n - j)\pi}{2n}\right)$