Université Orsay-Paris-Saclay   Année 2023–2024

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie . . .

Examen partiel du 1^{er} mars 2024
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction entrera pour une grande part dans la notation. Les calculatrices, téléphones mobiles, objets connectés et documents ne sont pas autorisés.

Exercice A : (Morphismes, degrés)

Soient $\mathbf{K}_2$ le *graphe complet* à deux *sommets* défini par :

— $\mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \ := \ \{1,2\}$;
— $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \ := \ \big\{\{1,2\}\big\}$;
—
$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon(\mathbf{K}_2): & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{1,2}(\mathbf{K}_2) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(\mathbf{K}_2)) \\ & \{1,2\} & \longmapsto & \{1,2\} \,; \end{array}$$

et $\mathbf{C}_4$ le *cycle* à 4 *sommets* défini par :

— $\mathcal{V}(\mathbf{C}_4) \ := \ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
— $\mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \ := \ \big\{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,0\}\big\}$;
—
$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon(\mathbf{C}_4): & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{1,2}(\mathbf{C}_4) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ & \{0,1\} & \longmapsto & \{0,1\} \\ & \{1,2\} & \mapsto & \{1,2\} \\ & \{2,3\} & \mapsto & \{2,3\} \\ & \{3,0\} & \mapsto & \{3,0\} \,. \end{array}$$

1) $(\mathbf{K}_2 \ \to \ \mathbf{C}_4)$

a) Existe-t-il un *morphisme de graphes à non-orienté* $\phi \ : \ \mathbf{K}_2 \ \to \ \mathbf{C}_4$ tel que $\mathcal{V}(\phi)(1) \ = \ 0$ et $\mathcal{V}(\phi)(2) \ = \ 2$?

b) Existe-t-il un *morphisme de graphes à non-orienté* $\phi \ : \ \mathbf{K}_2 \ \to \ \mathbf{C}_4$ tel que $\mathcal{V}(\phi)(1) \ = \ 0$ et $\mathcal{V}(\phi)(2) \ = \ 1$?

2) $(\mathbf{C}_4 \ \to \ \mathbf{K}_2)$
Déterminer l'*ensemble* $\operatorname{Hom}(\mathbf{C}_4,\mathbf{K}_2)$ des *morphismes de graphes à non-orienté* $\mathbf{C}_4 \ \to \ \mathbf{K}_2$.

3) Pour
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$$
un *morphisme de graphes à non-orienté* , peut-on, sans hypothèse supplémentaire, comparer $d_G(u)$ et $d_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$ pour $u \ \in \ \mathcal{V}(G)$?

Exercice B : (Morphismes, voisins)

Soient $G \ := \ \big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G)\big)$ et $H \ := \ \big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H)\big)$ des *graphes à non-orienté* et
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$$
un *morphisme de graphes à non-orienté* .

1) Montrer que $\forall u \in \mathcal{V}(G),\ \mathcal{V}(\phi)\big(N_G(u)\big) \ \subset \ N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

2) Montrer que si ϕ est un *isomorphisme de graphes à non-orienté* , pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, la *restriction* $\mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)} : N_G(u) \to N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$ de $\mathcal{V}(\phi)$ à l'*ensemble* $N_G(u)$ des *voisins* de u est une *bijection* de $N_G(u)$ sur $N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$. En déduire qu'alors l'inclusion de la question 1 est une égalité.

Exercice C : (Automorphismes de $\begin{array}{ccccc} + & ---- & + & ---- & + \\ | & & | & & | \\ + & ---- & + & ---- & + \\ | & & | & & | \\ + & ---- & + & ---- & + \end{array}$)

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les points $O := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; I, J, K, L, **les milieux respectifs de** $[A;B]$, $[B;C]$, $[C;D]$ **et** $[D;A]$.

Soient

— $\mathcal{V} := \{A, B, C, D, O, I, J, K, L\}$;

— $\mathcal{E} := \left\{ \{X,Y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}) \; ; \begin{array}{rcl} & X - Y & = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y & = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y & = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y & = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \end{array} \right\}$;

— $\varepsilon := \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V})_{|\mathcal{E}}} : \mathcal{E} \to \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V})$.

1) Montrer que $G := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \varepsilon)$ est un *graphe fini simple non-orienté* .

2) Représenter G.

Pour tout *entier naturel* $k \in \mathbb{N}$, **on définit**

$$\mathcal{V}_k := \{X \in \mathcal{V} \; ; \; d_G(X) = k\} .$$

3) (**Partition de** $\mathcal{V}$)

a) Vérifier que $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_\ell \neq \emptyset \Rightarrow k = \ell$.

b) Vérifier que $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k$.

L'écriture $\mathcal{V} = \coprod\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k$ **exprime simultanément le résultat du point a de la question 3 et celui du point b.**

4) Déterminer $\mathcal{V}_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que pour tout *automorphisme de graphes à non-orienté* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G), \forall k \in \mathbb{N},\ \alpha(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}_k$.
Indication : *On pourra utiliser, même si on ne les a pas établis, les résultats de l'exercice B .*

6) **a)** Montrer que pour tout *automorphisme de graphes à non-orienté* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, la *restriction* $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$ de $\mathcal{V}(\alpha)$ à $\mathcal{V}_2$ appartient à l'*ensemble* $\mathcal{S}(\mathcal{V}_2)$ des *bijections* de $\mathcal{V}_2$ sur lui-même.

On définit $\Phi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathcal{S}(\mathcal{V}_2)$, $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) := \mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$.

b) Montrer que $\Phi : \big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big) \to \big(\mathcal{S}(\mathcal{V}_2), \circ\big)$ est un *morphisme de groupes* .

7) (**Surjectivité de** Φ)
Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ **tel que**

$$\mathcal{V}(\alpha)(A) = B\ ,\ \mathcal{V}(\alpha)(B) = A\ ,\ \mathcal{V}(\alpha)(C) = C \text{ et } \mathcal{V}(\alpha)(D) = D\ . \qquad \mathbf{1}$$

a) Déterminer alors $\mathcal{V}(\alpha)(I)$.

b) Déterminer alors $\mathcal{V}(\alpha)(J)$.

c) En considérant, par exemple l'*arête* $\{J, C\} \in \mathcal{E}(G)$ et son *image* par $\mathcal{E}(\alpha)$, mettre en évidence une contradiction.

d) Le *morphisme* Φ est-il *surjectif* ?

8) **(Injectivité de** Φ**)**

a) Montrer que $\forall \alpha \in \mathrm{Aut}(G),\ \mathcal{V}(\alpha)(O) = O$.

b) Étant donné $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) \Rightarrow \mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_3} = \mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_3}$.

c) En déduire que, sous les mêmes hypothèses qu'au point b , $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$.

d) Le *morphisme* Φ est-il *injectif* ?

9) **(Le groupe** $\mathrm{Aut}(G)$**)**

a) Déterminer l'*ensemble* $S_A := \{\xi \in \mathrm{Aut}(G)\ ;\ \mathcal{V}(\xi)(A) = A\}$ et vérifier que $(S_A, \circ)$ est un *sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$.
Indication : *On pourra s'intéresser en particulier à* $\mathcal{V}(\xi)(I)$.

b) **i)** Montrer qu'il existe un unique $\rho \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}(\rho) : & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathcal{V}(G) \\ & A & \longmapsto & B \\ & B & \mapsto & C \\ & C & \mapsto & D \\ & D & \mapsto & A\,. \end{array}$$

ii) Quel est l'ordre de ρ dans $\mathrm{Aut}(G)$?

iii) Quel est le *sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$ engendré par ρ.

c) Déterminer $\mathrm{Aut}(G)$.