Licence 3 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2023-2024

# Tâches : MG2

**Important : Toutes les questions doivent être justifiées soigneusement, argumentées.**

▸ **Exercice 1**.

**Proposition 1:**

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de $E$ est une famille libre de $E$.

**Preuve :**

Donnons-nous une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_p)$ de $E$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$ *alors* $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \langle u_j, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \rangle = 0$.

$\underset{(1)}{\textit{Donc}}$ $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = 0$.

$\underset{(2)}{\textit{Or}}$ $\forall i \neq j, \langle u_j, u_i \rangle = 0$.

Donc

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle \underset{(3)}{=} \lambda_j ||u_j||_2^2.$$

On en déduit que pour tous les $j$, $\lambda_j ||u_j||_2^2 = 0$. Or pour tout $j$, $||u_j||_2 \underset{(4)}{\neq} 0$. *Donc* pour tout $j$, $\lambda_j = 0$.

Dans la preuve ci-dessus, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Pour les points $2, 3$ c'est à vous de trouver l'argument.
Pour les points $1, 4$, vous devez choisir parmi les arguments suivants :

- d'après l'inégalité triangulaire.
- en prenant le produit scalaire par $u_j$ des deux côtés de l'égalité.
- par linéarité à gauche du produit scalaire.
- par linéarité à droite du produit scalaire.
- car la norme euclidienne est définie.
- car si un produit de réels est nul, l'un des deux est nul.
- car la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ est orthogonale.
- car les vecteurs $u_i$ sont unitaires.
- car la variable de sommation est muette.
- car le produit scalaire est positif.
- car la norme euclidienne est homogène.
- par définition de la norme euclidienne.

---

1. par linéarité à droite du produit scalaire.
2. car la famille est orthogonale.
3. par définition de la norme euclidienne.
4. car la norme euclidienne est définie.

---

▸ **Exercice 2.**
Ces phrases sont-elles vraies ou fausses ? On attend comme dans tout autre exercice, une preuve de votre affirmation.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'un plan (contenant $(0,0,0)$) peut être un plan.
2. Soit $E$ un EV euclidien (on note $||\cdot||_2$ sa norme euclidienne) et $F$ un sev de $E$. Si $u$ est dans $F$ et $v$ dans $F^\perp$ alors $||u+v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2$.
3. Soit $F$ sev d'un ev euclidien $E$, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Eléments de correction et pas rédaction propre**

1. Non la dimension de $F$ + celle de son orthogonal devrait valoir 3.
2. Oui c'est le théorème de Pythagore étant donné que les deux vecteurs sont orthogonaux.
3. Oui un élément qui est dans les deux vérifie $\langle u, u\rangle = 0$ donc $u = 0_E$ (défini).

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂

▸ **Exercice 3.** On considère le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné par

$$\langle M, N\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} M_{ij}N_{ij}$$

où $M_{ij}, N_{ij}$ désignent les coefficients ligne $i$ colonne $j$ des matrices $M$ et $N$. On note $T_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Toute matrice de $T_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont des réels.

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.
2. Démontrez que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $T_2(\mathbb{R})$.
3. S'agit-il d'une bon de $T_2(\mathbb{R})$ ?
4. Déterminez l'orthogonal de $T_2(\mathbb{R})$.
5. Déterminer la projection de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $T_2(\mathbb{R})$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

1. (a) cours
   (b) déjà fait en td
   (c) oui c'est une base + les produits scalaires 2 à 2 valent 0 et les normes valent 1.
   (d) Fait en td
   (e) On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la formule de la projection sur la bon précédente.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂

▸ **Exercice 4.**
Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

### Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

#### I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

On admet pour le moment la convergence de cette intégrale pour tout polynômes $P$ et $Q$.
Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est bien définie et positive (deux derniers axiomes du produit scalaire).

**I.2 - Calcul d'un produit scalaire**

1. On considère le polynôme constant 1. Calculer la norme euclidienne de 1.
2. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

3. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ à l'aide d'une récurrence.

**Partie II - Construction d'une base orthogonale**

On considère l'application $\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

**II.1 - Propriétés de l'application $\alpha$**

1. Montrer que $\alpha$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de $\alpha$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
3. En déduire que $\alpha$ est diagonalisable et que $Sp(\alpha) = \{-k \mid k \in \{0, \ldots, n\}\}$.

**II.2 - Vecteurs propres de l'application $\alpha$**

On fixe un entier $k \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ ?
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
3. Justifier que $P_k$ est de degré $k$.

**II.3 - Orthogonalité de la famille** $(P_0, \ldots, P_n)$
On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

1. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt.$
2. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
3. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Partie III - Méthode de quadrature de Gauss**

On admet que le polynôme $P_n$ admet $n$ racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

1. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que deux endomorphismes de $E$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur une base de $E$.
2. Montrer qu'un $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

3. En déduire qu'il existe un unique $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## EXERCICE I
## Polynômes de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

### Partie I - Produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[X]$

**I.1 - Généralités**

**Q1.** Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $f$ la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.
Par produit, $f$ est continue sur $[0;+\infty[$.

$PQ$ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout $k$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2+k}e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. $f$ l'est donc aussi.
On en conclut que $f$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

**Q2.** Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto (P|Q)$.

— La question précédente prouve que $\varphi$ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\varphi(P_1 + P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$ : $\varphi$ est linéaire à gauche.

— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ : $\varphi$ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geq 0$ : $\varphi$ est positive.

On suppose $\varphi(P,P) = 0$ ; alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$.

Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent $\varphi$ est définie.

— **Conclusion :** $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

**I.2 - Calcul d'un produit scalaire**

**Q3.** On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geq 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

**Q4.** Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P(k)$ : "$(X^k|1) = k!$".

Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ : $P(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $P(k)$ vraie.
D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$ : $P(k+1)$ est vraie.
On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$.

### Partie II - Construction d'une base orthogonale

**Propriétés de l'application $a$**

**Q5.** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$, $\deg P'' \leq n-2$ ; ainsi $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.
De plus, par linéarité de la dérivation, $a$ est linéaire donc $a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Q6.** $a(1) = 0$, $a(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$, $a(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$. La matrice de $a$ dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

**Q7.** Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0,\ -1,\ -2, \cdots, -n$. $a$ possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc $a$ est diagonalisable.
Finalement, $a$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(a) = \{-k;\ k \in \{0; n\}\}$.

**Q8.** D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de $a$ est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de $a$ sont de dimension 1 : $dim \ker a + kid_{\mathbb{R}_n[X]} = 1$.

**Q9.** Soit $Q_k$ un vecteur (non nul) engendrant $\ker a + kid_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $c_k$ son coefficient dominant.
$c_k$ est non nul et $P_k = \dfrac{1}{c_k}Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $a(P_k) = -kP_k$.
Si $R_k$ est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker a + kid_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de $R_k$ est 1 donc $a = \dfrac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.
Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $a(P_k) = -kP_k$.

**Q10.** Soit $d$ le degré de $P_k$
Si $k$ est non nul, on peut identifier les coefficients de degré $k$ pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.
Pour $k = 0$ : $a(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que $a(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

**Q11.** On vient de voir que $P_0 = 1$.
Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.
$a(P) = 1 - X$ donc $a(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.
De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $a(P) = 2X + (1-X)(2X+b) = -2X^2 + (4-b)X + b$ donc $a(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.
Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

**II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$**

**Q12.** Par définition, $(a(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$.
on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. $u$ et $Q$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$ ; par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties,
$(a(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.

**Q13.** En procédant de même mais en partant de $(P|a(Q))$ et en échangeant les rôles de $P$ et $Q$, on obtient $(a(P)|Q) = (P|a(Q))$.

**Q14.** Soit $k$ et $l$ deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après $Q13$, $(a(P_k)|P_l) = (P_k|a(P_l))$ et, d'après $Q9$, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$ ; or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$
Conclusion : $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ ; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

## Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

**Q15.** Soit $({}_1, \cdots, {}_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\varphi : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {}_i P(x_i)$.

$\varphi$ et $\psi$ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coincident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$.

Pour $i \leq n-1$, $\varphi(X^i) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}dt = i!$ et $\psi(X^i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} {}_j x_j^i$.

Pour tout $i \in \{0; n-1\}$, $\varphi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

**Q16.** La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de $V$ est non nul. $V$ est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique $n$-uplet $({}_1, \cdots, {}_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Q17.** Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$.

$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout $i$, $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.

Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\varphi(P) > 0$.

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} {}_i P(x_i)$$

---