Eval 4 : MG2

Important : Toutes les questions doivent être justifiées soigneusement, argumentées.

1 Cours : preuve étoilée

Voici une preuve du fait que pour un endomorphisme symétrique f dans un ev euclidien, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux. Dans cette preuve, justifiez chaque point marqué par un chiffre.

Preuve :

Soient $\lambda \neq \mu$ deux réels. Prenons un élément u de E_λ l'espace propre associé à λ, $\underset{(1)}{alors}$ $f(u) = \lambda u$.
Prenons un élément v de E_μ l'espace propre associé à μ, alors $f(v) = \mu v$.
$\underset{(2)}{Or}$ $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$. D'un côté, on a $\langle f(u), v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle \underset{(3)}{=} \lambda\langle u, v\rangle$.
Par ailleurs, $\langle u, f(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle$. Ainsi $\mu\langle u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, $\underset{(4)}{donc}$ on a $\langle u, v\rangle = 0$.

▸ **Exercice 1**.

1. Après avoir expliqué pourquoi elle est diagonalisable, diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminez-en une bon de vecteurs propres.
2. Déterminer les extremas locaux de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 2y$ en utilisant la matrice Hessienne.
3. Déterminer à nouveau ces extremas à l'aide d'une réduction de Gauss.

▸ **Exercice 2**.
On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(EDP) : \quad \partial_t f(t, x) + \partial_x f(t, x) = -f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}.$$

munie de la condition initiale

$$(CI) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(0, x) = \sin(x).$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = -y$.
2. Démontrer que si f est solution de (EDP) alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $g : t \mapsto f(t, t + x_0)$ est solution de (E).
3. En utilisant (CI), en déduire l'expression de $g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ puis celle de $f(t, x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}$.

▸ **Exercice 3**.

1. **Construire un ellipsoïde à partir d'une ellipse.** L'objectif est ici de déterminer un paramétrage d'un type d'ellipsoïde (ballon de rugby). Pour cela, l'idée est d'effectuer une rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes.
   (a) On se place dans cette question dans $\mathbb{R}^2$. On admet que l'ellipse centrée en $(0, 0)$ a pour équation $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pour a, b deux réels positifs donnés. On se donne dans cette question (x, y) vérifiant (E).
      i. Démontrer que $0 \leq \dfrac{x^2}{a^2} \leq 1$ et $0 \leq \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

ii. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $x = a\cos(\theta)$ et $y = b\sin(\theta)$. On rappelle pour cela que tout réel de $[-1, 1]$ a au moins un antécédent par la fonction cos.

(b) On se place dans cette question dans $\mathbb{R}^3$. Tout point (x, y, z) d'une ellipse centrée en $(0, 0, 0)$ et incluse dans le plan $z = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} x &= a\cos(\theta), \\ y &= b\sin(\theta) \\ z &= 0 \end{cases}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. On souhaite faire pivoter cette ellipse autour de l'axe $x = 0$ afin de former l'ellipsoïde. Soit $\psi \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante

$$R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

On admet que cette matrice, si elle est multipliée par un vecteur, effectue une rotation d'angle ψ de ce vecteur dans le plan (y, z). On va essayer de s'en convaincre sur quelques questions.

i. Démontrer que la matrice $R(\psi)$ a ses colonnes qui forment une bon de $\mathbb{R}^3$. *(Cette question montre que la matrice transforme une bon en bon).*

ii. Démontrer que le déterminant de $R(\psi)$ vaut 1. *(Cette question montre que la matrice conserve les volumes).*

iii. On suppose que ψ n'est pas un multiple de 2π. Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de $R(\psi)$ et l'espace propre associé à la valeur propre 1. Interpréter géométriquement cet espace propre.

iv. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

(Cette question donne l'équation paramétrique et l'équation cartésienne d'un type d'ellipsoïde).

2. **Plan tangent à l'ellipsoïde et calcul différentiel.** On cherche ici à déterminer l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde en un point $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ quelconque de l'ellipsoïde.

(a) **Via le gradient :** On considère la fonction

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) & \mapsto & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{b^2} - 1 \end{array}$$

i. Calculer le vecteur gradient de f en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$, ce vecteur étant constitué des trois dérivées partielles de f appliquées en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$.

ii. On admet que le vecteur gradient en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ est un vecteur normal au plan tangent en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$. Déterminer alors l'équation de ce plan tangent en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$.

(b) **Via une base de vecteurs directeurs :** On admet ici qu'un paramétrage de cet ellipsoïde est

$$\begin{cases} X(\theta, \psi) &= a\cos(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}, \psi \in \mathbb{R} \\ Y(\theta, \psi) &= b\sin(\theta)\cos(\psi) \\ Z(\theta, \psi) &= b\sin(\theta)\sin(\psi) \end{cases}$$

et on cherche à déterminer le plan tangent au point $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ correspondant à $\theta = \theta_0$ et $\psi = \psi_0$, θ_0 et ψ_0 étant deux réels fixés. Pour cela on fixe successivement ψ puis θ afin de trouver deux vecteurs tangents.

i. On fixe ψ à ψ_0. Calculer la dérivée du vecteur $\begin{pmatrix} X(\theta,\psi_0) \\ Y(\theta,\psi_0) \\ Z(\theta,\psi_0) \end{pmatrix}$ par rapport à θ et appliquez le en θ_0. On obtient un vecteur U. Faire de même en fixant $\theta = \theta_0$ et en dérivant par rapport à ψ. On obtient V.

ii. U et V étant deux vecteurs directeurs du plan tangent, déterminer alors l'équation du plan tangent en $M_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ en utilisant U et V.

3. **Pourquoi le gradient est un vecteur normal au plan tangent.** On se donne une surface d'équation $f(X,Y,Z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction quelconque de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. A titre d'exemple dans le cas de l'ellipsoïde $f(X,Y,Z) = \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{b^2} - 1$ (ne pas utiliser cette fonction ici). On se donne un paramétrage de la surface $(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ où $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et X, Y, Z sont trois fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
   (a) Dériver par rapport à u et v l'équation $f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) = 0$.
   (b) En déduire alors que le vecteur gradient en un point $(X(u_0,v_0), Y(u_0,v_0), Z(u_0,v_0))$ est un vecteur normal au plan tangent en ce point.

4. **Réduction des quadriques : Etude générale.** On se place dans cet exercice dans le cadre de $\mathbb{R}^n$ et on cherche à montrer que toute fonction de la forme

$$q : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \in \mathbb{R}$$

(appelée forme quadratique) avec m_{ij}, b_j des réels, peut s'écrire sous la forme d'une somme/différence de carrés. On admet qu'une telle forme quadratique s'écrit toujours sous la forme

$$q(x) = {}^t x M x + l(x)$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$x$ est un vecteur colonne à n composantes et l est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = S + A$ où S est une matrice symétrique et A antisymétrique (${}^t A = -A$).
   (b) Soit A matrice antisymétrique. Démontrer que $\forall x \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), {}^t x A x = 0$.
   (c) En déduire que toute forme quadratique définie par $q_1(x) = {}^t x M x$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se récrire sous la forme

$$q_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2$$

   où les λ_i sont des coefficients à déterminer et les X_i sont des combinaisons linéaires des x_j.
   (d) Même question pour toute fonction de la forme $q(x) = {}^t x M x + l(x)$ où l est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.