Licence 3
Mathématiques

Institut Villebon-Charpak, Orsay
2023-2024

Evaluation 1 : MG2 (1h30)

Important : Toutes les questions doivent être justifiées soigneusement, argumentées.

▸ **Exercice 1**.

Théorème 1: de Pythagore

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille **orthogonale**, alors $||\sum_{i=1}^{p} u_i||_2^2 = \sum_{i=1}^{p} ||u_i||_2^2$.

Dans la preuve suivante, justifiez chaque point marqué par un chiffre. Vous devez choisir parmi les arguments suivants :

- car le produit scalaire est positif.
- d'après l'inégalité triangulaire.
- par linéarité à gauche du produit scalaire.
- par linéarité à droite du produit scalaire.
- par définition de la norme euclidienne
- par Toutatis.
- car le produit scalaire est défini.
- car la norme euclidienne est définie.
- car les vecteurs u_i sont unitaires.
- car la variable de sommation est muette.
- d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- car $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille orthogonale.
- par linéarité de l'intégrale.
- car la norme euclidienne est homogène.

Preuve :

On a que

$$||\sum_{i=1}^{p} u_i||_2^2 \underset{(1)}{=} \langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{i=1}^{p} u_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \rangle$$

$$\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \rangle \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \rangle \underset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle u_i, u_j \rangle.$$

Donc

$$\langle \sum_{i=1}^{p} u_i, \sum_{j=1}^{p} u_j \rangle \underset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} ||u_i||_2^2.$$

✂ -

1. par définition de la norme euclidienne.
2. par linéarité à gauche du produit scalaire.
3. par linéarité à droite du produit scalaire.
4. car la famille (u_j) est orthogonale.

- ✂

▸ **Exercice 2.**

Ces phrases sont-elles vraies ou fausses ? On attend comme dans tout autre exercice, une preuve de votre affirmation.

1. Si pour deux vecteurs u, v d'un ev E, $\langle u, v\rangle = -1$ alors on peut trouver λ réel tels que $\langle \lambda u, \lambda v\rangle$ soit strictement positif.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, il existe une famille orthogonale et liée.
3. Toute famille orthonormale d'un ev préhilbertien E est libre.

Eléments de corrigé : pas rédaction parfaite.

1. Ce produit scalaire vaut $\lambda^2\langle u, v\rangle$ après application de la bilinéarité. Donc il est négatif.
2. $((1, 0, 0), (0, 0, 0))$.
3. C'est une famille orthogonale de vecteurs non nuls car les vecteurs sont unitaire donc elle est libre d'après une proposition de cours.

▸ **Exercice 3.** On se place sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique donné par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$$

où $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. La famille de vecteurs $((1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, -2), (2, 1, 2, 0))$ est-elle une famille orthogonale ?
3. Ces vecteurs sont-ils unitaires (de norme euclidienne égale à 1) ?

Eléments de corrigé : pas rédaction parfaite.

1. On a corrigé cette question dans le cours.
2. Non le produit scalaire des deux premiers vecteurs vaut -2.
3. Non la norme du premier vecteur par exemple vaut $\sqrt{3}$.

▸ **Exercice 4.**

Bagage admis ou rappelé :

• Nous rappelons que tout polynôme de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels possédant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.
• Si a est une racine réelle d'un polynôme P à coefficients réels alors $X - a$ divise P.
• On rappelle qu'une bon est une base dont tous les vecteurs sont de produit scalaire nul deux à deux et de norme 1.
• La notation $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ désigne le produit $(X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)$.
• Un isomorphisme d'espaces vectoriels est une application linéaire bijective qui part d'un espace vectoriel E est qui est à valeurs dans un espace vectoriel F.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n pour $n \in \mathbb{N}$ muni du produit scalaire

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i) \end{array}$$

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels distincts. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

.

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vérifie l'axiome "défini" du produit scalaire. On admet les autres axiomes comme vrai pour gagner du temps.
2. Déterminer le noyau de ϕ. En déduire que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Notons L_0 le polynôme dont l'image par ϕ est le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$. Démontrer que le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ divise L_0. En déduire l'expression de L_0 en utilisant que $L_0(a_0) = 1$.
4. Déterminer pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, les polynômes L_j dont l'image par ϕ est le vecteur e_j dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ème qui vaut 1.
5. Démontrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une bon de $\mathbb{R}_n[X]$.

Eléments de corrigé : pas rédaction parfaite.

1. Si $\sum_{i=0}^{n} P(a_i)^2 = 0$ alors tous les $P(a_i)$ sont nuls puisque c'est une somme de termes positifs. Donc P qui est de degré $\leq n$ a $n+1$ racines distinctes. Donc $P = 0$.
2. Un polynôme dans le noyau de ϕ vérifie que tous les $P(a_i)$ sont nuls. Donc P qui est de degré $\leq n$ a $n+1$ racines distinctes. Donc $P = 0$. Donc le noyau est réduit à l'élément neutre. Autrement dit, l'application est injective. Une application linéaire, injective reliant deux ev de même dimension finie est bijective. Il s'agit donc bien d'un isomorphisme d'ev.
3. On a $\phi(L_0) = (1, 0, \dots, 0)$ donc $(L_0(a_0), L_0(a_1), \dots, L_0(a_n)) = (1, 0, \dots, 0)$. Pour tout $i \geqslant 1, a_i$ est racine donc le produit demandé divise bien L_0. Ce produit est de degré n tout comme L_0 donc il existe une constante C telle que
$$L_0 = C\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$$
Comme $L_0(a_0) = 1$ alors $1 = C\prod_{i=1}^{n}(a_0 - a_i)$ ce qui permet de trouver C et donc
$$L_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)}{\prod_{i=1}^{n}(a_0 - a_i)}.$$
4. C'est le même raisonnement pour le coefficient a_j :
$$L_j = \frac{\prod_{i=0, i\neq j}^{n}(X - a_i)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n}(a_j - a_i)}.$$
5. Soient k, l dans $\{0, \dots, n\}$, alors
$$\langle L_k, L_l\rangle = \sum_{i=0}^{n} L_k(a_i)L_l(a_i) = \delta_{kl}$$
où $\delta_{kl} = 1$ si $k = l$, 0 sinon. Donc c'est bien une famille orthonormale. Elle est donc libre (orthogonale de vecteurs non nuls). Comme elle contient $n+1$ vecteurs et que $dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ alors c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

▸ **Exercice 5.**

Bagage admis ou rappelé :
• On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E à valeurs dans E.
• On rappelle qu'une bon est une base dont tous les vecteurs sont de produit scalaire nul deux à deux et de norme 1.
• Soit F un sev de E euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On appelle orthogonal de F l'ensemble $F^{\perp} = \{x \in E | \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}$. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.
• On dit qu'un sev F de E est stable par un endomorphisme u si $\forall x \in F, u(x) \in F$.
• Etant donné deux endomorphismes f et g, $f \circ g$ désigne la composée de g par f.

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **bon** de E. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E et $||x||$ la norme euclidienne de x.

Partie 1 : définition de l'adjoint d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie u désigne un endomorphisme de E. On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe $u^\star(y)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle.$$

1. (a) Un vecteur x se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

   Démontrer que $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \langle x, e_j\rangle = x_j$.

   (b) En déduire que pour tout y de E,

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

   puis que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. (a) Vérifier que l'application définie pour tout y de E par

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

   est bien un endomorphisme de E.

   (b) Démontrer que cette application est bien solution au problème posé.

Partie 2 : Etude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u.$$

1. (a) Montrer que $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||u^\star(x)||$.

   (b) Comparer $\ker(u)$ et $\ker(u^\star)$.

2. Montrer que si F est un sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

3. On suppose que u possède une valeur propre et on note E_λ le sous-espace propre associé.

   (a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

   (b) Démontrer que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

✂ -

Eléments de corrigé et pas rédaction parfaite

Partie 1

1. (a) On prend le produit scalaire par un vecteur e_j. Alors après application de la linéarité à gauche $\langle x, e_j\rangle = x_j\langle e_j, e_j\rangle = x_j$

   (b) on déduit de Q1a que pour tout y, $u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^\star(y), e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle y, u(e_i)\rangle e_i$. par déf de l'adjoint. On obtient l'expression par symétrie du produit scalaire. u étant donné ceci caractérise de manière unique l'expression de $u^\star$ d'où son unicité.

2. (a) Pour la linéarité, cela revient à utiliser la linéarité à droite du produit scalaire puis la linéarité de la somme.

   Pour le fait que ça reste dans E, c'est une combinaison linéaire de vecteurs de base de E donc E étant un EV, on reste dans E.

(b) Il ne reste qu'à montrer que $\forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$.

Or pour $y \in E$, $\langle x, u^\star(y)\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle u(e_i), y\rangle\langle x, e_i\rangle$ par linéarité à droite.

$= \langle\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle u(e_i), y\rangle$ par linéarité à gauche,

$= \langle u(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i), y\rangle$ par linéarité de u

$= \langle u(x), y\rangle$.

Partie 2

1. (a) $\langle u^\star(x), u^\star(x)\rangle = \langle u(u^\star(x)), x\rangle = \langle u^\star(u(x))), x\rangle = \langle x, u^\star(u(x)))\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle$

   (b) Si on est dans le noyau de u alors $||u(x)|| = 0$ donc d'après la question 1 $||u^\star(x)|| = 0$. La norme étant définie x est dans le noyau de $u^\star$. L'autre inclusion est obtenue par le même raisonnement.

2. Soit $x \in F^\perp$, pour tout $y \in F$, $\langle u^\star(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ et ce dernier produit scalaire est nul puisque $u(y) \in F$ par stabilité de F et que $x \in F^\perp$.

3. (a) Soit $x \in E_\lambda$ non nul avec $\lambda \neq 0$, alors $u(x) = \lambda x$ donc $u^\star(u(x)) = \lambda u^\star(x)$ par linéarité de $u^\star$.
   Donc $u(u^\star(x)) = \lambda u^\star(x)$ donc si $\lambda \neq 0$, $u^\star(x) \neq 0_E$ sinon d'après Q1b, x serait dans le $Ker(u) = E_0$. Alors $u(u^\star(x)) = \lambda u^\star(x)$ signifie exactement que $u^\star(x) \in E_\lambda$.

   Si $\lambda = 0$, alors $x \in \ker(u)$ et donc $u(x) = 0_E$ donc $u^\star(u(x)) = 0_E$ donc $u(u^\star(x)) = 0_E$ donc $u^\star(x) \in \ker(u)$.

   (b) On applique Q2 à partir de a, on en déduit que $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^\star)^\star$.

   Maintenant $\langle (u^\star)^\star(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle$ et ceci pour tout x, y de E donc $\langle (u^\star)^\star(x) - u(x), y\rangle = 0$ ce qui signifie que $(u^\star)^\star(x) - u(x)$ est orthogonal à tout vecteur de E cad à lui-même.
   Ainsi $\langle (u^\star)^\star(x) - u(x), (u^\star)^\star(x) - u(x)\rangle = 0$ et comme le produit scalaire est défini $(u^\star)^\star(x) - u(x) = 0_E$ donc $(u^\star)^\star = u$ puisque c'est vrai pour tout x.