Université Orsay-Paris-Saclay Année 2023–2024

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie …

Corrigé de l'examen partiel du 1er mars 2024

Exercice A : (Morphismes, degrés)

Soient K_2 le *graphe complet* à deux *sommets* défini par :

— $\mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \;:=\; \{1,2\}$;

— $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \;:=\; \big\{\{1,2\}\big\}$;

—

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon(\mathbf{K}_2) : & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{1,2}(\mathbf{K}_2) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(\mathbf{K}_2)) \\ & \{1,2\} & \longmapsto & \{1,2\} \;; \end{array}$$

et C_4 le *cycle* à 4 *sommets* défini par :

— $\mathcal{V}(\mathbf{C}_4) \;:=\; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

— $\mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \;:=\; \big\{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,0\}\big\}$;

—

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon(\mathbf{C}_4) : & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{1,2}(\mathbf{C}_4) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ & \{0,1\} & \longmapsto & \{0,1\} \\ & \{1,2\} & \mapsto & \{1,2\} \\ & \{2,3\} & \mapsto & \{2,3\} \\ & \{3,0\} & \mapsto & \{3,0\} \;. \end{array}$$

1) $(\mathbf{K}_2 \;\to\; \mathbf{C}_4)$

a) Existe-t-il un *morphisme de graphes à non-orienté* $\phi \;:\; \mathbf{K}_2 \;\to\; \mathbf{C}_4$ tel que $\mathcal{V}(\phi)(1) \;=\; 0$ et $\mathcal{V}(\phi)(2) \;=\; 2$?

Solution

Si un tel morphisme existe il doit exister une application $\mathcal{E}(\phi) \;:\; \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \;\to\; \mathcal{E}(\mathbf{C}_4)$ (cf. ,) satisfaisant . On aura alors nécessairement (cette condition étant d'ailleurs aussi suffisante puisque $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2)$ est un singleton ,) $\varepsilon(\mathbf{C}_4)\big(\mathcal{E}(\phi)(\{1,2\})\big) \;=\; \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\big(\varepsilon(\mathbf{K}_2)(\{1,2\})\big) \;=\; \{\phi(1),\phi(2)\} \;=\; \{0,2\}$.

Ceci entraîne que $\mathcal{E}(\phi)\big(\{1,2\}\big) \;\in\; \varepsilon(\mathbf{C}_4)^{-1}(\{\{0,2\}\})$. Or $\varepsilon(\mathbf{C}_4)^{-1}(\{\{0,2\}\}) \;=\; \emptyset$; ce qui interdit l'existence de $\mathcal{E}(\phi)$.

Il n'existe donc pas de morphisme de graphes à non-orienté ϕ satisfaisant aux conditions demandées.

b) Existe-t-il un *morphisme de graphes à non-orienté* $\phi \;:\; \mathbf{K}_2 \;\to\; \mathbf{C}_4$ tel que $\mathcal{V}(\phi)(1) \;=\; 0$ et $\mathcal{V}(\phi)(2) \;=\; 1$?

Solution

Il suffit de poser $\mathcal{E}(\phi)\big(\{1,2\}\big) \;:=\; \{0,1\} \;\in\; \mathcal{E}(\mathbf{C}_4)$; et l'on constate immédiatement que les axiomes à sont satisfaits.

2) $(\mathbf{C}_4 \;\to\; \mathbf{K}_2)$

Déterminer l'*ensemble* $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}_4,\mathbf{K}_2)$ des *morphismes de graphes à non-orienté* $\mathbf{C}_4 \;\to\; \mathbf{K}_2$.

Solution

Pour tout $\phi \;\in\; \mathrm{Hom}(\mathbf{C}_4,\mathbf{K}_2)$; puisque $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \;=\; \big\{\{1,2\}\big\}$ est un singleton , $\mathcal{E}(\phi)$ est l'unique application $\mathcal{E}(\phi) \;:\; \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \;\to\; \mathcal{E}(\mathbf{K}_2)$, $e \;\mapsto\; \{1,2\}$. Par ailleurs $\mathcal{V}(\phi)(0) \;=\; 1$ ou 2 .

$\mathcal{V}(\phi)(0) \;=\; 1$ *Alors*

$\mathcal{V}(\phi)(1)$ $\mathcal{E}(\phi)\big(\{0,1\}\big) \;\in\; \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \;=\; \big\{\{1,2\}\big\}$ *; ce qui entraîne* $\mathcal{E}(\phi)\big(\{0,1\}\big) \;=\; \{1,2\}$ *; et finalement* $\mathcal{V}(\phi)(1) \;=\; 2$.

$\mathcal{V}(\phi)(2)$ *De même* $\mathcal{E}(\phi)\big(\{1,2\}\big) \;=\; \{1,2\}$ *; si bien que* $\mathcal{V}(\phi)(2) \;=\; 1$.

$\mathcal{V}(\phi)(3) \;=\; 1$.

On constate qu'on a ainsi construit un unique *morphisme de graphes à non-orienté* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{C}_4)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{C}_4] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$ *tel que* $\mathcal{V}(\phi)(0) = 1$ *; c'est-à-dire que* $\mathcal{V}(\phi)$ *et* $\mathcal{E}(\phi)$ *satisfont bien .*

$\mathcal{V}(\phi)(0) = 2$ *On montre qu'alors, nécessairement* $\mathcal{V}(\phi)(1) = 1$, $\mathcal{V}(\phi)(2) = 2$ *et* $\mathcal{V}(\phi)(3) = 1$ *; et l'on vérifie que l'on définit bien ainsi un morphisme de graphes à non-orienté* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{C}_4)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{C}_4] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$ *i.e. que* $\mathcal{V}(\phi)$ *et* $\mathcal{E}(\phi)$ *satisfont bien .*

Ainsi

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{C}_4, \mathbf{K}_2) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array} , e \mapsto \{1,2\} \right) , \left(\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 2 \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array} , e \mapsto \{1,2\} \right) \right\} .$$

3) Pour $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$ un *morphisme de graphes à non-orienté* , peut-on, sans hypothèse supplémentaire, comparer $d_G(u)$ et $d_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$ pour $u \in \mathcal{V}(G)$?

Solution

Au point b de la question 1 on a construit un morphisme de graphes à non-orienté $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{C}_4)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{C}_4] \end{array}$. *Puisque* $\mathbf{K}_2$ *est* 1*-régulier (cf. la définition I.4.8,) tandis que* $\mathbf{C}_4$ *est* 2*régulier on a* $\forall u \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_2),\ d(u) \leq d\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

À la question 2 on a construit des morphismes de graphes à non-orienté $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{C}_4) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{C}_4)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{C}_4] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$ *pour lesquels on aura toujours* $d(u) \geq d\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

Sans hypothèse supplémentaire sur Φ*, on ne peut donc pas donner de relation entre* $d(u)$ *et* $d\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

Exercice B : (Morphismes, voisins)

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **et** $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ **des** ***graphes à non-orienté*** **et** $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$ **un** ***morphisme de graphes à non-orienté*** **.**

1) Montrer que $\forall u \in \mathcal{V}(G),\ \mathcal{V}(\phi)\big(N_G(u)\big) \subset N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

Solution

Pour tout $v \in N_G(u)$*, il existe* $e \in \mathcal{E}(G)$ *tel que* $\varepsilon(G)(e) = \{u, v\}$ *. Il résulte alors que* $\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \{\mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\}$ *; ce qui entraîne que* $\mathcal{V}(\phi)(v) \in N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

2) Montrer que si ϕ est un *isomorphisme de graphes à non-orienté* , pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, la *restriction* $\mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)} : N_G(u) \to N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$ de $\mathcal{V}(\phi)$ à l'*ensemble* $N_G(u)$ des *voisins* de u est une *bijection* de $N_G(u)$ sur $N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$. En déduire qu'alors l'inclusion de la question 1 est une égalité.

Solution

Si ϕ est un isomorphisme de graphes à non-orienté il existe (cf. ,) un morphisme de graphes à non-orienté

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\psi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]G] \end{tikzcd}$$

tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_g$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$.

Par ailleurs, il résulte de la question 1 appliquée au morphisme ψ que pour tout $u \in \mathcal{V}(G), \psi\big(N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)\big) \subset N_G\big(\phi(\psi(u))\big) = N_G(u)$.

Il en résulte que $\mathcal{V}(\psi)_{|N_H\left(\mathcal{V}(\phi)(u)\right)} \circ \mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)} : N_G(u) \to N_G(u)$ est une application de $N_G(u)$ dans lui-même. Pour tout $v \in N_G(u)$, $\mathcal{V}(\psi)_{|N_H\left(\mathcal{V}(\phi)(u)\right)} \circ \mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)}(v) = \mathcal{V}(\psi)\big(\mathcal{V}(\phi)(v)\big) = v$; c'est-à-dire que $\mathcal{V}(\psi)_{|N_H\left(\mathcal{V}(\phi)(u)\right)} \circ \mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)} = \mathrm{Id}_{N_G(u)}$.

On montrerait exactement de la même manière que $\mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)} \circ \mathcal{V}(\psi)_{|N_H\left(\mathcal{V}(\phi)(u)\right)} = \mathrm{Id}_{N_H\left(\phi(u)\right)}$; ce qui prouve que $\mathcal{V}(\phi)_{|N_G(u)}$ est une bijection à valeurs dans $N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$.

L'égalité $\phi\big(N_G(u)\big) = N_H\big(\mathcal{V}(\phi)(u)\big)$ est alors immédiate.

Exercice C : **(Automorphismes de**

```
+ ---- + ---- +
|      |      |
+ ---- + ---- +
|      |      |
+ ---- + ---- +
```

)

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les points $O := \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; I, J, K, L, **les milieux respectifs de** $[A;B]$, $[B;C]$, $[C;D]$ **et** $[D;A]$.

Soient

— $\mathcal{V} := \{A, B, C, D, O, I, J, K, L\}$;

— $$\mathcal{E} := \left\{ \{X,Y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}) ; \begin{array}{rl} & X - Y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \\ \text{ou} & X - Y = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \end{array} \right\} ;$$

— $\varepsilon := \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V})|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V})$.

1) Montrer que $G := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \varepsilon)$ est un *graphe fini simple non-orienté* .

Solution

- *Il est tout d'abord clair que $G := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \varepsilon)$ vérifie axiomes à .*
- *L'ensemble $\mathcal{V}$ est un ensemble fini en bijection avec $[1;9]$. Il en résulte que $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ est un ensemble fini à 2^9 éléments ; et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{V})$ est donc un ensemble fini . G est donc, à ce point, un graphe fini non-orienté (cf. la définition I.3.1.)*
- *Pour tout $\{X,Y\} \in \mathcal{E}$, $X - Y \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ par définition, i.e. $X \neq Y$; ce qui entraîne que $\forall X \in \mathcal{V}$, $\{X\} \notin \mathcal{E}$; autrement dit G n'a pas de boucle (cf. .)*
- *Puisque $\varepsilon = \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}}$, ε est en particulier injective ; ce qui entraîne finalement que G est un graphe simple (cf. la définition I.4.1.)*

2) Représenter G.

Solution

$$\begin{array}{ccccc} B & ---- & I & ---- & A \\ | & & | & & | \\ J & ---- & O & ---- & L \\ | & & | & & | \\ C & ---- & K & ---- & D \end{array}$$

Pour tout *entier naturel* $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathcal{V}_k := \{X \in \mathcal{V}\,;\, d_G(X) = k\}\,.$$

3) (**Partition de $\mathcal{V}$**)

a) Vérifier que $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_\ell \neq \emptyset \Rightarrow k = \ell\,.$

Solution

$$\begin{array}{llcl} \forall (k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, & \mathcal{V}_k\cap\mathcal{V}_\ell & \neq & \emptyset \\ \Rightarrow \exists X \in \mathcal{V}, & X & \in & \mathcal{V}_k\cap\mathcal{V}_\ell \\ \Rightarrow \exists X \in \mathcal{V}, & k = & d_G(X) & = \ell\,. \end{array}$$

b) Vérifier que $\mathcal{V} = \bigcup_{k\,\in\,\mathbb{N}} \mathcal{V}_k\,.$

Solution

$\forall X \in \mathcal{V},\ X \in \mathcal{V}_{d_G(X)}\,.$

L'écriture $\mathcal{V} = \coprod_{k\,\in\,\mathbb{N}} \mathcal{V}_k$ exprime simultanément le résultat du point a de la question 3 et celui du point b.

4) Déterminer $\mathcal{V}_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Solution

On a $d_G(A) = d_G(B) = d_G(C) = d_G(D) = 2$, $d_G(I) = d_G(J) = d_G(K) = d_G(L) = 3$ et $d_G(O) = 4$. Il s'ensuit donc que :

- $\mathcal{V}_2 = \{A,B,C,D\}$;
- $\mathcal{V}_3 = \{I,J;K,L\}$;
- $\mathcal{V}_4 = \{O\}$;
- $\forall k\in\mathbb{N},\ k \notin [2;4] \Rightarrow \mathcal{V}_k = \emptyset\,.$

5) Montrer que pour tout *automorphisme de graphes à non-orienté* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $\forall k\in\mathbb{N},\ \alpha(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}_k\,.$
Indication : *On pourra utiliser, même si on ne les a pas établis, les résultats de l'exercice B .*

Solution

Puisque α est, en particulier, un isomorphisme de graphes à non-orienté , il résulte de la question 2 de l'exercice B , que $\forall u \in \mathcal{V}(G)$, α se restreint en une bijection de $N_G(u)$ sur $N_G\big(\mathcal{V}(\alpha)(u)\big)$. Comme de plus, G est un graphe fini non-orienté ,

$$\begin{array}{rcl} \forall u\in\mathcal{V}(G),\quad d_G(u) & = & \#\big(N_G(u)\big) \\ & = & \#\big(N_G\big(\mathcal{V}(\alpha)(u)\big)\big) \\ & = & d_G\big(\mathcal{V}(\alpha)(u)\big)\ ; \end{array}$$

ce qui prouve que $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall u\in\mathcal{V}_k,\ \mathcal{V}(\alpha)(u) \in \mathcal{V}_k$; c'est-à-dire qUE $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathcal{V}(\alpha)(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}_k$.

6) **a)** Montrer que pour tout *automorphisme de graphes à non-orienté* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, la *restriction* $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$ de $\mathcal{V}(\alpha)$ à $\mathcal{V}_2$ appartient à l'*ensemble* $\mathcal{S}(\mathcal{V}_2)$ des *bijections* de $\mathcal{V}_2$ sur lui-même.

Solution

On a montré à la question 5 que $\mathcal{V}(\alpha)(\mathcal{V}_2) \subset \mathcal{V}_2$. La restriction $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$ est donc une application de $\mathcal{V}_2$ à valeurs dans lui-même. L'application $\mathcal{V}(\alpha)$ étant bijective , elle est en particulier injective ; et sa restriction $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$ l'est encore (cf. le point ii du lemme I.1.13.20.) Comme, de plus, $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}(G)$ est un ensemble fini , $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}$ est bijective .

On définit $\Phi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathcal{S}(\mathcal{V}_2)\,,\ \alpha \mapsto \Phi(\alpha) := \mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}\,.$

b) Montrer que $\Phi : \big(\mathrm{Aut}(G),\circ\big) \to \big(\mathcal{S}(\mathcal{V}_2),\circ\big)$ est un *morphisme de groupes* .

Solution

$$\begin{aligned}\forall(\alpha,\beta)\in \mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G),\quad \Phi(\alpha\circ\beta) &= \mathcal{V}(\alpha\circ\beta)_{|\mathcal{V}_2}\\ &= \big(\mathcal{V}(\alpha)\circ\mathcal{V}(\beta)\big)_{|\mathcal{V}_2}\\ &= \mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2}\circ\mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_2}\\ &= \Phi(\alpha)\circ\Phi(\beta)\,.\end{aligned}$$

ce qui assure que Φ est un morphisme de groupes .

7) (**Surjectivité de Φ**)
Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que

$$\mathcal{V}(\alpha)(A) = B\,,\ \mathcal{V}(\alpha)(B) = A\,,\ \mathcal{V}(\alpha)(C) = C \text{ et } \mathcal{V}(\alpha)(D) = D\,. \qquad \mathbf{1}$$

a) Déterminer alors $\mathcal{V}(\alpha)(I)$.

Solution

Puisque $I \in \{A,I\}\cap\{B,I\}$, il découle que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\alpha)(I) &\in \mathcal{E}(\alpha)\big(\{A,I\}\big)\cap\mathcal{E}(\alpha)\big(\{B,I\}\big)\\ &= \big\{\mathcal{V}(\alpha)(A),\mathcal{V}(\alpha)(I)\big\}\cap\big\{\mathcal{V}(\alpha)(B),\mathcal{V}(\alpha)(I)\big\}\\ &= \big\{B,\mathcal{V}(\alpha)(I)\big\}\cap\big\{A,\mathcal{V}(\alpha)(I)\big\}\,.\end{aligned}$$

Or le seul sommet $X \in \mathcal{V}(G)$ tel que $\{A,X\} \in \mathcal{E}(G)$ et $\{B,X\} \in \mathcal{E}(G)$ est I ; si bien que $\mathcal{V}(\alpha)(I) = I$.

b) Déterminer alors $\mathcal{V}(\alpha)(J)$.

Solution

Puisque $J \in \mathcal{V}_3$ et $\mathcal{V}(\alpha)(\mathcal{V}_3) \subset \mathcal{V}_3$ (cf. la question 5 ,) nécessairement $\mathcal{V}(\alpha)(J) \in \mathcal{V}_3$; si bien que $\mathcal{V}(\alpha)(J) = I$, J , K ou *L . Or (cf. le point a ,) $\mathcal{V}(\alpha)(I) = I$; et comme $\mathcal{V}(\alpha)$ est injective $\mathcal{V}(\alpha)(J) = J$, K* ou *L .*

Puisque $B \in \{B,J\}$, $\mathcal{V}(\alpha)(B) \in \mathcal{E}(\alpha)\big(\{B,J\}\big)$; c'est-à-dire $A \in \mathcal{E}(\alpha)\big(\{B,J\}\big)$; ce qui entraîne $\mathcal{E}(\alpha)\big(\{B,J\}\big) = \{A,I\}$ ou *$\{A,L\}$; ce qui entraîne finalement, puisque $\mathcal{V}(\alpha)(J) \neq I$, $\mathcal{V}(\alpha)(J) = L$.*

c) En considérant, par exemple l'*arête* $\{J,C\} \in \mathcal{E}(G)$ et son *image* par $\mathcal{E}(\alpha)$, mettre en évidence une contradiction.

Solution

D'après le point b $\mathcal{E}(\alpha)\big(\{J,C\}\big) = \big\{\mathcal{V}(\alpha)(J),\mathcal{V}(\alpha)(C)\big\} = \{C,L\}$. Or $\{L,C\} \notin \mathcal{E}(G)$; ce qui contredit l'existence de α satisfaisant 1.

d) Le *morphisme* Φ est-il *surjectif* ?

Solution

Soit

$$\begin{array}{rccc}\tau: & \mathcal{V}_2 & \longrightarrow & \mathcal{V}_2\\ & A & \longmapsto & B\\ & B & \mapsto & A\\ & C & \mapsto & C\\ & D & \mapsto & D\,.\end{array}$$

S'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $\Phi(\alpha) = \tau$, α vérifie 1. Or nous avons constaté au point c qu'il n'existe aucun $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ satisfaisant ces conditions; Φ n'est donc pas surjectif .

8) (**Injectivité de Φ**)

a) Montrer que $\forall\alpha \in \mathrm{Aut}(G),\ \mathcal{V}(\alpha)(O) = O$.

Solution

D'après la question 5 , $\mathcal{V}(\alpha)(\mathcal{V}_4) \subset \mathcal{V}_4$; et comme $\mathcal{V}_4 = \{O\}$ (cf. la question 4 ,) $\mathcal{V}(\alpha)(O) = O$.

b) Étant donné $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) \Rightarrow \mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_3} = \mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_3}$.

Solution

Remarquons, qu'en vertu de la question 5 , $\forall \xi \in \mathrm{Aut}(G),\ \mathcal{V}(\xi)_{|\mathcal{V}_3}$ *a un sens.*

Le même raisonnement qu'au point a de la question 7 montre alors que

$$\big(\mathcal{V}(\alpha)(A) = \mathcal{V}(\beta)(A) \text{ et } \mathcal{V}(\alpha)(B) = \mathcal{V}(\beta)(B)\big) \Rightarrow \mathcal{V}(\alpha)(I) = \mathcal{V}(\beta)(I)\,.$$

On montre exactement sur le même modèle que $\mathcal{V}(\alpha)(J) = \mathcal{V}(\beta)(J)$, $\mathcal{V}(\alpha)(K) = \mathcal{V}(\beta)(K)$ et $\mathcal{V}(\alpha)(L) = \mathcal{V}(\beta)(L)$ *; ce qui prouve le résultat.*

c) En déduire que, sous les mêmes hypothèses qu'au point b , $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$.

Solution

- $\cdot_{|\mathcal{V}_4}$ *D'après le point a ,* $\mathcal{V}(\alpha)(O) = O\ \mathcal{V}(\beta)(O)$ *; i.e.* $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_4} = \mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_4}$.
- $\cdot_{|\mathcal{V}_3}$ *D'après le point b ,* $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_3} = \mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_3}$.
- $\cdot_{|\mathcal{V}_2}$ *Par hypothèse,* $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ *équivaut précisément à* $\mathcal{V}(\alpha)_{|\mathcal{V}_2} = \mathcal{V}(\beta)_{|\mathcal{V}_2}$.

Le résultat découle finalement du fait que $\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \cup \mathcal{V}_4$.

d) Le *morphisme* Φ est-il *injectif* ?

Solution

Il résulte du point c que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G),\ \Phi(\alpha) = \Phi(\beta) \Rightarrow \mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$.

Pour tout $\{X,Y\} \in \mathcal{E}(G)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\alpha)\big(\{X,Y\}\big) &= \big\{\mathcal{V}(\alpha)(X),\mathcal{V}(\alpha)(Y)\big\}\\ &= \big\{\mathcal{V}(\beta)(X),\mathcal{V}(\beta)(Y)\big\}\\ &= \mathcal{E}(\beta)\big(\{X,Y\}\big)\,;\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}(\beta)$ *; et donc, finalement, que* $\alpha = \beta$.

Le morphisme Φ *est donc injectif.*

9) (**Le groupe** $\mathrm{Aut}(G)$)

a) Déterminer l'*ensemble* $S_A := \{\xi \in \mathrm{Aut}(G)\ ;\ \mathcal{V}(\xi)(A) = A\}$ et vérifier que $(S_A,\circ)$ est un *sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$.
Indication : *On pourra s'intéresser en particulier à* $\mathcal{V}(\xi)(I)$.

Solution

En effet, nécessairement $\mathcal{E}(\xi)\big(\{A,I\}\big) = \{A,I\}$ *ou* $\{A,L\}$ *; si bien que* $\mathcal{V}(\xi)(I) = I$ ou L .

i) ($\mathcal{V}(\xi)(I) = I$)
alors
- $\mathcal{V}(\xi)(B)$ $\mathcal{E}(\xi)\big(\{I,B\}\big) = \{I,A\}$, $\{I,O\}$ ou $\{I,B\}$. *Or on a déjà* $\mathcal{V}(\xi)(O) = O$ *(cf. le point a de la question 8 ,)* *et* $\mathcal{V}(\xi)(A) = A$ *par hypothèse. Donc, par injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)(B) = B$.
- $\mathcal{V}(\xi)(J)$ *de même on a* $\mathcal{V}(\xi)(J) = I$, O ou J *; ce qui entraîne, toujours par injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)(J) = J$.
- $\mathcal{V}(\xi)(C) = O$, B ou C *; donc* $\mathcal{V}(\xi)(C) = C$.
- — *de même* $\mathcal{V}(\xi)(K) = K$, $\mathcal{V}(\xi)(D) = D$ *et* $\mathcal{V}(\xi)(L) = L$.

Il s'ensuit que $\mathcal{V}(\xi) = \mathcal{V}(\mathrm{Id}_G)$ *; ce qui entraîne, en particulier* $\Phi(\xi) = \Phi(\mathrm{Id}_G)$ *; ce qui entraîne finalement, puisque* Φ *est injectif (cf. le point d de la question 8 ,)* $\xi = \mathrm{Id}_G$.

ii) ($\mathcal{V}(\xi)(I) = L$)
alors
- $\mathcal{V}(\xi)(L) = I$ ou L *; donc par injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)(L) = I$.
- $\mathcal{V}(\xi)(B) = O$, A ou D . *Par injectivité de* $\mathcal{V}(\xi)$, *on a* $\mathcal{V}(\xi)(B) \neq O$ *et* $\mathcal{V}(\xi)(B) \neq A$ *; donc* $\mathcal{V}(\xi)(B) = B$.
- $\mathcal{V}(\xi)(D) = A$, O ou B *; donc* $\mathcal{V}(\xi)(D) = B$.
- — $\mathcal{V}(\xi)(J) = K$, $\mathcal{V}(\xi)(K) = J$ *et* $\mathcal{V}(\xi)(C) = C$.

Il existe donc un unique $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ *(cf. le point d de la question 8 ,) tel que* $\mathcal{V}(\sigma)$ *satisfait aux conditions ci-dessus.*

Comme $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_G$, $S_A = \big(\{\sigma, \mathrm{Id}_G\}, \circ\big)$ *est un sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$. *On aurait également pus dire, a priori, que* $\mathrm{Id}_G \in S_A$ *et que la condition* $\mathcal{V}(\xi)(A) = A$ *est stable par composition et passage à l'inverse ; ce qui assure que* S_A *est un sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$.

b) **i)** Montrer qu'il existe un unique $\rho \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}(\rho) : & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathcal{V}(G) \\ & A & \longmapsto & B \\ & B & \mapsto & C \\ & C & \mapsto & D \\ & D & \mapsto & A\,. \end{array}$$

Solution

Unicité est assurée par l'injectivité de Φ *(cf. le point d de la question 8 .)*
Existence Si un tel automorphisme de graphes à non-orienté *existe* $\mathcal{V}(\rho)(I) = J$, $\mathcal{V}(\rho)(J) = K$, $\mathcal{V}(\rho)(K) = L$ *et* $\mathcal{V}(\rho)(L) = I$.

On vérifie alors que $\mathcal{E}(\rho)$ *est bien défini.*

ii) Quel est l'ordre de ρ dans $\mathrm{Aut}(G)$?

Solution

On constate que $\begin{array}{rcccccl} \mathcal{V}(\rho)(A) & = & B & \neq & A & \text{donc} & \rho \neq \mathrm{Id}_G \\ \mathcal{V}(\rho^2)(A) & = & C & \neq & A & \text{donc} & \rho^2 \neq \mathrm{Id}_G \\ \mathcal{V}(\rho^3)(A) & = & D & \neq & A & \text{donc} & \rho^3 \neq \mathrm{Id}_G \\ \mathcal{V}(\rho^4)(A) & = & A\,; \end{array}$ *comme* $\mathcal{V}(\rho)^4(I) = I$, *il résulte du point i du point a que* $\rho^4 = \mathrm{Id}_G$; ρ *est donc d'ordre* 4.

iii) Quel est le *sous-groupe* de $\mathrm{Aut}(G)$ engendré par ρ.

Solution

C'est le groupe $\{\mathrm{Id}_G, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ *qui est isomorphe* à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

c) Déterminer $\mathrm{Aut}(G)$.

Solution

Pour tout $\xi \in \mathrm{Aut}(G)$, *il existe* $k \in [0;3]$ *tel que* $\mathcal{V}\big(\rho^k\big)(A) = \mathcal{V}(\xi)(A)$. *Il s'ensuit que* $\mathcal{V}\big(\rho^{-k} \circ \xi\big)(A) = A$; *si bien qu'en vertu du point a ,* $\rho^{-k} \circ \xi = \mathrm{Id}_G$ ou σ . *Il s'ensuit qu'il existe un unique* $(k, \ell) \in [0;3] \times [0;1]$ *tel que* $\xi = \rho^k \sigma^\ell$.