LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie . . .

Examen du 3 mai 2024
Durée 3 heures

La qualité de la rédaction entrera pour une grande part dans la notation. Les calculatrices, téléphones mobiles, objets connectés et documents ne sont pas autorisés.

Le résultat de l'exercice A pourra être librement utilisé dans l'exercice B et l'exercice C ; même si l'exercice A n'a pas été résolu.

.0 . – Conventions et notations

Les notations et conventions qui suivent seront utilisées tout au long de ce texte.

Notation .0.1 (Matrice/endomorphisme d'adjacence) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini simple non-orienté* .
On notera $\mathcal{A}(G) := \Big(a(G)_{u,v}\Big)_{\substack{u \in \mathcal{V}(G) \\ v \in \mathcal{V}(G)}}$ la *matrice d'adjacence* de G ; et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(G)^n := \Big(a_{u,v}^{(n)}(G)\Big)_{\substack{u \in \mathcal{V}(G) \\ v \in \mathcal{V}(G)}}$.

Rappel .0.2 (Chemin) On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* , le *chemin de longueur* n est le *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ défini par :
$\mathcal{V}(\mathbf{P}_n) = [0; n] \subset \mathbb{N}$;
$\mathcal{E}(\mathbf{P}_n) = \big\{\{i, i+1\}\big\}_{,0 \leq i \leq n-1}$.

Définition .0.3 (Parcours, circuit) Éttant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour $\ell \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* ,

i) **(Parcours)**

un *parcours de longueur* ℓ dans G est un *morphisme de graphes à non-orienté*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
(cf. la définition I.4.10.)

Il revient au même de se donner l'*ensemble* $\{, \ldots, v_\ell := \mathcal{V}(\pi)(\ell)\} \subset \mathcal{V}(G)$ de sorte que $\forall 0 \leq i \leq \ell-1$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}(G)$ soit une *arête* de G.

Noter qu'on ne demande absolument pas que $\mathcal{V}(\pi)$ soit *injective* ; autrement dit le *parcours* π « peut repasser plusieurs fois par un même *sommet* » ; $\mathcal{E}(\pi)$ n'a pas plus de bonne raison d'être alors *injective* .

ii) **(Circuit)**
Le *parcours* π est un *circuit* si $\pi(0) = \pi(\ell)$.

Notation .0.4 (Parcours) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour tout $(v, w, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G$
on note $P(G)_{v,w,\ell}$ l'*ensemble des parcours de longueur* ℓ
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
dans G tels que $\mathcal{V}(\pi)(0) = v$ et $\mathcal{V}(\pi)(\ell) = w$.

Exercice A : (Itérés de la matrice d'adjacence)
Montrer que $\forall (u, v, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, $\#\big(P(G)_{u,v,\ell}\big) = a_{u,v}^{(\ell)}(G)$.
Indication : *On pourra donner une démonstration par récurrence sur l'entier naturel* $\ell \in \mathbb{N}$.

Exercice B : **(Parcours dans le graphe $\mathbf{K}_5$)**

Soit $A := \mathcal{A}(\mathbf{K}_5)$ **la** ***matrice d'adjacence*** **du** ***graphe complet*** $\mathbf{K}_5$.

1) Écrire la matrice A.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $A^2 = \alpha \mathrm{Id}_5 + A$.

3) Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un unique *couple* $(a_\ell, b_\ell) \in \mathbb{R}^2$ et un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^\ell = (X+1)(X-\alpha) \cdot Q + a_\ell X + b_\ell$.

4) Déterminer a_ℓ et b_ℓ en fonction de α et ℓ .

5) Calculer A^ℓ pour $\ell \in \mathbb{N}$ en fonction de A, Id_5, α et ℓ .

6) Si, pour tout $(u, \ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N}$, $P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}$ est défini comme en .0..0.4, calculer $\#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big)$ en fonction de α et ℓ .

Indication : *On pourra, bien entendu, utiliser le résultat de l'exercice A .*

7) Donner $\#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big)$ pour $\ell = 2, 3, 4$.

Exercice C : **(Parcours dans le graphe $\mathbf{C}_6$)**

Dans l'exercice C , on suppose que $G = \mathbf{C}_6$ **est le** ***cycle*** **à** 6 ***sommet*** **s que l'on peut considérer comme le** ***graphe*** **de CAYLEY associé à** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **et** $\{-1, 1\}$.

1) **(Parcours et graphe sommets-transitif)**

a) Montrer que, pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, il existe un *automorphisme de graphes à non-orienté* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{C}$ tel que $\tau(u) = v$.

Définition a.1 On dit alors que $\mathbf{C}_6$ est *sommets-transitif* .

b) Pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, construire une bijection $P(G)_{u,u,\ell} \cong P(G)_{v,v,\ell}$.

Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le point a .*

2) **(Spectre)**

On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{C}$ **; et on rappelle que** $j^3 = 1$, **et** $1 + j + j^2 = 0$. **On note encore** $\zeta := -j$.

On note $E := \mathbb{C}^{\mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ **le** $\mathbb{C}$**-espace vectoriel des** ***application*** **s de** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **dans** $\mathbb{C}$ **; et pour tout** $u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\beta_u \in E : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,,\ v \mapsto \zeta^{uv}$.

On note $\Phi(G) \in \mathrm{End}(E)$ **l'*****endomorphisme d'adjacence*** **du** ***graphe*** G.

a) **(Vecteur propre)**

Calculer $\Phi(G)(\beta_u)$ pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$.

b) Déterminer le *spectre* $\mathrm{Sp}(G) = \mathrm{Sp}(\Phi(G)) = \mathrm{Sp}(\mathcal{A}(G))$ de G et une base de E de *vecteurs propres* pour $\Phi(G)$.

Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le calcul du point a .*

3) **(Parcours dans $\mathbf{C}_6$)**

a) **(Trace)**

Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) = (2^\ell + 2) \cdot \big(1 + (-1)^\ell\big)$; où $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) = \mathrm{tr}\big(\Phi(G)^\ell\big)$ est la trace de l'itérée $\ell^{\text{ième}}$ (la puissance $\ell^{\text{ième}}$) de la *matrice d'adjacence* de G.

b) **(Parcours)**

Calculer en fonction de $\ell \in \mathbb{N}$, $\#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big)$ pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$.

Indication : *On pourra utiliser les résultats de l'exercice A , et du point b de la question 1 .*

c) **(Parcours de longueur impaire)**

Pour $(u, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, quelle(s) propriété(s) de $P(G)_{u,u,\ell}$ peut-on énoncer ?

Exercice D : (Parcours et connexité)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe fini simple non-orienté* . Pour tout** $(u, v, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, $P(G)_{u,v,\ell}$ **est défini comme en .0..0.4. Pour tout** $u \in \mathcal{V}(G)$, **on note**

$\mathcal{V}(C(G)_u) := \{v \in \mathcal{V}(G) \,;\, \exists \ell \in \mathbb{N},\, P(G)_{u,v,\ell} \neq \emptyset\} \subset \mathcal{V}(G)$; **et**

$\mathcal{E}(C(G)_u) := \big\{\{v, w\} \in \mathcal{E}(G) \,;\, w \in \mathcal{V}(C(G)_u) \,,\, v \in \mathcal{V}(C(G)_u)\big\} \subset \mathcal{E}(G)$.

Il s'ensuit que $C(G)_u := \big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ **est le *sous-graphe induit* par** G **sur** $\mathcal{V}(C(G)_u)$.

(Ouvert)

Un *couple* $\big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G), \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)\big)$ **est un *ouvert* de** G **si**

$$\forall (u, v) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}(G),\ \{u, v\} \in \mathcal{E}(G) \Rightarrow \{u, v\} \in \mathcal{F} .$$

1) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ est un *ouvert* de G.

(Fermé)

Un *couple* $\big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G), \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)\big)$ **est un *fermé* de** G **si** $\big(\mathcal{V}(G) \setminus \mathcal{W} \,,\, \mathcal{E}(G) \setminus \mathcal{F} \big)$ **est un *ouvert* de** G.

2) (Fermé)

Montrer que $\big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G) \,,\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G) \big)$ est un *fermé* si et seulement si

$$(*) \ :\ \{u, v\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \big(u \in \mathcal{W} \text{ et } v \in \mathcal{W} \big) .$$

3) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ est un *fermé* de G.

4) (Ouvert-fermé)

Soit $\Omega := \big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G) \,,\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G) \big)$. Montrer que si Ω est à la fois un *ouvert* et un *fermé* $\forall v \in \mathcal{W},\ N_G(v) \subset \mathcal{W}$; (autrement dit si $\mathcal{W}$ contient un *sommet* il contient tous ses *voisin* s.)

5) Pour tout $(u, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$ **on note** $\mathcal{V}(u, \ell) := \{v \in \mathcal{V}(G) \,;\, P(G)_{u,v,\ell} \neq \emptyset\}$.

Pour $u \in \mathcal{V}(G)$, exprimer $\mathcal{V}(C(G)_u)$ à l'aide des $\mathcal{V}(u, \ell)\,,_{\ell \in \mathbb{N}}$.

6) Soient $u \in \mathcal{V}(G)$ **et** $\Omega := (\mathcal{W}, \mathcal{F})$, **qui est à la fois un *ouvert* et un *fermé* de** G. **On suppose de plus que :**

O/F$_1$) $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(C(G)_u)$.

O/F$_2$) $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(C(G)_u)$.

O/F$_3$) $u \in \mathcal{W}$.

a) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(u, \ell) \subset \mathcal{W}$.

b) Montrer que $\mathcal{W} = \mathcal{V}(C(G)_u)$.

c) Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{E}(C(G)_u)$.

d) Que dire de $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ parmi les *couple* s $(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ *ouvert* s et *fermé* s tels que $u \in \mathcal{W}$?