Feuille 2

Dans cette feuille et les suivantes, on manipulera régulièrement des vecteurs sans expliciter leurs coordonnées, c'est-à-dire qu'un vecteur pourra juste s'écrire avec une lettre (au hasard, v).
En général en physique lorsqu'une lettre comme v désigne un vecteur, on la note $\vec{v}$ ou $\mathbf{v}$. C'est plus rarement le cas en mathématiques, donc lorsque vous voyez une lettre réfléchissez à l'objet qu'elle représente !

Problème 13 ().
On considère la transformation suivante

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 5x - 4y \\ z' &= 2x - y \end{aligned}$$

1. Écrire cette relation sous la forme $v' = Mv$ en précisant quels sont les vecteurs v, v' et la matrice M.
2. Exprimer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de deux vecteurs, avec x et y comme coefficients de la combinaison linéaire.

   On dit que cette opération définit alors le produit de la matrice M par le vecteur v
3. Calculer le produit suivante :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correction

1. *En posant $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on remarque que la relation définit la transformation de v en v' par l'intermédiaire de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*
2. *On a en traduisant sous forme de vecteurs les relations de l'énoncé :*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

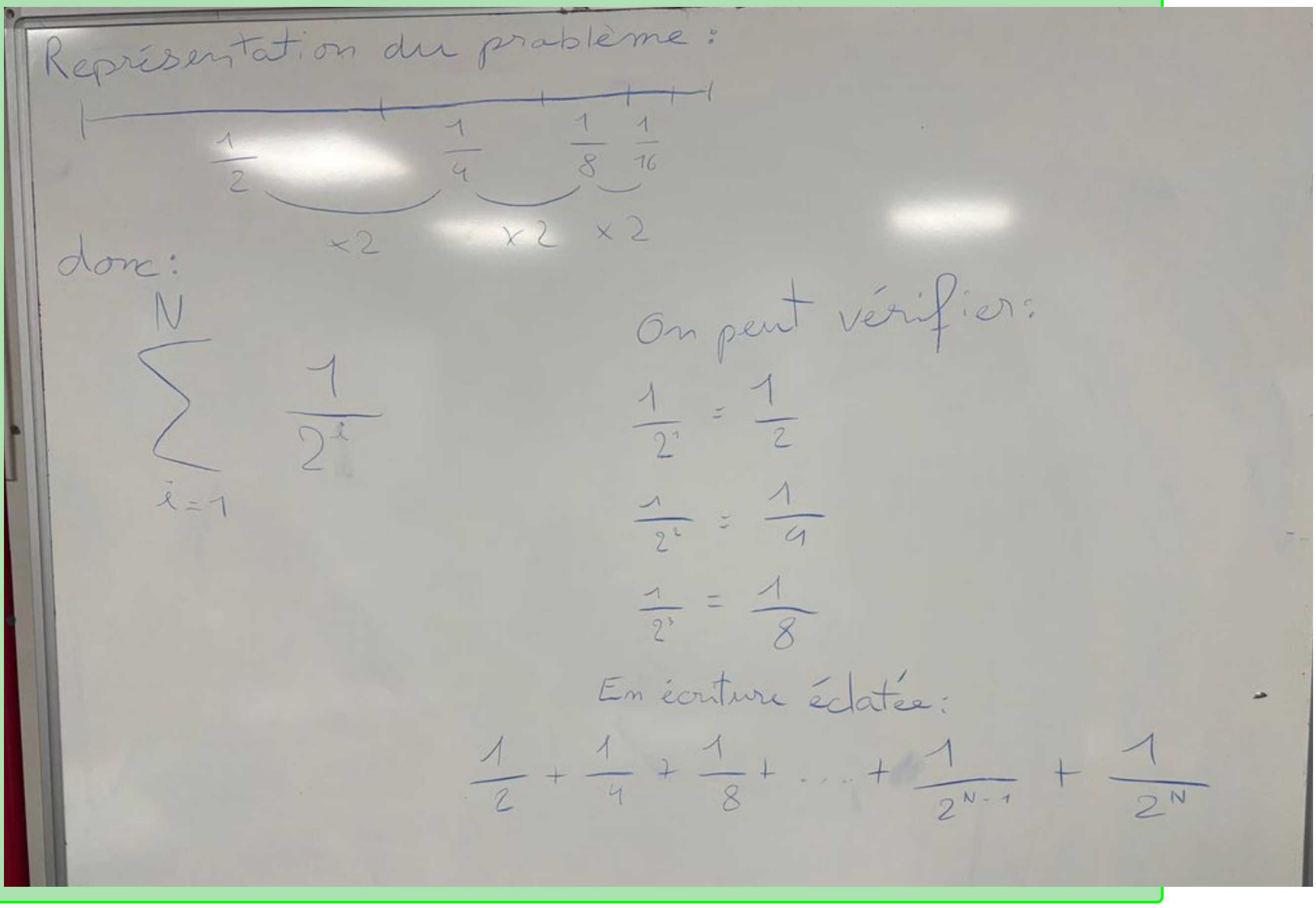
3. *Il s'agit d'utiliser la relation précédente, avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jouant le rôle de v et on cherche à calculer v', on a*

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problème 14 ().

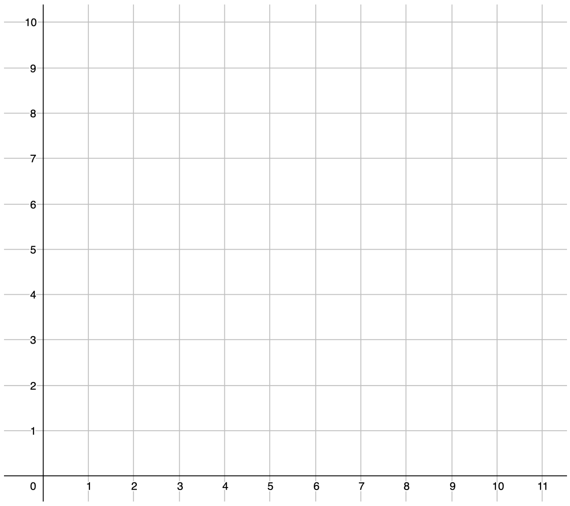
Lire la bande dessinée disponible via le QR code puis écrire, à l'aide du symbole somme $\sum$, la distance parcourue par le projectile au bout de N étapes de la trajectoire du projectile.

Correction



Problème 15 ().

Une fourmi se situe à l'origine du repère ci-dessous et se déplace en effectuant 10 déplacements au hasard, chaque déplacement étant soit vers le haut soit vers la droite.
Dessiner les points où elle peut se rendre et écrire l'ensemble de ces points *en compréhension.*



Correction

En notant x le nombre total de pas vers la droite et y le nombre total de pas vers le haut, on a nécessairement $x + y = 10$. Donc l'ensemble des points finaux possibles est :

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y = 10\right\}$$

Problème 16 ().
Sur le lien suivant, vous pouvez faire et visualiser des combinaisons linéaires de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: https://www.geogebra.org/m/tkhmjuws Sachant que :

- Vous pouvez modifier grâce aux curseurs les coefficients de la combinaison linéaire
- Vous pouvez modifier les coordonnées des trois vecteurs w_1, w_2 et w_3
- Vous visualiser automatiquement le résultat du calcul de la combinaison linéaire
- Le vecteur v désigne un vecteur cible que l'on cherche à atteindre grâce à w_1, w_2 et w_3

1. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 qui vous semble permettre d'atteindre n'importe quel vecteur cible.
2. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 tel que w_1 tout seul permettrait d'atteindre autant de vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs.
3. Trouver un exemple de w_1, w_2 et w_3 tel que w_2 et w_1 permettent d'atteindre autant de vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs, mais plus de vecteur cibles que w_1 tout seul.

Correction

1. *On peut par exemple prendre 3 vecteurs qui s'appuient sur les 3 axes du repère :* $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   En effet, on remarque alors que n'importe quel vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *peut être écrit comme* *combinaison linéaire de ces 3 vecteurs :*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *Pour que w_1 tout seul permette d'atteindre autant de vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs, cela signifie que w_2 et w_3 n'apportent pas de nouvelle direction. C'est-à-dire que w_2 et w_3 sont colinéaires à w_1. On peut donc par exemple prendre :*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. *Pour que w_2 et w_1 permettent d'atteindre autant de vecteur cibles qu'avec les 3 vecteurs, il faut faire en sorte que w_3 n'apporte pas de nouvelle direction. Il peut par exemple être colinéaire à w_1, colinéaire à w_2 ou bien encore s'écrire comme combinaison linéaire de w_1 et w_2. Par exemple :*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet on a dans ce cas pour n'importe quels nombres réels x, y, z :

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = xw_1 + yw_2 + z(w_1 + w_2) = (x + z)w_1 + (y + z)w_2$$

ce qui signifie qu'un vecteur atteignable grâce à w_1, w_2 et w_3 l'est tout autant avec juste w_1 et w_2.

Problème 17 ().

Posons $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

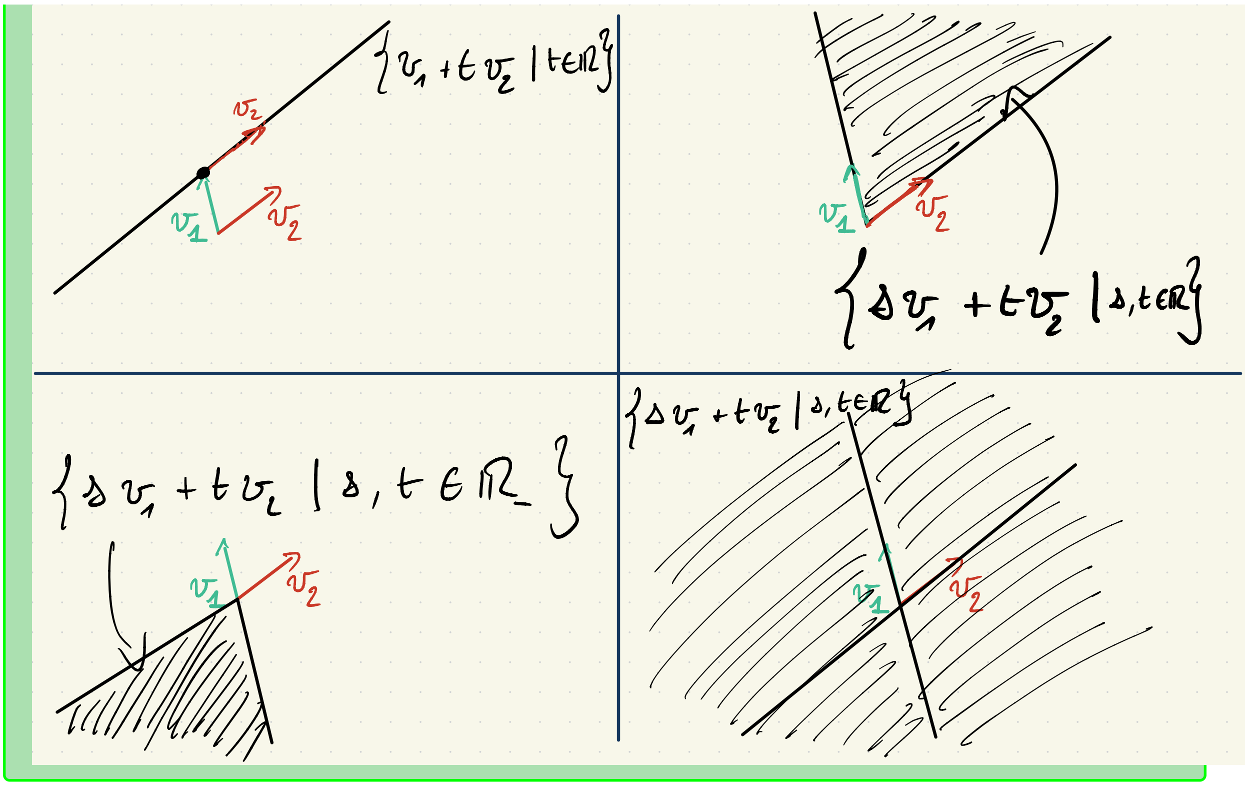
En représentant graphiquement les 4 ensembles, illustrer la différence entre les ensembles suivants :

$$E_1 = \{v_1 + tv_2 \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad E_2 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$E_1 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+\} \qquad E_2 = \{sv_1 + tv_2 \mid s \in \mathbb{R}_-, t \in \mathbb{R}_-\}$$

Correction

Chaque vecteur avec un coefficient multiplicateur permet de suivre une direction, dans le sens du vecteur si le coefficient est positif, dans le sens opposé s'il est négatif, dans les deux sens si c'est un réel quelconque.



Problème 18 ().
Trois étudiantes s'intéressent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Chaque équation est notée L_1 (ligne 1), L_2 (ligne 2) et L_3 (ligne 3).
Elles veulent simplifier ce système en combinant des lignes entre elles. Par exemple, l'opération $L_1 - L_2$ donnerait l'équation suivante :

$$x - y + z - (x + 2y + z) = 1 - 0$$

c'est-à-dire

$$-3y - z = 1$$

L'opération $2L_1$ donnerait : $2(x - y + z) = 2 \times 1$, c'est-à-dire $2x - 2y + 2z = 2$.

- L'une dit : "je fais l'opération $L_1 - L_2$ pour faire une nouvelle équation, je garde L_3 aussi, et comme ça mon système n'a plus que 2 équations".
- Une autre dit "je fais l'opération $L_3 + 2L_1$, je remplace L_3 par la nouvelle équation obtenue et je garde aussi L_1 et L_2
- Une troisième dit : "Je calcule $L_1 - L_2$ et $L_2 - L_1$, je remplace la première ligne par le premier résultat, la deuxième ligne par le deuxième résultat, et je garde L_3"

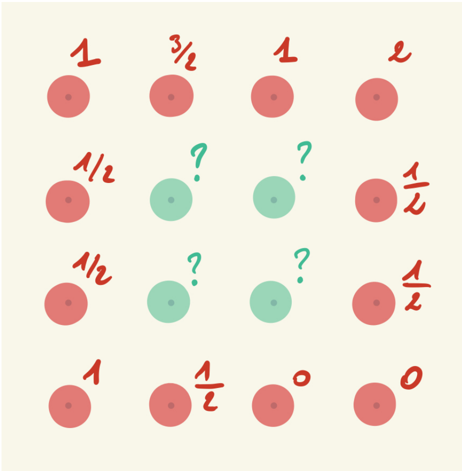
1. Écrire dans chacun des cas le nouveau système obtenu.
2. Peut-on à chaque fois revenir en arrière, c'est-à-dire retrouver l'ancien système à partir du nouveau en combinant les lignes ?
3. Défendez alors la méthode qui vous paraît la plus pertinente parmi les 3.

Correction

1. *On obtient dans chacun des cas :*
   - $\begin{cases} \quad\ -3y - \ z = 1 \\ -2x - \ y + 2z = -1 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x - \ y + \ z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ \quad -3y + 4z = 1 \end{cases}$
   - $\begin{cases} \quad\ -3y - \ z = 1 \\ \qquad 3y + \ z = -1 \\ -2x - \ y + 2z = -1 \end{cases}$
2. *Sur le premier système, on ne peut pas retrouver l'ancienne L_1 ni l'ancienne L_2 avec les deux lignes du nouveau système. Sur le second système, on a toujours L_1 et L_2 et on peut retrouver l'ancienne L_3 en effectuant $L_3 - 2L_1$. Le dernier système est en fait le même que le premier puisque les deux premières équations sont les mêmes !*
3. *Si on ne peut pas revenir en arrière, cela signifie que les deux systèmes ne sont pas équivalents, c'est-à-dire que les solutions ne sont pas les mêmes. Donc si on veut simplifier le système tout en conservant les mêmes solutions, il faut privilégier la deuxième opération.*

Problème 19 ().
L'ARS (Agence Régionale de Santé) Bretagne souhaite étudier la prolifération des cyanobactéries ("Algues bleues") dans le lac de Guerledan. Au-delà de 100 000 cellules par millilitre d'eau elle recommande d'interdire la baignade.
La concentration en cyanobactéries n'étant pas identique dans tout le lac, des prélèvements sont faits de manières régulières en bord de lac.

On simplifie la situation par le schéma suivant, sur lequel les concentrations au bord du lac (en rouge) sont indiquées (une valeur de 1 correspond à 100 000 cellules par millilitre d'eau).
Dans une hypothèse de diffusion uniforme, la concentration en un point au milieu du lac (en vert) est la moyenne des concentrations de tous les points autour.
Établir un système linéaire dont les inconnues sont les 4 valeurs de concentration au milieu du lac.



Correction

En posant a, b, c et d les 4 valeurs à trouver (a et b sur la première rangée, c et d sur la deuxième) et en effectuant les calculs des moyennes des valeurs autour, on a :

- $a = \dfrac{1 + \frac{3}{2} + 1 + b + d + c + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{8}$ *donc* $8a - b - c - d = \dfrac{9}{2}$

- $b = \dfrac{\frac{3}{2}+1+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+d+c+a}{8}$ *donc* $-a+8b-c-d=\dfrac{11}{2}$
- $d = \dfrac{a+b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+\frac{1}{2}+c}{8}$ *donc* $-a-b-c+8d=\dfrac{3}{2}$
- $c = \dfrac{\frac{1}{2}+a+b+d+0+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}}{8}$ *donc* $-a-b+8c-d=\dfrac{5}{2}$

On obtient donc finalement le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 8a - b - c - d = \dfrac{9}{2} \\ -a + 8b - c - d = \dfrac{11}{2} \\ -a - b - c + 8d = \dfrac{3}{2} \\ -a - b + 8c - d = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Problème 20 ().
Soit $n \geq 3$ un nombre entier.

1. Écire, à l'aide du symbole $\sum$ et en appelant l'indice i, la somme suivante : $S = 1+2+3+\cdots+n$
2. On pose un nouvel indice j, calculé à partir de i en faisant $j = n - i + 1$.
   (a) Quelle est la plus petite valeur de j ? La plus grande ?
   (b) Exprimer i en fonction de j.
   (c) Réécrire alors la somme S en utilisant cette fois l'indice j. Concrètement, qu'est-ce que cela revient à faire sur l'écriture de la somme ?
3. Calculer $2 \times S$ en additionnant les deux expressions de S trouvées précédemment.
4. En déduire la valeur de S.
5. Comment pourrait-on alors calculer $\displaystyle\sum_{i=3}^{50} i$?

Correction

1. *On a :* $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$
2. *On pose un nouvel indice j, calculé à partir de i en faisant $j = n - i + 1$.*
   (a) L'indice j est le plus petit lorsque la valeur i est la plus grande, on obtient donc comme valeur $n - n + 1 = 1$. La plus grande valeur est $n - 1 + 1 = n$.
   (b) En isolant i dans la relation, on a $i = n - j + 1$
   (c) D'après la relation précédente, faire la somme des i revient à faire la somme des $n - j + 1$, et j varie de 1 à n d'après a). Donc :

$$S = \sum_{j=1}^{n} (n - j + 1)$$

   Concrètement cette écriture donne $S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$ c'est-à-dire que c'est la somme de départ écrite à l'envers

3. *On a :*

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n}(n-j+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) && \textit{car le nom de l'indice n'a pas d'importance} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i) && \textit{par linéarité} \\
&= n(n+1)
\end{aligned}$$

4. *On a donc :*

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. *On peut écrire, en forçant la somme à commencer à l'indice $i = 1$ et en enlevant ensuite les termes en trop :*

$$\sum_{i=3}^{50} i = \sum_{i=1}^{50} i \quad -1-2 = \frac{50 \times 51}{2} - 3$$

Problème 21 ().
On pose la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle qu'on exprime la transformation d'un vecteur (x, y, z) vers un vecteur (x', y', z') par l'opération :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On dira qu'on fait alors *le produit* de la matrice M par le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Rappeler comment s'écrivent individuellement chaque coordonnée x', y', z' en fonction de x, y et z.
2. Écrire alors le vecteur $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de 3 vecteurs, avec x, y et z comme coefficients de la combinaison linéaire.
3. Calculer ainsi $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Correction

1. Les relations s'obtiennent grâce à la matrice M :

$$x' = x - y + 2z$$
$$y' = 2x + z$$
$$z' = x - y$$

2. Les relations de la question précédente se traduisent en terme de vecteurs par l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Il s'agit de calculer l'image de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ par la transformation, on applique donc le résultats de la question précédente :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problème 22 ().

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite *polynomiale* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

1. Exprimer la dérivée f' sous forme de fonction polynomiale.
2. Démontrer que la somme de deux fonctions polynomiales est encore une fonction polynomiale, et expliciter son écriture.

Correction

Voilà deux rédactions correctes :

Problème 22.

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

1 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$

$= \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$

2. On pose $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, avec $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

et $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, avec $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

des fonctions polynomiales

Soit la somme des deux

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots + (a_n + b_n) x^n$

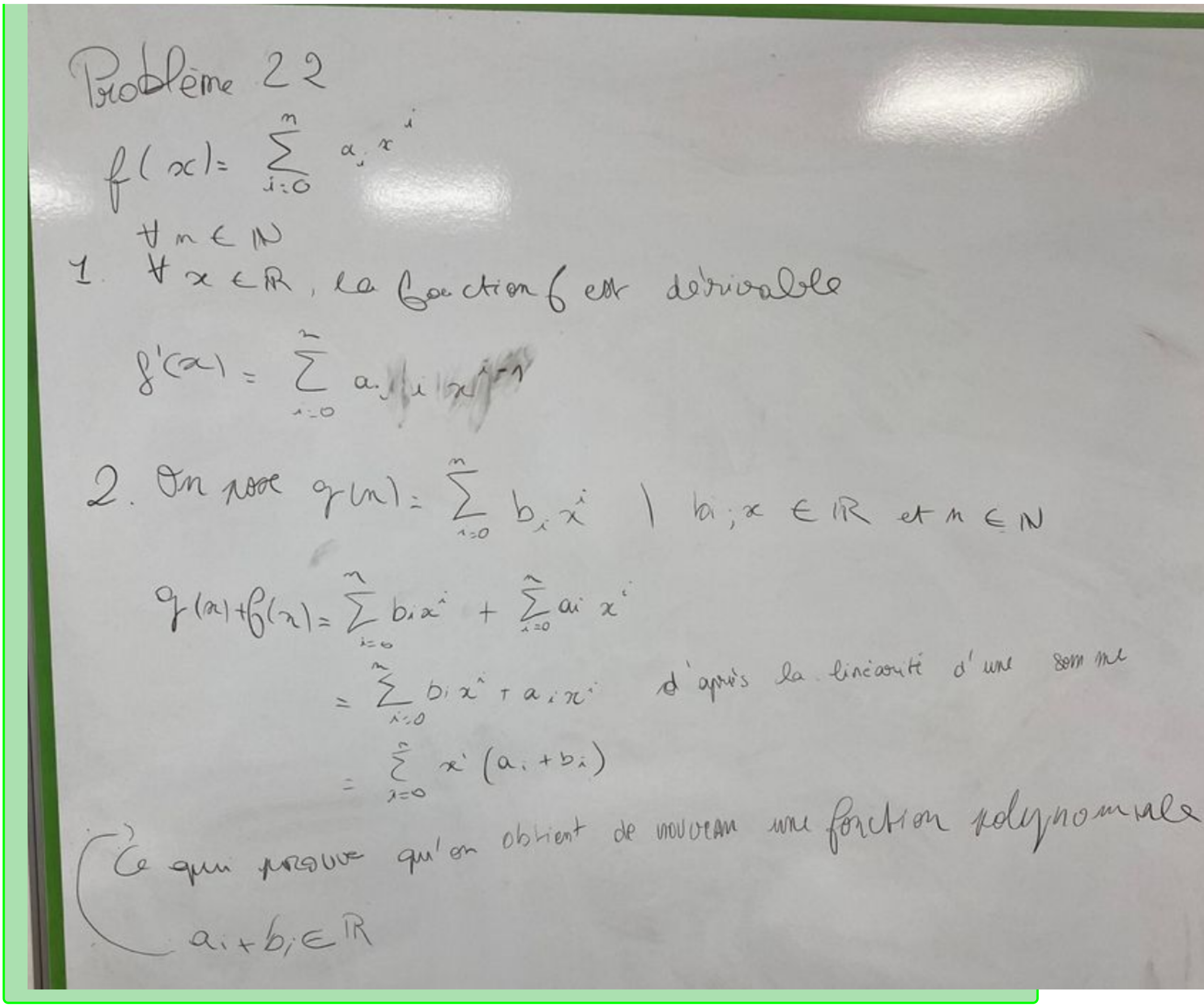
$= \sum_{i=0}^{n} x^i (a_i + b_i)$ → Donc $f(x) + g(x)$ est une fonction polynomiale

Autre methode

$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + b_i x^i$ d'après la loi de linéarité des sommes

$= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$



Problème 22

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$\forall n \in \mathbb{N}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable

$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, i \, x^{i-1}$

2. On pose $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \mid b_i ; x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$g(x) + f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + a_i x^i$ d'après la linéarité d'une somme

$= \sum_{i=0}^{n} x^i (a_i + b_i)$

Ce qui prouve qu'on obtient de nouveau une fonction polynomiale

$a_i + b_i \in \mathbb{R}$

Problème 23 ($\star$).

Ci-dessous est représentée une image avant transformation (à gauche) et après transformation (à droite). Déterminer la matrice responsable de cette transformation.

Problème 24 ($\star$).
Soit $n \geq 1$ un entier. Soit M une matrice possédant n colonnes. Posons $v_1 \in \mathbb{R}^n$ et $v_2 \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs ayant n cordonnées.
Démontrer que :

$$M(v_1 + v_2) = Mv_1 + Mv_2$$