Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2023–2024

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie . . .

Corrigé de l'examen du 3 mai 2024

Le résultat de l'exercice A pourra être librement utilisé dans l'exercice B et l'exercice C ; même si l'exercice A n'a pas été résolu.

.0 . −Conventions et notations

Les notations et conventions qui suivent seront utilisées tout au long de ce texte.

Notation .0.1 (Matrice/endomorphisme d'adjacence) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini simple non-orienté* . On notera $\mathcal{A}(G) := \Big(a(G)_{u,v}\Big)_{\substack{u \in \mathcal{V}(G)\\ v \in \mathcal{V}(G)}}$ la *matrice d'adjacence* de G ; et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(G)^n := \Big(a^{(n)}_{u,v}(G)\Big)_{\substack{u \in \mathcal{V}(G)\\ v \in \mathcal{V}(G)}}$.

Rappel .0.2 (Chemin) On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* , le *chemin de longueur* n est le *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ défini par :
$\mathcal{V}(\mathbf{P}_n) = [0; n] \subset \mathbb{N}$;
$\mathcal{E}(\mathbf{P}_n) = \big\{\{i, i+1\}\big\}_{,0 \le i \le n-1}$.

Définition .0.3 (Parcours, circuit) Éttant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour $\ell \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* ,

i) **(Parcours)**

un *parcours de longueur* ℓ dans G est un *morphisme de graphes à non-orienté*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\pi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{P}_\ell)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{array}$$
(cf. la définition I.4.10.)

Il revient au même de se donner l'*ensemble* $\{, \ldots, v_\ell := \mathcal{V}(\pi)(\ell)\} \subset \mathcal{V}(G)$ de sorte que $\forall 0 \le i \le \ell-1$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}(G)$ soit une *arête* de G.

Noter qu'on ne demande absolument pas que $\mathcal{V}(\pi)$ soit *injective* ; autrement dit le *parcours* π « peut repasser plusieurs fois par un même *sommet* » ; $\mathcal{E}(\pi)$ n'a pas plus de bonne raison d'être alors *injective* .

ii) **(Circuit)**
Le *parcours* π est un *circuit* si $\pi(0) = \pi(\ell)$.

Notation .0.4 (Parcours) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour tout $(v, w, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G$

on note $P(G)_{v,w,\ell}$ l'*ensemble des parcours de longueur* ℓ
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\pi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{P}_\ell)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{array}$$
dans G tels que $\mathcal{V}(\pi)(0) = v$ et $\mathcal{V}(\pi)(\ell) = w$.

Exercice A : (Itérés de la matrice d'adjacence)
Montrer que $\forall (u, v, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, $\#\big(P(G)_{u,v,\ell}\big) = a^{(\ell)}_{u,v}(G)$.
Indication : *On pourra donner une démonstration par récurrence sur l'entier naturel* $\ell \in \mathbb{N}$.

Solution

$\ell = 0$ *On a alors* $\mathcal{A}(G)^\ell = \mathrm{Id}$. *Alors* $\forall u \in \mathcal{V}(G)$,
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_1 & \to & G \\ 0 & \mapsto & u \end{array}$$

est l'unique *parcours* apartenant à $P_{u,u,0}$.

Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ $u \neq v$, *il n'existe aucune application* $\{0\} \to \mathcal{V}(G)$ *telle que* $0 \mapsto u$ *et* $0 \mapsto v$.

$\ell = 1$ *Pour ceux que le cas* $\ell = 0$, *ci-dessus bebuterait, on traite le cas* $\ell = 1$, *dont nous aurons, de toute façon besoin dans la suite du raisonnement par récurrence. Il suffit de remarquer qu'il existe* $\pi \in P_{u,v,1}$ *si et seulement si* u *et* v *sont voisin s et de se reporter de la matrice d'adjacence* .

$\ell \Rightarrow \ell+1$ *Pour tout* $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, *notons* $\tau : P_{u,v,\ell+1} \to \mathcal{V}(G)$, $\pi \mapsto \pi(\ell)$. *On a alors* $P_{u,v,\ell+1} = \coprod_{w \in \mathcal{V}(G)} \tau^{-1}(\{w\})$.

Pour tout $(\pi, w) \in P_{u,v,\ell+1} \times \mathcal{V}(G)$, *si* $\tau(\pi) = \mathcal{V}(\pi)(\ell) = w$, $\mathcal{E}(\pi)\big(\{\ell, \ell+1\}\big) = \{w,v\} \in \mathcal{E}(G)$; *si bien que* $w \in N_G(v)$. *Par contraposée, si* $w \notin N_G(v)$, $\tau^{-1}(\{w\}) = \emptyset$. *Il s'ensuit que* $P_{u,v,\ell+1} = \coprod_{w \in N_G(v)} \tau^{-1}(\{w\})$.

Si $w \in N_G(v)$ *et* $\pi \in \tau^{-1}(\{w\})$, $\pi_{|\mathbf{P}_\ell} \in P(G)_{u,w,\ell}$. *On considère ici* $\mathbf{P}_\ell$ *comme un sous-graphe de* $\mathbf{P}_{\ell+1}$, *par l'injection* $[0;\ell] \hookrightarrow [0;\ell+1]$. *On définit ainsi une application* $\tau^{-1}(\{w\}) \to P(G)_{u,w,\ell}$, $\pi \mapsto \pi_{|\mathbf{P}_\ell}$. *Réciproquement pour tout* $\pi \in P(G)_{u,w,\ell}$ *on définit* $\overline{\pi}$ *par* $\overline{\pi}_{|\mathbf{P}_\ell} := \pi$, $\mathcal{V}(\overline{\pi})(\ell+1) := v$ *et* $\mathcal{E}(\overline{\pi})\big(\{\ell, \ell+\}\big) := \{w,v\}$; *si bien que* $\overline{\pi} \in P_{u,v,\ell+1}$. *On définit ainsi une application* $P(G)_{u,w,\ell} \to \tau^{-1}(\{w\})$ *qui est évidemment inverse inverse de la précédente. Il en résulte finalement qu'on a une bijection* $P(G)_{u,w,\ell} \cong \tau^{-1}(\{w\})$.

Il s'ensuite donc que $\#\big(P_{u,v,\ell+1}\big) = \sum_{w \in N_G(v)} \#\big(\tau^{-1}(\{w\})\big) = \sum_{w \in N_G(v)} \#\big(P(G)_{u,w,\ell}\big)$.

Si on fait l'hypothèse de récurrence que $\#\big(P(G)_{u,w,\ell}\big) = a^{(\ell)}_{u,w}(G)$, *il vient* $\#\big(P_{u,v,\ell+1}\big) = \sum_{w \in N_G(v)} a^{(\ell)}_{u,w}(G)$. *Or* $\forall w \in \mathcal{V}(G)$, $a_{w,v}(G) = 1 \Leftrightarrow w \in N_G(v)$, *par de la matrice d'adjacence (c'est aussi le cas* $\ell = 1$.*)*

Il s'ensuit donc finalement que $\#\big(P_{u,v,\ell+1}\big) = \sum_{w \in \mathcal{V}(G)} a^{(\ell)}_{u,w}(G) \cdot a_{w,v}(G)$, *qui est précisément* $a^{(\ell+1)}_{u,v}(G)$ *par définition du produit matriciel.*

Exercice B : (Parcours dans le graphe $\mathbf{K}_5$)
Soit $A := \mathcal{A}(\mathbf{K}_5)$ la *matrice d'adjacence* du *graphe complet* $\mathbf{K}_5$.

1) Écrire la matrice A.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $A^2 = \alpha \mathrm{Id}_5 + A$.

Solution

$A^2 = 4\mathrm{Id}_5 + A$; *d'où* $\alpha = 4$.

3) Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un unique *couple* $(a_\ell, b_\ell) \in \mathbb{R}^2$ et un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^\ell = (X+1)(X-\alpha) \cdot Q + a_\ell X + b_\ell$.

Solution

Il suffit de faire la division euclidienne (cf. ,) de X^ℓ *par le polynôme* $(X+1)(X-\alpha)$ *qui est de degré* 2 ; *si bien que le reste (qui est unique) est de degré* > 2 *et s'écrit donc de manière unique* $a_\ell X + b_\ell$.

4) Déterminer a_ℓ et b_ℓ en fonction de α et ℓ .

Solution

$$\begin{array}{llcl} \forall \ell \in \mathbb{N}, & X^\ell & = & (X+1)(X-\alpha)Q + a_\ell X + b_\ell \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lcl}(-1)^\ell & = & (-1+1)(-1-\alpha)Q(-1) - a_\ell + b_\ell \\ \alpha^\ell & = & (\alpha+1(\alpha-\alpha)Q(\alpha) + \alpha a_\ell + b_\ell\end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl}(-1)^\ell & = & -a_\ell + b_\ell \\ \alpha^\ell & = & \alpha a_\ell + b_\ell\end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} a_\ell & = & \dfrac{(\alpha^\ell - (-1)^\ell)}{\alpha+1} \\ b_\ell & = & \dfrac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1}\end{array}\right\} \end{array}$$

5) Calculer A^ℓ pour $\ell \in \mathbb{N}$ en fonction de A, Id_5, α et ℓ .

Solution

On a (cf. la question 3 ,) $\forall \ell \in \mathbb{N},\ A^\ell = (A+\mathrm{Id}_5)(A-\alpha\mathrm{Id}_5) \cdot Q(A) + a_\ell A + b_\ell \mathrm{Id}_5$.

Or, d'après la question 2 , $(A+\mathrm{Id}_5)(A-\alpha\mathrm{Id}_5) = 0$; *si bien, qu'en utilisant la question 4 , il vient :*

$$\begin{array}{lcl} \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad A^\ell & = & a_\ell A + b_\ell \mathrm{Id}_5 \\ & = & \dfrac{(\alpha^\ell - (-1)^\ell)}{\alpha+1} \cdot A + \dfrac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1} \cdot \mathrm{Id}_5 \,. \end{array}$$

6) Si, pour tout $(u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N}$, $P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}$ est défini comme en .0..0.4, calculer $\#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big)$ en fonction de α et ℓ .

Indication : *On pourra, bien entendu, utiliser le résultat de l'exercice A .*

Solution

D'après l'exercice A $\#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big) = a^{(\ell)}_{u,u}(\mathbf{K}_5)$.

Or d'après la question 5 , $\forall (u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N},\ a^{(\ell)}_{u,u}(\mathbf{K}_5) = b_\ell = \dfrac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1}$; *si bien que*

$$\forall (u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N},\ \#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big) = \frac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1} \,.$$

7) Donner $\#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,\ell}\big)$ pour $\ell = 2, 3, 4$.

Solution

Comme $\alpha = 4$ *(cf. la question 2 ,)*

$$\begin{array}{lcl} \#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,2}\big) & = & \frac{1}{5}(4^2+4) \\ & = & 4 \\ \#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,3}\big) & = & \frac{1}{5}(4^3-4) \\ & = & 12 \\ \#\big(P(\mathbf{K}_5)_{u,u,4}\big) & = & \frac{1}{5}(4^4+4) \\ & = & 52 \,. \end{array}$$

Exercice C : (Parcours dans le graphe C_6)

Dans l'exercice C , on suppose que $G = \mathrm{C}_6$ est le *cycle* à 6 *sommet* s que l'on peut considérer comme le *graphe* de CAYLEY associé à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\{-1,1\}$.

1) **(Parcours et graphe sommets-transitif)**

a) Montrer que, pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, il existe un *automorphisme de graphes à non-orienté* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{C}$ tel que $\tau(u) = v$.

Définition a.1 On dit alors que $\mathbf{C}_6$ est *sommets-transitif* .

Solution

$\mathcal{V}(\tau)$ *Pour tout* $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $d := v - u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. *L'application* $\mathcal{V}(\tau) : \mathcal{V}(\mathbf{C}_6) \to \mathcal{V}(\mathbf{C}_6)$, $x \mapsto x + d$ *est une bijection de* $\mathcal{V}(\mathbf{C}_6)$ *sur lui-même.*

$\mathcal{E}(\tau)$ *L'application* $\mathcal{E}(\tau) : \mathcal{E}(\mathbf{C}_6) \to \mathcal{E}(\mathbf{C}_6)$, $\{x,y\} \mapsto \{x+d, y+d\} = \{\mathcal{V}(\tau)(x), \mathcal{V}(\tau)(y)\}$ *est une bijection de* $\mathcal{E}(\mathbf{C}_6)$ *sur lui-même.*

Morphisme Enfin $\tau := (\mathcal{V}(\tau), \mathcal{E}(\tau))$ *est, pour ainsi dire, par construction, un endomorphisme de graphes à non-orienté de* $\mathbf{C}_6$.

b) Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, construire une bijection $P(G)_{u,u,\ell} \cong P(G)_{v,v,\ell}$.
Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le point a .*

Solution

Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, *on sait, d'après le point a , qu'il existe* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{n\text{-}o}}(G)$ *tel que* $\tau(u) = v$. *Pour tout* $\pi \in P(G)_{u,u,\ell}$, $\tau \circ \pi \in P(G)_{v,v,\ell}$; *ce qui définit une application* $P(G)_{u,u,\ell} \to P(G)_{v,v,\ell}$, $\pi \mapsto \tau \circ \pi$. *L'application* $P(G)_{v,v,\ell} \to P(G)_{u,u,\ell}$, $\pi \mapsto \tau^{-1} \circ \pi$ *est manifestement sa bijection réciproque .*

2) (Spectre)
On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{C}$; **et on rappelle que** $j^3 = 1$, **et** $1 + j + j^2 = 0$. **On note encore** $\zeta := -j$.
On note $E := \mathbb{C}^{\mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ **le** $\mathbb{C}$**-espace vectoriel des** ***application*** **s de** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ **dans** $\mathbb{C}$; **et pour tout** $u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\beta_u \in E : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $v \mapsto \zeta^{uv}$.
On note $\Phi(G) \in \mathrm{End}(E)$ **l'*****endomorphisme d'adjacence*** **du** ***graphe*** G.

a) (Vecteur propre)
Calculer $\Phi(G)(\beta_u)$ pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$.

Solution

$$\begin{aligned} \forall (u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G), \quad \Phi(G)(\beta_u)(v) &= \sum_{w \,\in\, N_G(v)} \beta_u(w) \\ &= \beta_u(v-1) + \beta_u(v+1) \\ &= \zeta^{u(v-1)} + \zeta^{u(v+1)} \\ &= (\zeta^u + \zeta^{-u})\zeta^{uv} \\ &= (\zeta^u + \zeta^{-u})\beta_u(v) \, . \end{aligned}$$

En posant $\forall u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\lambda_u := \zeta^u + \zeta^{-u}$, *il vient*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \ \Phi(G)(\beta_u) = \lambda_u \cdot \beta_u \, . \tag{1}$$

b) Déterminer le *spectre* $\mathrm{Sp}(G) = \mathrm{Sp}(\Phi(G)) = \mathrm{Sp}(\mathcal{A}(G))$ de G et une base de E de *vecteurs propres* pour $\Phi(G)$.
Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le calcul du point a .*

Solution

On a établi en a.1 que pour tout $u \in \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, (β_u, λ_u) *est un couple (vecteur propre ,valeur propre) pour* $\Phi(G)$; *en remarquant, en particulier, que* $\beta_u \neq 0$.

Comme, par ailleurs, $\forall u \in \mathcal{V}(G)$, , $\lambda_u = \lambda_{-u}$, *les valeurs propres de* $\Phi(G)$ *sont* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

On constate en outre que $\{\beta_1, \beta_5\}$ $\{\beta_2, \beta_4\}$ *sont des parties libres de* E. *E notant* $\forall u \in \{0,1,2,3\}$, $E_u := \mathrm{Ker}\, \Phi(G) - \lambda_u \mathrm{Id}_E$, *il vient :*

$$\begin{array}{rcccccc} \mathrm{Vect}\{\beta_0\} & \subset & E_0 & \Rightarrow & \dim E_0 & \geq & 1 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_1, \beta_5\} & \subset & E_1 & \Rightarrow & \dim E_1 & \geq & 2 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_2, \beta_4\} & \subset & E_2 & \Rightarrow & \dim E_2 & \geq & 2 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_3\} & \subset & E_3 & \Rightarrow & \dim E_3 & \geq & 1 \, . \end{array}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{u=0}^{3} \dim E_u \geq 6 = \dim E$, *est que les espaces propres sont en somme directe , Il s'ensuit que* $\dim E_0 = \dim E_3 = 1$, *et* $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$. *Il en résulte que* $\{\beta_u\}_{u \,\in\, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ *est une base de* E *de vecteurs propres pour* $\Phi(G)$.

Le spectre de G est alors :

$$\mathrm{Sp}(G) \;=\; \big\{\lambda_0 \;=\; 2\;,\; \lambda_1 \;=\; 1^{(2)}\;,\; \lambda_2 \;=\; -1^{(2)}\;\lambda_3 \;=\; -2\big\}\;. \qquad 1$$

3) (Parcours dans $\mathbf{C}_6$)

a) (Trace)

Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \;=\; (2^\ell+2)\cdot\big(1+(-1)^\ell\big)$; où $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \;=\; \mathrm{tr}\big(\Phi(G)^\ell\big)$ est la trace de l'itérée $\ell^{\text{ième}}$ (la puissance $\ell^{\text{ième}}$) de la *matrice d'adjacence* de G.

Solution

D'après 2.b.1,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)\big) &= 2^\ell + 2(1^\ell) + 2(-1)^\ell + (-2)^\ell \\ &= 2^\ell\big(1+(-1)^\ell\big) + 2\big(1+(-1)^\ell\big) \\ &= (2^\ell+2)\cdot\big(1+(-1)^\ell\big)\;.\end{aligned}$$

b) (Parcours)

Calculer en fonction de $\ell \in \mathbb{N}$, $\#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big)$ pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$.

Indication : *On pourra utiliser les résultats de l'exercice A , et du point b de la question 1 .*

Solution

D'après l'exercice A ,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) &= \sum_{u\,\in\,\mathcal{V}(G)\,=\,\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} a^{(\ell)}_{u,u}(G) \\ &= \sum_{u\,\in\,\mathcal{V}(G)\,=\,\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big)\;.\end{aligned}$$

Or d'après le point b de la question 1 , $\forall(u,v)\in\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G),\;,\#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big) \;=\; \#\big(P_{v,v,\$ell}\big)$ *; si bien que*

$$\begin{aligned}\forall u\in\mathcal{V}(G),\qquad \mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) &= 6\cdot\#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big) \\ \Rightarrow\qquad \#\big(P(G)_{u,u,\ell}\big) &= \tfrac{1}{6}\cdot\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot(2^\ell+2)\cdot\big(1+(-1)^\ell\big)\;.\end{aligned}$$

c) (Parcours de longueur impaire)

Pour $(u,\ell) \in \mathcal{V}(G)\times\mathbb{N}$, quelle(s) propriété(s) de $P(G)_{u,u,\ell}$ peut-on énoncer ?

Solution

Pour ℓ impair , $1+(-1)^\ell \;=\; 0$ *; si bien que* $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \;=\; (2^\ell+2)\cdot\big(1+(-1)^\ell\big) \;=\; 0$ *; si bien que*

$$\forall u\in\mathcal{V}(G),\; P(G)_{u,u,\ell} \;=\; 0\;:$$

il n'y a pas de parcours de longueur impaire dans $\mathbf{C}_6$ *.*

Exercice D : (Parcours et connexité)

Soit $G \;:=\; \big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G)\big)$ **un** ***graphe fini simple non-orienté*** **. Pour tout** $(u,v,\ell) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathbb{N}$, $P(G)_{u,v,\ell}$ **est défini comme en .0..0.4. Pour tout** $u \in \mathcal{V}(G)$, **on note**

$\mathcal{V}(C(G)_u) \;:=\; \{v \in \mathcal{V}(G)\;;\;\exists\ell \in \mathbb{N},\; P(G)_{u,v,\ell} \neq \emptyset\} \subset \mathcal{V}(G)$; **et**

$\mathcal{E}(C(G)_u) \;:=\; \big\{\{v,w\} \in \mathcal{E}(G)\;;\; w \in \mathcal{V}(C(G)_u)\;,\; v \in \mathcal{V}(C(G)_u)\big\} \subset \mathcal{E}(G)$.

Il s'ensuit que $C(G)_u \;:=\; \big(\mathcal{V}(C(G)_u),\mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ **est le** ***sous-graphe induit*** **par** G **sur** $\mathcal{V}(C(G)_u)$.

(Ouvert)

Un ***couple*** $\big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G),\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)\big)$ **est un** ***ouvert*** **de** G **si**

$$\forall(u,v)\in\mathcal{W}\times\mathcal{V}(G),\;\{u,v\} \in \mathcal{E}(G) \;\Rightarrow\; \{u,v\} \in \mathcal{F}\;.$$

1) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(C(G)_u),\mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ est un *ouvert* de G.

Solution

Pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, *si* $v \in \mathcal{V}(C(G)_u)$, *il existe* $\ell \in \mathbb{N}$ *et* $\pi \in P(G)_{u,v,\ell}$. *Si de plus,* $\{v, w\} \in \mathcal{E}(G)$, *On peut définir*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_{\ell+1}) \arrow[r, "\mathcal{E}(\overline{\pi})"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_{\ell+1})"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_{\ell+1}] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\overline{\pi}]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
par :
$$\begin{aligned} \overline{\pi}_{|\mathbf{P}_\ell} &= \pi \\ \mathcal{V}(\overline{\pi})(\ell+1) &= w \\ \mathcal{E}(\overline{\pi})\big(\{\ell, \ell+1\}\big) &= \{v, w\} \,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $w \in \mathcal{V}(C(G)_u)$ *si bien que* $\{v, w\} \in \mathcal{E}(C(G)_u)$; *ce qui prouve le résultat.*

(Fermé)

Un *couple* $\big(\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G), \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G)\big)$ **est un *fermé* de** G **si** $\big(\, \mathcal{V}(G) \setminus \mathcal{W} \,,\, \mathcal{E}(G) \setminus \mathcal{F} \,\big)$ **est un *ouvert* de** G.

2) (Fermé)

Montrer que $\big(\, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G) \,,\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G) \,\big)$ est un *fermé* si et seulement si
$$(*) \;:\; \{u, v\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \big(\, u \in \mathcal{W} \text{ et } v \in \mathcal{W} \,\big) \,.$$

Solution

Notons $\mathcal{Z} := \mathcal{V}(G) \setminus \mathcal{W}$ *et* $\mathcal{H} := \mathcal{E}(G) \setminus \mathcal{F}$.

fermé $\Rightarrow (*)$ *On supose donc que* $(\mathcal{Z}, \mathcal{H})$ *est un ouvert . Il s'ensuit que pour tout* $u \in \mathcal{Z}$ $\{u, v\} \in \mathcal{E}(G)$ *entraîne* $\{u, v\} \in \mathcal{H}$ *. Par contraposée,* $\{u, v\} \in \mathcal{F}$ *entraîne donc* $u \in \mathcal{W}$.

$(*) \Rightarrow$ *fermé* *Pour tout* $u \in \mathcal{Z}$ *et tout* $v \in \mathcal{V}(G)$ *tels que* $\{u, v\} \in \mathcal{E}(G)$, *puisque* $u \notin \mathcal{W}$, $\{u, v\} \notin \mathcal{F}$; *donc* $\{u, v\} \in \mathcal{H}$; *ce qui prouve précisément que* $(\mathcal{Z}, \mathcal{H})$ *est un ouvert .*

3) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ est un *fermé* de G.

Solution

Tautologique par construction de $\mathcal{E}(C(G)_u)$.

4) (Ouvert-fermé)

Soit $\Omega := \big(\, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}(G) \,,\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E}(G) \,\big)$. Montrer que si Ω est à la fois un *ouvert* et un *fermé* $\forall v \in \mathcal{W},\ N_G(v) \subset \mathcal{W}$; (autrement dit si $\mathcal{W}$ contient un *sommet* il contient tous ses *voisin* s.)

Solution

Pour tout $(v, w) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}(G)$, *si* $w \in N_G(v)$, $\{v, w\} \in \mathcal{E}(G)$ *. Il s'ensuit, puisque* Ω *est ouvert que* $\{v, w\} \in \mathcal{F}$.
Il s'ensuit encore, puisque Ω *est fermé que* $w \in \mathcal{W}$.

5) Pour tout $(u, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$ **on note** $\mathcal{V}(u, \ell) := \{v \in \mathcal{V}(G) \,;\, P(G)_{u,v,\ell} \neq \emptyset\}$.

Pour $u \in \mathcal{V}(G)$, exprimer $\mathcal{V}(C(G)_u)$ à l'aide des $\mathcal{V}(u, \ell)\,,_{\ell \in \mathbb{N}}$.

Solution

Par définition,
$$\mathcal{V}(C(G)_u) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{V}(u, \ell) \,.$$

6) Soient $u \in \mathcal{V}(G)$ **et** $\Omega := (\mathcal{W}, \mathcal{F})$, **qui est à la fois un *ouvert* et un *fermé* de** G. **On suppose de plus que :**

O/F$_1$) $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(C(G)_u)$.

O/F$_2$) $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(C(G)_u)$.

O/F$_3$) $u \in \mathcal{W}$.

a) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(u, \ell) \subset \mathcal{W}$.

Solution

$\ell = 0$ Pour tout $v \in \mathcal{V}(C(G)_u)$, $v \in \mathcal{V}(u,0)$ si et seulement si $P(G)_{u,v,0} \neq \emptyset$; si et seulement si il existe $\pi : \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_1 \to G$ tel que $u = \mathcal{V}(\pi)(0) = v$; ce qui entraîne en particulier $v = u \in \mathcal{W}$ (cf. O/F$_3$.) Il en résulte que $\mathcal{V}(u,0) \subset \mathcal{W}$.

$\ell \Rightarrow \ell+1$ Pour $\ell \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{V}(u,\ell) \subset \mathcal{W}$. Pour tout $v \in \mathcal{V}(u,\ell+1)$, il existe un morphisme de graphes à non-orienté $\pi : \mathbf{P}_{\ell+1} \to G$ tel que $\mathcal{V}(\pi)(0) = u$ et $\mathcal{V}(\pi)(\ell+1) = v$. Par définition $w = \mathcal{V}(\pi)(\ell) \in \mathcal{V}(u,\ell)$; et par conséquent, $w \in \mathcal{W}$.

De plus $\{w,v\} = \mathcal{E}(\pi)\big(\{\ell,\ell+1\}\big) \in \mathcal{E}(G)$; si bien que $v \in N_G(w)$. Il résulte alors de la question 4 que $v \in \mathcal{W}$; si bien que finalement $\mathcal{V}(u,\ell+1) \subset \mathcal{W}$.

b) Montrer que $\mathcal{W} = \mathcal{V}(C(G)_u)$.

Solution

Comme (cf. la question 5 ,) $\mathcal{V}(C(G)_u) = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{V}(u,\ell)$ et (cf. le point a ,) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(u,\ell) \subset \mathcal{W}$; $\mathcal{V}(C(G)_u) \subset \mathcal{W}$.

L'inclusion $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(C(G)_u)$ résultant de la condition O/F$_1$, on a l'égalité $\mathcal{V}(C(G)_u) = \mathcal{W}$.

c) Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{E}(C(G)_u)$.

Solution

Pour tout $\{v,w\} \in \mathcal{E}(C(G)_u)$, par définition $(v,w) \in \mathcal{V}(C(G)_u) \times \mathcal{V}(C(G)_u)$; ce qui entraîne, (cf. le point b ,) $(u,v) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Puisque Ω est ouvert $\{v,w\} \in \mathcal{F}$; ce qui grâce à la condition O/F$_2$ $\mathcal{F} = \mathcal{E}(C(G)_u)$.

d) Que dire de $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ parmi les *couple* s $(\mathcal{W},\mathcal{F})$ *ouvert* s et *fermé* s tels que $u \in \mathcal{W}$?

Solution

On vient de montrer (cf. le point b et le point c ,) que $\big(\mathcal{V}(C(G)_u), \mathcal{E}(C(G)_u)\big)$ est minimal pour la propriété considérée.