Eval 3 : MG2

Important : Toutes les questions doivent être justifiées soigneusement, argumentées.

▸ **Exercice 1**.

Proposition 1:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **bon** d'un espace euclidien E de dimension n, $u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \in E$ alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i = \langle u, e_i \rangle.$$

Preuve :

On sait qu'il existe $(u_1, \dots, u_n)$ des réels tels que

$$u \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i e_i = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n.$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall j \in \{1, \dots, n\}, \langle u, e_j \rangle \quad & \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i \langle e_i, e_j \rangle \\ & \underset{(3)}{=} u_j \langle e_j, e_j \rangle \\ & = u_j ||e_j||^2 \\ & \underset{(4)}{=} u_j.\end{aligned}$$

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Vous devez choisir parmi les arguments suivants.

- par linéarité de la somme.
- car l'inf est un minorant.
- car $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale.
- car chaque e_i est unitaire.
- car $|ab| = |a||b|$ pour a, b réels.
- car le produit scalaire est défini.
- car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
- car la variable de sommation est muette.
- car la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
- d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- car la norme euclidienne est homogène.
- par linéarité à gauche du produit scalaire.
- par linéarité à droite du produit scalaire.

Eléments de corrigé

1. car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
2. par linéarité à gauche du produit scalaire.
3. car $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale.
4. car chaque e_i est unitaire.

▸ **Exercice 2.**

1. Parmi ces fonctions f, lesquelles vérifient $\partial_x f(1,0) = 1$?

   (a) la fonction f telle que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1,h)-f(1,0)}{h} = 1$.

   (b) la fonction f telle que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = 1$.

   (c) f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = x + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

2. Trouver toutes les fonctions f vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_x f(x,y) = y\cos(x)$.

✂ -

1.

- ✂

▸ **Exercice 3.** On se place sur $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$. On se munit des trois normes usuelles prenant en argument un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $||u||_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$, $||u||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$, $||u||_\infty = \max\limits_{i\in\{1,..,n\}} |u_i|$.

1. Démontrer que $||\cdot||_1$ est bien une norme de $\mathbb{R}^n$.
2. Trouver une constante C telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n, ||u||_1 \leq C||u||_\infty$.
3. Comparer, pour $u \in \mathbb{R}^n$, les normes $||u||_\infty$ et $||u||_2$.
4. Dans la fin de l'exo, on pose $n = 2$. Déduire de la question 2 une majoration de $|(x+y)^5|$ à l'aide de la norme infinie du vecteur (x,y).
5. Démontrer alors la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(x+y)^5}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

✂ -

Eléments de corrigé

1. Dans le corrigé de td de calcul diff.
2. Dans le corrigé de td de calcul diff : $||u||_1 \leq n||u||_\infty$.
3. Dans le corrigé de td de calcul diff :$||u||_\infty \leq ||u||_2$
4. $|(x+y)^5| = |x+y|^5 \leq (|x|+|y|)^5 = ||(x,y)||_1^5 \leq 2^5||(x,y)||_\infty^3$.
5. Ailleurs en $(0,0)$, la fonction est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Par ailleurs $0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|x+y|^5}{x^2+y^2} = \dfrac{|x+y|^5}{||(x,y)||_1^2} \leq \dfrac{2^5||(x,y)||_\infty^5}{||(x,y)||_2^2} \leq \dfrac{8||(x,y)||_2^5}{||(x,y)||_2^2} \leq 2^5||(x,y)||_2^3$. Donc par encadrement, la limite est bien 0 d'où la continuité en $(0,0)$.

- ✂

▸ **Exercice 4.** Soit E un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. On dit qu'un endomorphisme f est antisymétrique si

$$\forall u \in E, \forall v \in E, \langle f(u), v\rangle = -\langle u, f(v)\rangle.$$

On note $A(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.

On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme de E bijectif.

Etant donné une matrice M, on note ${}^tM$ la transposée de M.

Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que si U et V sont les matrices de ces vecteurs exprimées dans une bon de E alors $\langle u, v\rangle = {}^tUV$.

On dit qu'un sev F de E est stable par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$. On peut alors définir un endomorphisme appelé restriction de f à F par

$$f_{|F} \quad : \quad \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

1. **Quelques exemples**
   (a) Démontrer que l'application linéaire $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,-x) \end{array}$ est bien antisymétrique.
   (b) Construire un exemple d'endorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ sans démontrer la linéarité.
2. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ dans cette question.
   (a) Démontrer que $A(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Démontrer que si $f \in A(E)$ alors $\forall u \in E, \langle f(u), u\rangle = 0$.
   (c) Démontrer que si $\forall u \in E, \langle f(u), u\rangle = 0$ alors $f \in A(E)$.
3. On se donne $f \in \mathcal{A}(E)$ dans cette question.
   (a) Montrer que, si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, son orthogonal $F^\perp$ l'est aussi.
   (b) Démontrer que $Im(f)$ est l'orthogonal de $\ker(f)$. Expliquer pourquoi $Im(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E.
   (c) Montrer alors que la restriction de f à $Im(f)$ est bijective.
   (d) En déduire que f peut être écrit sous la forme $g \circ p$, où p est un projecteur orthogonal et g un automorphisme antisymétrique de $Im(p)$.
4. **Vision matricielle**
   (a) Démontrer que si $f \in A(E)$, sa matrice F dans une bon est antisymétrique c'est-à-dire vérifie ${}^tF = -F$.
   (b) Quelle est la dimension de l'EV des matrices antisymétriques. Quelle est la dimension de $A(E)$?
   (c) Démontrer que toute valeur propre réelle d'une matrice antisymétrique est nulle.
   (d) On se donne maintenant une valeur propre λ complexe de F une matrice antisymétrique réelle. On note $U \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre non nul complexe associé. En considérant la quantité ${}^tUF\overline{U}$, démontrer que λ est imaginaire pur.
5. On dit qu'un endomorphisme f est symétrique si

$$\forall u \in E, \forall v \in E, \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle.$$

   On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
   (a) Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. Démontrer que si f est antisymétrique alors $f \circ f$ est symétrique.
   (b) Démontrer que $A(E)$ et $S(E)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

✂ -

Indices

1. (a)
   (b) Prendre une matrice antisymétrique et écrire l'application linéaire associée ou généraliser l'exemple du 1 a.
2. (a) Utilisez les axiomes de sev.
   (b) Choisir $u = v$ dans la définition.
   (c) Appliquer l'hypothèse à $u + v$ à la place de u.
3. (a) Traduisez bien et utilisez la définition d'endo antisymétrique.
   (b) Traduisez bien et utilisez la définition d'endo antisymétrique pour mq $Im(f)$ est inclus dans l'orthogonal de $\ker(f)$. Utilisez ensuite l'égalité des dimensions grâce au théorème du rang.
   (c) Prenez un élément dans l'image et décomposez son antécédent dans $\ker(f) \oplus Im(f)$.

(d) g est f restreint à $Im(f)$ et p est la projection orthogonale sur $Im(f)$.

4. (a) Ecrivez la définition en termes matriciels grâce à l'expression en bon du produit scalaire.

   (b) Justifiez qu'une matrice antisymétrique a comme degrés de liberté les coefficients de la partie triangulaire supérieure stricte.

   (c) Utilisez la définition d'endo antisymétrique sur un vecteur propre associé à λ.

   (d) Utilisez l'antisymétrie pour écrire autrement la quantité.

5. Traduisez la définition.

6. Vérifiez que l'intersection est réduite à l'endo nul et faites l'égalité des dimensions.