Feuille 2 : savoir-faire associés et QCM de compréhension

Le QCM (à faire en dehors du cours !) est disponible ici :
https://www.mathmatize.com/c/1516?task=12c18c58-4a36-4656-9d8b-3bea02382ed7
Ce lien est également sur eCampus.

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un produit matrice-vecteur

Justifier que le produit Av est possible ou non dans chacun des cas suivants, puis l'effectuer si possible :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Correction

1. $Av = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $Av = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. impossible car le vecteur a moins de coordonnées que le nombre de colonnes de la matrice.

4. $Av = -1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $Av = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Calculer une somme arithmétique (ou s'y ramenant)

Calculer (ou exprimer) les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{50} n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} (1-n)$
4. $\displaystyle\sum_{k=4}^{26} 2k$
5. $\displaystyle\sum_{j=2}^{11} \frac{j-1}{2}$

Correction

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j = \frac{10 \times 11}{2} = 55$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{50} n = \frac{50 \times 51}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} (1-n) = \sum_{n=1}^{p} 1 - \sum_{n=1}^{p} n = p - \frac{p(p+1)}{2}$
4. *En utilisant la linéarité et le nombre de termes pour calculer la première somme, on obtient :*
$$\sum_{k=4}^{26} 2k = 2\sum_{k=4}^{26} k = 2\Big(\sum_{k=1}^{26} k \quad -1-2-3\Big) = 2\Big(\frac{26 \times 27}{2} - 6\Big) = 26 \times 27 - 12$$
5. $\displaystyle\sum_{j=2}^{11} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{11} j - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{11} 1 = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{11} j \quad -1\Big) - \frac{1}{2} \times 10 = \frac{1}{2}\Big(\frac{11 \times 12}{2} - 1\Big) - 5 = \frac{65}{2} - 5$

Exercice 3 ().

Savoir-Faire

- Effectuer un changement d'indice

1. Transformer les sommes suivantes en sommes dont l'indice commence à 0 :

(a)
$$\sum_{j=2}^{n+1} j-2$$

(b)
$$\sum_{j=1}^{n+1} j+1$$

(c)
$$\sum_{k=3}^{n} 2^k$$

(d)
$$\sum_{i=4}^{23} 1$$

(e)
$$\sum_{r=1}^{n} (r+1)^2$$

(f)
$$\sum_{m=2}^{n+1} 3^{m-1}$$

2. Effectuer le retournement $j = n-k+1$ dans la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1}$

3. Effectuer le retournement $j = 2n-k$ dans la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Correction

1. (a) *On pose $k = j-2$, ainsi k va de 0 à $n+1-2 = n-1$, et comme $j = k+2$ on obtient :*
$$\sum_{k=0}^{n-1} k$$
   (b) *On pose $k = j-1$, ainsi k va de 0 à $n+1-1 = n$, et comme $j = k+1$ on obtient :*
$$\sum_{k=0}^{n} k+2$$
   (c) *On pose $i = k-3$, ainsi i va de 0 à $n-3$, et comme $k = i+3$ on obtient :*
$$\sum_{i=0}^{n-3} 2^{i+3}$$
   (d) *On pose $j = i-4$, ainsi j va de 0 à $23-4 = 19$, et on obtient :*
$$\sum_{i=0}^{19} 1$$
   (e) *On pose $k = r-1$, ainsi k va de 0 à $n-1$, et comme $r = k+1$ on obtient :*
$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+2)^2$$

(f) *On pose* $j = m - 2$*, ainsi* j *va de* 0 *à* $n+1-2 = n-1$*, et comme* $m = j+2$ *on obtient :*

$$\sum_{j=0}^{n-1} 3^{j+1}$$

2. *Avec le changement d'indice proposé,* j *va de* $n - n + 1 = 1$ *à* $n - 1 + 1 = n$*, et on obtient la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$

3. *Avec le changement d'indice proposé,* j *va de* $2n-(2n-1) = 1$ *à* $2n-(n+1) = n-1$*,* $k = 2n - j$ *et on obtient la somme suivante :* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right)$