Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2024–2025

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie ...

Corrigé Des exercices III.11

III.11 . – Exercices

III.11.1 . – Algèbre : généralités

Exercice III.11.1.1 (Caractérisation des sous-anneaux) Faire la preuve de la proposition III.1.1.4. À noter qu'une bonne partie de cette preuve a déjà été faite pour prouver la proposition II.8.3.5.

Exercice III.11.1.2 (Anneau des applications) **1)** Faire la démonstration de la proposition III.1.1.13.

2) Pour un anneau A, le fait que A soit intègre (respectivement un corps) entraîne-t-il que l'anneau A^E considéré à la proposition proposition III.1.1.13 soit intègre (resp. un corps ?)

Exercice III.11.1.3 (Groupe des inversibles (unités) d'un anneau) Si A est un anneau, on note $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A.

1) Calculer $\mathbb{Z}^\times$, et $\mathbb{K}[X]^\times$ quand $\mathbb{K}$ est un corps.

Solution

i) ***(Le cas de $\mathbb{Z}$)***
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$ab = 1 \Rightarrow |a| * |b| = |ab| = 1 .$$

Ainsi nécessairement, $|a| \leq 1$ ou $|b| \leq 1$. Si $|a| \leq 1$, comme $|a|$ est un entier naturel, $|a| = 0$ ou 1. On exclut évidemment $a = 0$, si bien que $a = \pm 1$ ce qui entraîne $b = a$, et par conséquent

$$\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\} .$$

ii) ***(Le cas de $\mathbb{K}[X]$)***
On rappelle que pour $P \in \mathbb{K}[X]$, le degré $\deg(P)$ de P vérifie

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X],\ \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) .$$

Ainsi :

$$\begin{array}{lrcl} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X], & PQ & = & 1 \\ \Rightarrow & \deg(PQ) & = & 0 \\ \Rightarrow & \deg(P)+\deg(Q) & = & 0 \\ \Rightarrow & \deg(P) = 0 & \text{et} & \deg(Q) = 0 . \end{array}$$

Les polynômes P et Q sont donc nécessairement des constantes non nulles i.e. des éléments de $\mathbb{K}^\times$ puisque $\mathbb{K}$ est un corps. Réciproquement tout élément de $\mathbb{K}^\times$ est encore inversible dans $\mathbb{K}[X]$ puisque $\mathbb{K}$ se réalise comme un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$; si bien que

$$\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times .$$

iii) ***(Plus généralement)***
On constate que l'ingrédient essentiel qu'on a utilisé aussibien pour $\mathbb{Z}$ que pour $\mathbb{K}[X]$ est l'existence d'une application à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant de bonnes propriétés. Il en serait de même pour l'anneau des entiers de GAUSS*name]Gauss@*GAUSS *ou l'anneau des entiers d'*EISENSTEIN*name]Eisenstein@*EISENSTEIN *par exemple.*

2) Si $\phi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, montrer que $\phi(A^\times) \subset B^\times$; si ϕ est surjectif, s'ensuit-il que $\phi(A^\times) = B^\times$?

Solution

i) $(\phi(A^\times) \subset B^\times)$
Pour tout $x \in A^\times$ *il existe* $y \in A^\times$ *tel que* $xy = 1$. *Or* ϕ *étant un morphisme d'anneaux,*

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= \phi(xy)\\ &= \phi(1)\\ &= 1\,;\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\phi(x)$ *est inversible.*

ii) *(**Surjection**)*
Même quand ϕ *est surjective,* $B^\times$ *peut être « beaucoup plus gros que »* $A^\times$. *Considérons, par exemple, la surjection canonique* $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *On a déterminé* $\mathbb{Z}^\times$ *ci-dessus et en particulier* $\#(\mathbb{Z}^\times) = 2$. *Or* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *étant un corps, puisque* 5 *est un nombre premier*

$$\#(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^\times) = \#(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = 5 - 1 = 4\,;$$

et il n'existe pas de surjection d'un ensemble à 2 *éléments dans un ensemble à* 4 *éléments.*

III.11.2 . –Espaces préhilbertien

Dans ce paragraphe (III.11.2,) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ **est le** ***corps*** **(cf. la définition III.1.1.12,) des** ***nombres réels*** **ou des** ***nombres complexes*** **;** E **et un** ***espaces pré-hilbertiens réels*** **name]Hilbert@HILBERT name]Hilbert@HILBERT ou** ***complexe*** **(cf. la définition III.8.4.)**

Exercice III.11.2.1 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux) Étant donné un projecteur $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$,
montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

OrthProj$_1$) $\mathrm{Ker}\,p \perp \mathrm{Im}\,p$.

OrthProj$_2$) $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$.

OrthProj$_3$) $p = p^*$.
Dans ce cas on dit que p **est un** ***projecteur orthogonal*****.**

Exercice III.11.2.2 (Caractérisation des symétries orthogonales) Étant donnée une symétrie $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$,
montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

SymOrth$_1$) $s \in \mathcal{O}(E)$ *i.e.* s est un endomorphisme orthogonal.

SymOrth$_2$) $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) \perp \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$.

SymOrth$_3$) Le projecteur $p^+ := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ est un projecteur orthogonal.

SymOrth$_4$) Le projecteur $p^- := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ est un projecteur orthogonal.

SymOrth$_5$) $s = s^*$. On rappelle qu'on dit alors que s et *autoadjoint*.
On dit dans ce cas que la symétrie est la ***symétrie orthogonale*** **par rapport à** $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$. **On dira aussi** ***réflexion*** **par rapport à** $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$.

Solution

SymOrth$_3$ ⇔ *SymOrth*$_4$ *On a déjà montré (cf. III.11.4.III.11.4.2.III.11.4.2.6,) que* $p^+ + p^- = \mathrm{Id}$; *ce qui entraîne que*

$$\mathrm{Ker}\,p^+ = \mathrm{Im}\,p^- \text{ et } \mathrm{Ker}\,p^- = \mathrm{Im}\,p^+\,;$$

si bien que l'un des projecteurs est orthogonal si et seulement si l'autre l'est.
SymOrth$_2$ ⇔ *SymOrth*$_3$ *Il sufit de remarquer que*

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) = \mathrm{Ker}\,p^+ \text{ et } \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s) = \mathrm{Ker}\,p^-1 = \mathrm{Im}^+\,.$$

SymOrth$_1 \Rightarrow$ *SymOrth*$_2$

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+s) \times \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-s), & s(x)+x+0 & \wedge & s(y)-y=0 \\ \Rightarrow & \langle x \mid y \rangle & = & \langle s(x) \mid s(y) \rangle \\ \Rightarrow & \langle x \mid y \rangle & = & -\langle x \mid y \rangle \\ \Rightarrow & \langle x \mid y \rangle & = & 0 \\ \Rightarrow & \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+s) & \perp & \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-s)\ . \end{array}$$

SymOrth$_2 \Rightarrow$ *SymOrth*$_1$ *repose sur les mêmes arguments que ci-dessus.*
SymOrth$_1 \Leftrightarrow$ *SymOrth*$_5$ *D'après ,*

$$s \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow s \circ s^* = \mathrm{Id}\ .$$

Par ailleurs

$$s \circ s = \mathrm{Id}\ .$$

Ces deux égalités équivalent à

$$s = s^*\ .$$

Exercice III.11.2.3 (Propriétés de l'orthogonal) Faire la preuve de la proposition III.8.6.

Solution

i *est immédiat.*
ii

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in T^{\perp,\phi} \times S, & x & \in & T \\ \Rightarrow & \phi(x,y) & = & 0 \\ \Rightarrow & y \in S^{\perp} & & \\ \Rightarrow & T^{\perp} & \subset & S^{\perp}\ . \end{array}$$

Est une conséquence immédiate du fait que $\operatorname{Ker}\phi = E^{\perp,\phi}$ *et du point ii.*
iii *Puisque* $\forall x \in E,\ \phi(x,0) = 0, 0 \in S^{\perp,\phi}$ *; si bien que* $S^{\perp} \neq \emptyset$*. De plus :*

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y,z,a,b) \in S^{\perp} \times S^{\perp} \times S \times \mathbb{K} \times \mathbb{K},\ \phi(ax+by,z) & = & a\phi(x,z)+b\phi(y,z) & \\ & & = & 0 \\ \Rightarrow & ax+by & \in & S^{\perp}\ ; \end{array}$$

ce qui assure que $S^{\perp}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*
Puisque $S \subset \operatorname{Vect}\{S\}$*, il résulte du point ii que* $\operatorname{Vect}\{S\}^{\perp,\phi} \subset S^{\perp,\phi}$*.*
Réciproquement :

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in S^{\perp} \times \operatorname{Vect}\{S\},\quad \exists\Big((y_i)_{1 \le i \le n}, (a_i)_{1 \le i \le n}\Big) \in S^n \times \mathbb{K}^n, & y & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \\ \Rightarrow & \phi(x,y) & = & \phi(x, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i y_i) \\ & & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \phi(x,y_i) \\ & & = & 0 \\ \Rightarrow & x & \in & \operatorname{Vect}\{S\}^{\perp} \\ \Rightarrow & S^{\perp} & \subset & \operatorname{Vect}\{S\}^{\perp}\ . \end{array}$$

iv

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in E, & x & \in & S \cup T^{\perp,\phi} \\ \Leftrightarrow & \forall y \in S \cup T,\ \phi(x,y) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \forall y \in S,\ \phi(x,y)=0 & \wedge & \forall y \in T,\ \phi(x,y)=0 \\ \Leftrightarrow & x \in S^{\perp} & \wedge & x \in T^{\perp} \\ \Leftrightarrow & x & \in & S^{\perp} \cap T^{\perp}\ ; \end{array}$$

si bien que

$$S \cup T^{\perp,\phi} = S^{\perp,\phi} \cap T^{\perp,\phi}\ .$$

Dans le cas où S *et* T *sont des sous-espaces vectoriels de* E*,* $S + T = \operatorname{Vect}\{S \cup T\}$ *et il découle donc du point iii que*

$$S + T^{\perp,\phi} = S^{\perp,\phi} \cap T^{\perp,\phi}\ .$$

Exercice III.11.2.4 (Somme directe orthogonale) Soit E un espace quadratique défini

1) $F_1, \ldots, F_n$ **des sous-espaces vectoriels tels que pour** $i \neq j$, $F_i \perp F_j$.

Montrer que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

Solution

Notons ϕ la forme polaire associée à la forme quadratique q de E. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que $\sum_i x_i = 0$. On a alors pour tout $j \in 1, \ldots, n$:

$$0 = \phi\left(\sum x_i, x_j\right) = \sum_i \phi(x_i, x_j) = \phi(x_j, x_j) = q(x_j).$$

En effet, $\phi(x_i, x_j) = 0$ sitôt que $i \neq j$, puisque F_i et F_j sont orthogonaux.

Par hypothèse, la forme q est définie et l'on a donc $q(x_j) = 0 \implies x_j = 0$. Ceci étant vrai quel que soit j, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est donc directe.

2) **Soit** $S \subset E$ **tel que** $0 \notin S$ **et** $\forall (s,t) \in S \times S,\ s \neq t \Rightarrow \phi(s,t) = 0$.

a) Montrer que S est une *partie libre* de E.

b) En déduire que si $S \subset E$ est une partie orthonormale de E, S est une *partie libre* .

III.11.3 . −Arithmétique des polynômes

Soit $(A, +, *)$ **un anneau commutatif dont on note** 0 **l'*élément neutre* pour** $+$ **et** 1 **l'*élément neutre* pour** $*$**. On note** $A^{\mathbb{N}}$ **l'ensemble des suites à valeurs dans** A **ou encore de manière équivalente l'ensemble des applications de** $\mathbb{N}$ **dans** A**. Pour tout** $a \in A^{\mathbb{N}}$**, on note** a_n **le** $n^{\text{ième}}$ **terme de** a ***i.e.*** **la valeur de** a **en** $n \in \mathbb{N}$.

Exercice III.11.3.1 (Valuation) **1)** Rappeler ce que signifie que l'anneau A est intègre.

Solution

$$\forall (a,b) \in A \times A,\ a * b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

ou de manière équivalente que $\{0\}$ est un idéal premier.

On suppose, dans toute la suite que $(A, +, *)$ **est intègre.**

2) Pour tout $a \in A^{\mathbb{N}}$, $a \neq \zeta$, montrer qu'il existe un plus petit entier $v \in \mathbb{N}$ tel que $a_v \neq 0$.

Solution

Puisque $a \neq \zeta$, $V := \{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \neq 0\}$ est non vide et possède donc un plus petit élément v.

On notera désormais $\mathrm{val}(a)$ **l'entier** v **qu'on appellera la *valuation* de** a **et on adoptera les conventions suivantes :** $\mathrm{val}(\zeta) = (+\infty)$, $(+\infty) \leq (+\infty)$, $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n + (+\infty) = (+\infty) \text{ et } n < (+\infty)\ .$$

3) Montrer que

$$\forall (a,b) \in A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}},\ \mathrm{val}(a *_{A^{\mathbb{N}}} b) = \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)\ ;$$

Solution

Si $b = \zeta$, $a * b = \zeta$ d'où

$$\mathrm{val}(a * b) = (+\infty) = \mathrm{val}(a) + (+\infty) = \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)\ .$$

Si $a \neq \zeta$ et $b \neq \zeta$ pour tout $0 \leq n < \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)$,

$$(a *_{A^{\mathbb{N}}} b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k * b_{n-k}\ .$$

Or si $k < \mathrm{val}(a)$, $a_k = 0$, et donc $a_k * b_{n-k} = 0$. Si $k \geq \mathrm{val}(a)$, $n - k \leq n - \mathrm{val}(a) < \mathrm{val}(b)$ si bien que $b_{n-k} = 0$. Il s'ensuit que

$$\forall 0 \leq n < \mathrm{val}(a) + \mathrm{val}(b)\ ,\ (a * b)_n = 0$$

ce qui entraîne, par définition même de $\mathrm{val}(\cdot)$,

$$\mathrm{val}(a*b) \ \geq \ \mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b) \ .$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
(a*b)_{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)} &= \sum_{k=0}^{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)} a_k * b_{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{val}(a)-1} a_k * b_{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)-k} + a_{\mathrm{val}(a)} * b_{\mathrm{val}(b)} + \sum_{k=\mathrm{val}(a)+1}^{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)} a_k * b_{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)-k} \\
&= a_{\mathrm{val}(a)} * b_{\mathrm{val}(b)} + \sum_{k=0}^{\mathrm{val}(b)-1} a_{\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(b)-k} * b_k \\
&= a_{\mathrm{val}(a)} * b_{\mathrm{val}(b)} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

si bien que

$$\mathrm{val}(a *_{A^{\mathbb{N}}} b) \ = \ \mathrm{val}(a) \ + \ \mathrm{val}(b) \ .$$

4) En déduire que $(A^{\mathbb{N}}, +_{A^{\mathbb{N}}}, *_{A^{\mathbb{N}}})$ est un anneau intègre.

Solution

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (a,b) \in A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}, & a *_{A^{\mathbb{N}}} b & = & \zeta \\
\Rightarrow & \mathrm{val}(a *_{A^{\mathbb{N}}} b) & = & (+\infty) \\
\Rightarrow & \mathrm{val}(a) \ = \ (+\infty) & \vee & \mathrm{val}(b) \ = \ (+\infty) \\
\Rightarrow & a \ = \ \zeta & \vee & b \ = \ \zeta \ .
\end{array}$$

5) Montrer que

$$\forall (a,b) \in A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}, \ \mathrm{val}(a +_{A^{\mathbb{N}}} b) \ \geq \ \min(\mathrm{val}(a), \mathrm{val}(b))$$

avec égalité si $\mathrm{val}(a) \neq \mathrm{val}(b)$.

Solution

Si $a = \zeta$, $a+b \ = \ b$ *si bien que*

$$\mathrm{val}(a+b) \ = \ \mathrm{val}(b) \ = \ \min(\mathrm{val}(b), (+\infty)) \ .$$

Si $a \neq \zeta$ *et* $b \neq \zeta$, *pour tout* $0 \leq n < \min(\mathrm{val}(a), \mathrm{val}(b))$, $n < \mathrm{val}(a) \ \Rightarrow \ a_n = 0$, $n < \mathrm{val}(b) \ \Rightarrow \ b_n = 0$ *si bien que* $(a +_{A^{\mathbb{N}}} b)_n \ = \ a_n + b_n \ = \ 0$. *Il s'ensuit donc que*

$$\mathrm{val}(a +_{A^{\mathbb{N}}} b) \ \geq \ \min(\mathrm{val}(a), \mathrm{val}(b)) \ .$$

6) Montrer que

$$\mathfrak{m} \ := \ \{a \ \in \ A^{\mathbb{N}} \ ; \ \mathrm{val}(a) > 0\}$$

est un idéal de $A^{\mathbb{N}}$ dont on donnera une autre caractérisation.

Solution

Tout d'abord $\zeta \in \mathfrak{m}$ *puisque* $\mathrm{val}(\zeta) \ = \ (+\infty) > 0$. *On a donc* $\mathfrak{m} \ \neq \ \emptyset$. *Par ailleurs,*

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (x,y) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}, & & & \\
\forall (a,b) \in A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}, & \mathrm{val}(a *_{A^{\mathbb{N}}} x +_{A^{\mathbb{N}}} b *_{A^{\mathbb{N}}} y) & \geq & \min(\mathrm{val}(a *_{A^{\mathbb{N}}} x), \mathrm{val}(b *_{A^{\mathbb{N}}} y)) \\
& & \geq & \min(\mathrm{val}(a)+\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(b)+\mathrm{val}(y)) \\
& & > & 0
\end{array}$$

c'est-à-dire que

$$a *_{A^{\mathbb{N}}} x \ +_{A^{\mathbb{N}}} \ b *_{A^{\mathbb{N}}} y \ \in \ \mathfrak{m} \ .$$

On peut aussi caractériser $\mathfrak{m}$ *comme l'ensemble des éléments* $a \ \in \ A^{\mathbb{N}}$ *tels que* $a_0 \ = \ 0$.

Exercice III.11.3.2 (degré) On suppose encore dans cette question que A est un anneau intègre.

1) Montrer que, pour tout $a \in \mathcal{P}$, $a \neq \zeta$, il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$a_d \neq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ n > d \Rightarrow a_n = 0\ .$$

Solution

Si $a \neq \zeta$,

$$V := \{n \in \mathbb{N}\,;\, a_n \neq 0\} \neq \emptyset\ .$$

Si $a \in P$, *par hypotèse, il existe* $n \in \mathbb{N}$, *tel que* $V \subset [0;n]$. *Il en résulte que* V *admet un plus grand élément* d *qui répond à la question.*

On notera désormais $\deg(a)$ **l'entier** d **qu'on appellera le *degré* de** a **et on adoptera les conventions suivantes :** $\deg(\zeta) = (-\infty)$, $(-\infty) \leq (-\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n + (-\infty) = (-\infty) \text{ et } n > (-\infty)\ .$$

2) Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P},\ \deg(a *_{A^{\mathbb{N}}} b) = \deg(a) + \deg(b)\ .$$

Solution

Si $b = \zeta$, $a * b = \zeta$ *d'où*

$$\deg(a*b) = (-\infty) = \deg(a) + (-\infty) = \deg(a) + \deg(b)\ .$$

Si $a \neq \zeta$ *et* $b \neq \zeta$ *pour tout* $n > \deg(a) + \deg(b)$, $(a *_{A^{\mathbb{N}}} b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k * b_{n-k}$. *Or si* $k > \deg(a)$, $a_k = 0$, *et donc* $a_k * b_{n-k} = 0$. *Si* $k \leq \deg(a)$, $n - k \geq n - \deg(a) > \deg(b)$ *si bien que* $b_{n-k} = 0$. *Il s'ensuit que* $\forall n > \deg(a) + \deg(b)$, $(a*b)_n = 0$ *ce qui entraîne, par définition même de* $\deg(\cdot)$,

$$\deg(a*b) \leq \deg(a) + \deg(b)\ .$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
(a*b)_{\deg(a)+\deg(b)} &= \sum_{k=0}^{\deg(a)+\deg(b)} a_k * b_{\deg(a)+\deg(b)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\deg(a)-1} a_k * b_{\deg(a)+\deg(b)-k} \\
&\quad + a_{\deg(a)} * b_{\deg(b)} + \sum_{k=\deg(a)+1}^{\deg(a)+\deg(b)} a_k * b_{\deg(a)+\deg(b)-k} \\
&= a_{\deg(a)} * b_{\deg(b)} \\
&\neq 0\,;
\end{aligned}$$

si bien que

$$\deg(a *_{A^{\mathbb{N}}} b) = \deg(a) + \deg(b)\ .$$

3) Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P},\ \deg(a +_{A^{\mathbb{N}}} b) \leq \max(\deg(a), \deg(b))$$

avec égalité si $\deg(a) \neq \deg(b)$.

Solution

Si $a = \zeta$, $a + b = b$ *si bien que*

$$\deg(a+b) = \deg(b) = \max(\deg(b), (-\infty))\ .$$

Si $a \neq \zeta$ *et* $b \neq \zeta$, *pour tout* $n > \max(\deg(a), \deg(b))$, $n > \deg(a) \Rightarrow a_n = 0$, $n > \deg(b) \Rightarrow b_n = 0$ *si bien que*

$(a +_{A^{\mathbb{N}}} b)_n = a_n + b_n = 0$. *Il s'ensuit donc que*

$$\deg(a +_{A^{\mathbb{N}}} b) \leq \max(\deg(a), \deg(b)) .$$

4) En déduire que $(\mathcal{P}, +_{A^{\mathbb{N}}}, *_{A^{\mathbb{N}}})$ est un anneau commutatif intègre.

Solution

i) ***(Groupe abélien)***
Le point question 3 assure que $+_{A^{\mathbb{N}}}$ se restreint à $\mathcal{P}$ et est donc une loi interne sur $\mathcal{P}$. Elle reste bien entendu associative. L'élément neutre ζ appartient à $\mathcal{P}$ et reste donc un élément neutre . Il est immédiat de constater que si $a \in \mathcal{P}, -a \in \mathcal{P}$ si bien que tout élément de $\mathcal{P}$ ppossède un opposé. Enfin la loi $+_{A^{\mathbb{N}}}$ étant commutative sur $A^{\mathbb{N}}$ le reste sur $\mathcal{P}$. Ceci fait de $(\mathcal{P}, +_{A^{\mathbb{N}}})$ un groupe abélien.

ii) ***(Anneau commutatif)***
Le point question 2 assure que la loi $*_{A^{\mathbb{N}}}$ se restreint à $\mathcal{P}$. Elle reste associative, commutative, distributive sur $+_{A^{\mathbb{N}}}$ et l'élément neutre u appartient à $\mathcal{P}$ ce qui fait de $(\mathcal{P}, +_{A^{\mathbb{N}}}, *_{A^{\mathbb{N}}})$ un anneau commuttatif.

iii) ***(Intégrité)***
Pour tout $(a, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, a et b sont en particulier des éléments de $A^{\mathbb{N}}$ et si $a *_{A^{\mathbb{N}}} b = z$ on a vu à la question 4 de l'exercice III.11.3.1 que $a = z$ ou $b = z$ ce qui assure que $\mathcal{P}$ est intègre.

5) Montrer que

$$\mathfrak{m}_0 := \mathcal{P} \cap \mathfrak{m}$$

est un idéal de $\mathcal{P}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $A^{\mathbb{N}}$ défini à la question 6 de l'exercice III.11.3.1 .)

Solution

Tout d'abord $z \in \mathcal{P}$ et $z \in \mathfrak{m}$ donc

$$z \in \mathfrak{m}_0 \Rightarrow \mathfrak{m}_0 \neq \emptyset .$$

Par ailleurs

$$\forall (x, y) \in \mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{m}_0,\ \forall (a, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P},\ a * x + b * y \in \mathcal{P}$$

d'après les points question 3 et question 2. De plus $ax + by \in \mathfrak{m}$ puisque $\mathfrak{m}$ est un idéal de $A^{\mathbb{N}}$. Il s'ensuit que

$$a * x + b * y \in \mathcal{P} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 .$$

6) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, si b divise a et $a \neq \zeta$, $\deg(b) \leq \deg(a)$

Solution

Si $b|a$, il existe $c \in \mathcal{P}$ tel que $a = b * c$. Il résulte alors du point question 2 que $\deg(a) = \deg(b) + \deg(c)$. Or si $a \neq z, c \neq z$ si bien que $\deg(a)$, $\deg(b)$ et $\deg(c)$ sont des entiers naturels ce qui assure le résultat.

7) Montrer que l'image du morphisme i (cf. cours III.6.1.7.1,) est contenue dans $\mathcal{P}$ et que i est donc un morphisme injectif d'anneaux de A dans $\mathcal{P}$. Caractériser les éléments de $\operatorname{Im} i$ par leur degré.

Solution

Pour tout $a \in A$, il est clair que $i(a) \in \mathcal{P}$ et même que $\deg(i(a)) = 0$. Réciproquement si $a \in \mathcal{P}$ avec $\deg(a) = 0$, on a $i(a_0) = a$. Il s'ensuit que

$$\operatorname{Im} i = \{a \in \mathcal{P}\ ;\ \deg(a) = 0\} .$$

Les lois $+_{A^{\mathbb{N}}}$ et $*_{A^{\mathbb{N}}}$ sur $\mathcal{P}$ étant données par celles de $A^{\mathbb{N}}$ ainsi que les élément neutre s z et u, i reste un morphisme injectif d'anneaux à valeurs dans $\mathcal{P}$.

8) Montrer que la restriction $i^{\times} := i_{|A^{\times}}$ de i à l'*ensemble des éléments inversibles* $A^{\times}$ de A est un *morphisme de groupes bijectif* de $(A^{\times}, *)$ dans $(\mathcal{P}^{\times}, *_{A^{\mathbb{N}}})$
Indication : *on pourra penser à caractériser les éléments de $\mathcal{P}^{\times}$ en termes de degré.*

Solution

i) ***(Groupes des inversibles)***
Rappelons d'abord que, pour tout anneau $(R, +, *)$ l'ensemble $R^\times$ est un groupe pour la loi $*$. En effet si $(r, s) \in R^\times \times R^\times$, il existe $(t, u) \in R \times R$ tels que $r * t = t * r = 1$ et $s * u = u * s = 1$.Il s'ensuit que $r * s * u * t = 1$ et $u * t * r * s = 1$ si bien que $r * s \in R^\times$. Ainsi la loi $*$ se restreint à $R^\times$ en une loi interne.
L'élément neutre 1 pour $*$ étant son propre inverse, appartient bien entendu à $R^\times$ et est un élément neutre pour $*$ restreinte à $R^\times$.
Enfin si $r \in R^\times$, r possède, par définition un inverse s dans R. Puisque r est aussi l'inverse de s $s \in R^\times$, si bien que r possède un inverse dans $R^\times$.

ii) *($\operatorname{Im} i^\times \subset \mathcal{P}^\times$)*
POur tout $a \in A^\times$, il existe $b \in A^\times$ tel que $a * b = b * a = 1$. Il s'ensuit que

$$i(a * b) = i(b * a) = i(1) \Rightarrow i(a) *_{A^\mathbb{N}} i(b) = i(b) *_{A^\mathbb{N}} i(a) = u$$

c'est-à-dire que $i^\times(a) = i(a) \in \mathcal{P}^\times$.

iii) ***($i^\times$ est un morphisme)***

$$\forall (a, b) \in A^\times \times A^\times,\ i^\times(a * b) = i(a * b) = i(a) *_{A^\mathbb{N}} i(b) = i^\times(a) *_{A^\mathbb{N}} i^\times(b)$$

du fait que i est un morphisme d'anneaux . Il s'ensuit que

$$i^\times : (A^\times, *) \to (\mathcal{P}^\times, *_{A^\mathbb{N}})$$

est un morphisme de groupes .

iv) ***(Bijectivité de $i^\times$)***
L'application $i^\times$ étant la restriction d'une application injective est encore injective.
Pour tout $a \in \mathcal{P}^\times$, il existe $b \in \mathcal{P}^\times$ tel que $a *_{A^\mathbb{N}} b = u$. Il en résulte que

$$\deg(a) + degb = \deg(u) = 0$$

ce qui entrraîne

$$\deg(a) = degb = 0\,.$$

On a vu à la question 7 que cela signifie que $a \in \operatorname{Im} i$ et $b \in \operatorname{Im} i$. Dans ce cas on a nécessairement

$$a = i(a_0) \text{ et } b = i(b_0)\,.$$

Il s'ensuit que

$$a * b = u \Rightarrow i(a_0) *_{A^\mathbb{N}} i(b_0) = i(1) \Rightarrow i(a_0 * b_0) = i(1) \Rightarrow a_0 * b_0 = 1$$

la dernière implication provenant du fait que i est un morphisme injectif. Il en résulte que $a_0 \in A^\times$ ce qui assure la surjectivité de $i^\times$.

Exercice III.11.3.3 (Théorème chinois des restes dans $\mathbb{K}[X]$) Dans tout cet exercice, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$.

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on notera Q mod P la *classe de Q modulo P* c'est-à-dire l'ensemble des $Q' \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P|Q' - Q$ et

$$\mathbb{K}[X]/P = \{Q' \,\mathbf{mod}\, P\,,\ Q' \in \mathbb{K}[X]\}\,.$$

1) Montrer que $\mathbb{K}[X]/P$ est en fait l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$ de $\mathbb{K}[X]$ par l'idéal engendré par P.

Solution

Il suffit de remarquer que

$$\forall Q' \in \mathbb{K}[X],\ Q' \in Q \,\mathrm{mod}\, P \Leftrightarrow Q' - Q \in P\mathbb{K}[X]\,.$$

2) Montrer que si P_1 et P_2 sont deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$, leur **Ppcm** est leur produit.

Solution

Lemme de GAUSS*name]Gauss@*GAUSS *(cf. III.6.5.2.3.)*

Pour tout couple $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]$, **on notera** $\mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2$ **l'ensemble des couples** (α_1, α_2) $\alpha_1 \in \mathbb{K}[X]/P_1$ $\alpha_2 \in \mathbb{K}[X]/P_2$, **muni des lois :**

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) & := & (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \\ (\alpha_1, \alpha_2) * (\beta_1, \beta_2) & := & (\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2) \, . \end{array}$$

3) **a)** Pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, montrer que $\mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2$ est un anneau dont on déterminera l'unité et l'*élément neutre* pour $+$.

Solution

(cf. la proposition III.5.13.)

b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2 \\ & Q & \mapsto & (Q \bmod P_1, Q \bmod P_2) \end{array}$$

est un *morphisme d'anneaux* .

Solution

(cf. la proposition III.5.13.)

c) Déterminer le noyau K de ϕ puis en déduire qu'il existe un *morphisme d'anneaux* injectif

$$\gamma \ : \ \mathbb{K}[X]/K \ \to \ \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2 \ \text{ tel que } \ \phi \ = \ \gamma \ \circ \ \pi$$

où π est la *surjection canonique* $\mathbb{K}[X] \ \to \ \mathbb{K}[X]/K$.

Solution

$$\begin{array}{lrcl} \forall q \in \mathbb{K}[X], & Q & \in & \operatorname{Ker} \phi \\ \Leftrightarrow & Q \bmod P_1 \ = \ 0 & \text{et} & Q \bmod P_2 \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow & Q & \in & P_1\mathbb{K}[X] \cap P_2\mathbb{K}[X] \\ \Leftrightarrow & \operatorname{Ker} \phi & = & P_1\mathbb{K}[X] \cap P_2\mathbb{K}[X] \, . \end{array}$$

Le morphisme ϕ se factorise donc en

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & & \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & \searrow \phi & \\ \mathbb{K}[X]/K & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2 \, ; \end{array}$$

(cf. la définition III.5.5.)

d) Si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, montrer que ϕ est surjectif ; en déduire, dans ce cas, que γ est un isomorphisme ; décrire K plus précisément.

Solution

Pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}[X]/P_1 \times \mathbb{K}[X]/P_2$, soit

$$(Q_1, Q_2) \ \in \ \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \ \textit{ tel que } \ \alpha_1 \ = \ Q_1 \bmod P_1 \text{ et } \alpha_2 \ = \ Q_2 \bmod P_2 \, .$$

Puisque P_1 et P_2 sont premiers entre eux, il existe (cf. III.6.5.2.1,)

$$(U_1, U_2) \ \in \ \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \ \textit{ tel que } \ U_1 P_1 + U_2 P_2 \ = \ 1 \, .$$

Ceci se réécrit

$$U_{3-i} P_{3-i} \bmod P_i \ = \ 1 \bmod P_i \text{ et } U_{3-i} P_{3-i} \bmod P_{-i} \ = \ 0 \bmod P_{3-i} \, .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcccl} Q_2 U_1 P_1 + Q_1 U_2 P_2 \bmod P_1 & = & Q_1 \bmod P_1 & = & \alpha_1 \\ Q_2 U_1 P_1 + Q_1 U_2 P_2 \bmod P_2 & = & Q_2 \bmod P_2 & = & \alpha_2 \, ; \end{array}$$

si bien que $Q_2 U_1 P_1 + Q_1 U_2 P82$ est un antécédent de (α_1, α_2) par ϕ.
Le morphisme ϕ est alors surjectif, ce qui entraîne que γ l'est, si bien que γ est un isomorphisme.
Le noyau K de γ est alors égale à

$$(P_1, P_2 \vee\ ) = \ P_1 P_2 \, .$$

4) Soient a et b deux éléments distincts de k et P un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ si le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ (resp. $X-b$,) vaut 1.

Solution

Les hypothèses équivalent en fait au système de congruence :

$$\left\{\begin{matrix} P & \equiv & 1\,[(X-a)] \\ P & \equiv & 1\,[(X-b)] \end{matrix}\right\} .$$

Puisque $(X-a)$ et $(X-b)$ sont premiers entre eux

$$\left(\frac{1}{b-a}[(X-a)-(X-b)] \;=\; 1\right)$$

le théorème chinois des restes assure que l'ensemble des solutions de ce système est une classe de congruence modulo

$$((X-a),(X-b)\vee\,) = \;(X-a)(X-b)\;.$$

En utilisant les notations de l'exercice, les hypothèses se réécrivent également

$$\phi(P) \;=\; (1,1) \;=\; 1_{\mathbb{K}[X]/(X-a)\times\mathbb{K}[X]/(Xb)}\;.$$

Or γ étant un morphisme d'anneaux ,

$$\gamma^{-1}(\phi(P)) \;=\; \gamma^{-1}(1) \;=\; 1_{\mathbb{K}[X]/(X-a)(X-b)}$$

ce qui équivaut encore à $\pi(P) \;=\; 1$, ou encore

$$P \;\equiv\; 1\,[(X-a)(X-b)]$$

i.e. le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ est 1.

Exercice III.11.3.4 (Idéaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$) **1)** Montrer qu'une partie $\mathfrak{I}\subset\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ si et seulement si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $(\mathbb{Z},+,*)$.

Solution

Supposons que $\mathfrak{I}$ soit un idéal. Il est donc par définition stable par addition. De plus, pour tout $a\in\mathfrak{I}$, on a $-a = (-1)\cdot a\in\mathfrak{I}$. Le sous-ensemble $\mathfrak{I}$ est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.
Réciproquement, supposons que $\mathfrak{I}$ soit un sous-groupe (additif). Il est par définition stable par addition et opposition ($a\mapsto -a$). De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathfrak{I}$, on a $nb = \sum_{i=1}^{n} b\in\mathfrak{I}$. Enfin, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $n<0$, on a $na = -(-n)a\in\mathfrak{I}$. Le sous-ensemble $\mathfrak{I}$ est donc un idéal.

2) Montrer qu'un idéal $\mathfrak{I}\subset\mathbb{Z}$ non nul de $\mathbb{Z}$, possède un plus petit élément $d\in\mathbb{N}^*$; puis que

$$\mathfrak{I} \;=\; d\mathbb{Z} \;=\; \{dz\;,\; z\in\mathbb{Z}\}\;.$$

Solution

Comme $\mathfrak{I}$ est non-nul, le sous-ensemble $\mathfrak{I}\cap\mathbb{Z}^*$ de $\mathbb{Z}$ n'est pas vide. Il admet donc un plus petit élément que l'on note d. Soit $a\in\mathfrak{I}$. La division euclidienne de a par d s'écrit $a = dq + r$, où $q, r\in\mathbb{Z}$ et $0\le r<d$. Puisque $\mathfrak{I}$ est un idéal contenant d, on a $dq\in\mathfrak{I}$, puis $r = a - dq\in\mathfrak{I}$. Par minimalité de d, le reste r ne peut qu'être nul : $r=0$. On a donc $a = qd\in d\mathbb{Z}$. Réciproquement, il est clair que $d\mathbb{Z}\subset\mathfrak{I}$.

3) **a)** Vérifier que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K}$ est un anneau (on pourra donner explicitement la somme et le produit de deux polynômes en fonction de leurs coefficients.)

b) Tout sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$ est-il un idéal de $\mathbb{K}[X]$?

Solution

Non. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}[X]$ des polynômes constants est un sous-groupe additif mais n'est pas un idéal (par exemple, il ne contient pas $X.1 = X$).

c) Déterminer les idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Solution

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal non-nul de $\mathbb{K}[X]$. Le sous-ensemble $\{\deg(P), P \in \mathfrak{I} \smallsetminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}$ est alors non-vide et il admet donc un plus petit élément n. On choisit un polynôme P de $\mathfrak{I}$ de degré n. Pour tout polynôme S dans $\mathfrak{I}$, une division euclidienne S par P s'écrit $S = PQ + R$, où $R, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg(P) = n$. Comme $\mathfrak{I}$ est un idéal contenant P et S, on a $R = S - PQ \in \mathfrak{I}$. Par minimalité de $n \in \mathbb{N}$, le degré de R ne peut être que $-\infty$ et R est donc le polynôme nul. Ainsi $S = PQ \in P\mathbb{K}[X]$.
Réciproquement, on a $P\mathbb{K}[X] \subset \mathfrak{I}$ et donc $\mathfrak{I} = P\mathbb{K}[X]$. Ainsi, tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ (dans le cas de l'idéal nul, on prendra $P = 0$).

d) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{K}[X]$ sont-ils des idéaux :

—
$$E_0 \;:=\; \{P \,\in\, \mathbb{K}[X]\,;\; P(0) \;=\; 0\}\,;$$

—
$$\forall a \in \mathbb{K},\; a \;\neq\; 0\,,\; E_a \;:=\; \{P \,\in\, \mathbb{K}[X]\,;\; P(0) \;=\; a\}\,;$$

—
$$E_0' \;:=\; \{P \,\in\, \mathbb{K}[X]\,;\; P'(0) \;=\; 0\}\;?$$

Solution

Considérons l'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ associant à chaque polynôme son coefficient constant $P \mapsto P(0)$. On vérifie facilement qu'il s'agit d'un morphisme d'anneaux . Son noyau (qui coïncide avec E_0), est donc un idéal.
Soient $P, Q \in E_a$. On a $(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = a + a = 2a \neq a$ (on a supposé $a \neq 0$). En particulier, E_a n'est pas stable par addition et n'est donc pas un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Soit enfin $b \in \mathbb{K}^\times$. Le polynôme constant $P(X) = b$ est de dérivée nulle et appartient donc à E_0'. En revanche, le polynôme $XP(X) = bX$ est de dérivée $b \neq 0$ en 0 et $XP(X) \notin E_0'$. Le sous-ensemble $E_0' \subset \mathbb{K}[X]$ n'est donc pas un idéal.

Exercice III.11.3.5 (Éléments associés) Faire la démonstration du lemme III.4.13.

Exercice III.11.3.6 (Le $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* $\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$) Soient $\mathbb{K}$ un *corps* , $P \in \mathbb{K}[X]$ un *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ et

$$\pi \;:\; \mathbb{K}[X] \;\to\; \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X] \text{ \textbf{la} \textit{surjection canonique}} \;.$$

Montrer que :

1) $\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* ;

Solution

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est au moins un groupe abélien et l'idéal $P\mathbb{K}[X]$ un sous-groupe si bien que le morphisme $\pi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$ est au moins un morphisme de groupes (cf. III.5,) C'est cependant également un morphisme d'anneaux .
La loi externe sur $\mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$ est donnée par

$$\forall (a, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X],\; a \cdot Q \bmod P \;=\; aQ \bmod P\,;$$

2)

$$\big(\pi(1), \pi(X), \ldots, \pi(X^{\deg(P)-1})\big) \text{ en est une base}\,;$$

Solution

Notons $E := \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]$. Pour tout $\alpha \in E$, il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\alpha = \pi(Q)$. Or en effectuant la division euclidienne de Q par P, on prouve l'existence de $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi(R) \;=\; \alpha \text{ et } \deg(R) \;<\; \deg(P)\,.$$

Ceci prouve que l'ensemble

$$\{\pi(1), \ldots, \pi(X^{\deg(P)-1})\} \;=\; \{1 \bmod P, \ldots, X^{\deg(P)-1} \bmod\}$$

est générateur du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Pour $(a_i)_{0\,\leq\, i\,\leq\,\deg(P)-1}\ \in\ \mathbb{K}$, *des éléments de* $\mathbb{K}$,

$$\sum_{i=0}^{\deg(P)-1} a_i X^i \,\textit{mod}\, P \ =\ 0,$$

si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{\deg(P)-1} a_i X^i \ \in\ \operatorname{Ker}\pi$$

si et seulement si

$$P|\sum_{i=0}^{\deg(P)-1} a_i X^i$$

ce qui entraîne

$$\forall 0 \leq i \leq \deg(P)-1,\ a_i\ =\ 0$$

et assure que $\{1 \,\textit{mod}\, P, \ldots, X^{\deg(P)-1} \,\textit{mod}\, P\}$ *est une partie libre du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

3)

par conséquent $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]/P\mathbb{K}[X]\ =\ \deg(P)$.

III.11.4 . −Réduction

Exercice III.11.4.1 (Caractérisation des projecteurs) Étant donné un endomorphisme $p\ \in\ \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$,

montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

Proj$_1$) $p\ \circ\ p\ =\ p$.

Proj$_2$) $E\ =\ \operatorname{Ker} p\ \oplus\ \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E - p$.

Proj$_3$) $E\ =\ \operatorname{Ker} p\ \oplus\ \operatorname{Im} p$ et $p_{|\operatorname{Im} p}\ =\ \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} p}$.

Proj$_4$) Si E est de dimension finie n, il existe des entiers r et s, avec $r + s\ =\ n$ et une base de E dans laquelle la matrice de p est, par blocs, $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_s \end{pmatrix}$.

Si p satisfait les conditions équivalentes ci-dessus, on dit que p et un *projecteur* .

Exercice III.11.4.2 (Caractérisation des symétries) Étant donné un endomorphisme $s\ \in\ \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$,**.**

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

Sym$_1$) $s\ \circ\ s\ =\ \operatorname{Id}_E$.

Sym$_2$) $p^+\ :=\ \frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E + s)$ est un projecteur.

Sym$_3$) $p^-\ :=\ \frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E - s)$ et un projecteur.

Sym$_4$) $E\ =\ \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + s)\ \oplus\ \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - s)$.

Sym$_5$) Si E est de dimension finie n, il existe des entiers r et s, avec $r + s\ =\ n$ et une base de E dans laquelle la matrice de s est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$.

On dit alors que s et une *symétrie* ou une *involution linéaire*.

Solution

Sym$_1 \Leftrightarrow$ *Sym*$_2$ $\frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E + s)$ *est un projecteur si et seulement si*

$$\begin{array}{lccc} & \left(\frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E + s)\right)^2 & = & \frac{1}{2}(\operatorname{Id}_E + s) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\operatorname{Id}_E + 2s^2) & = & \frac{1}{2}(Id + s) & \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}s^2 & = & \frac{1}{2}(s - s + \operatorname{Id}_E - \frac{1}{2}\operatorname{Id}_E) \\ \Leftrightarrow & s^2 & = & \operatorname{Id}_E\ . \end{array}$$

Sym$_1 \Leftrightarrow$ *Sym*$_3$ *Se montre exactement de la même manière que ci-dessus.*
Sym$_1 \Rightarrow$ *Sym*$_4$

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in E, \quad p^+(x) + p^-(x) & = & \frac{1}{2}(x + (s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)) \\ & = & x\ . \end{array}$$

On a donc

$$p^+ + p^- = \mathrm{Id}_E. \qquad \text{III.11.4.2.6}$$

Come on a déjà montré les équivalences Sym$_1 \Leftrightarrow$ *Sym*$_2$ *et Sym*$_1 \Leftrightarrow$ *Sym*$_3$*, on sait que* p^+ *et* p^- *sont des projecteurs. Il s'ensuit que*

$$E = \mathrm{Im}\, p^+ \oplus \mathrm{Im}\, p^- = \mathrm{Ker}\, p^+ \oplus \mathrm{Ker}\, p^-\ .$$

Or

$$\mathrm{Ker}\, p^+ = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) \text{ et } \mathrm{Ker}\, p^- = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)\ .$$

Sym$_4 \Rightarrow$ *Sym*$_1$ *Pour tout* $x \in E$*, il existe un unique couple* $(y, z) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s) \times \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$ *tel que* $x = y + z$*. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} s^2(x) & = & s^2(y+z) \\ & = & s^2(y) + s^2(z) \\ & = & s(-y) + s(z) \\ & = & y + z \\ & = & x\ . \end{array}$$

Exercice III.11.4.3 (Déterminants par blocs) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**, on note** $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **la matrice identité. Dans la suite** p **et** q **sont dans** $\mathbb{N}^*$.

1) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})\ .$$

a) Calculer en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}) \text{ et } \det(\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix})\ .$$

Solution

Notons $A_q \in \mathcal{M}_{p+q}\mathbb{R}$ *la matrice* $A_q := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$*. Calculons* $\det(A_q)$ *par récurrence sur* q*. Si* $q = 0$*, alors* $A_q = A$ *et* $\det(A_q) = \det(A)$*. Soit maintenant* $q \geq 0$ *et supposons* $\det(A_q) = \det(A)$*. En developpant le déterminant* $\det(A_{q+1})$ *par rapport à la dernière ligne, on obtient* $\det(A_{q+1}) = \det(A_q) = \det(A)$*, et on conclue. Le cas de* $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *est similaire.*

b) En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.
Indication : *Utiliser la multiplicativité du déterminant.*

Solution

On a

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) = \det(A)\det(B).$$

2) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})\ ,\ B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})\ .$$

a) Calculer $\det(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$.

Solution

On procède par récurrence sur l'entier q (et donc la largeur de C) la formule :

$$\det(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}) = \det(A).$$

L'initialisation est triviale et l'hérédité se prouve en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne.

b) Pour

$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}\mathbb{R},$$

calculer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

Solution

On utilise la multiplicativité du déterminant sur l'égalité

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}. \qquad \left(\textit{Attention :} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)$$

Exercice III.11.4.4 (AB **et** BA **ont même polynôme caractéristique) Soient** $\mathbb{K}$ **un corps,** $n \in \mathbb{N}$, **et** $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) (**Valeurs propres**)

a) Montrer que si X est un vecteur propre de AB pour une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $Y = BX \neq 0$.

Solution

Si X est un vecteur propre de AB, pour $\lambda \neq 0$, $X \neq 0$, et $ABX = \lambda X$. Or $\lambda X \neq 0$, donc $Y := BX \neq 0$.

b) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Indication : *Pour $\lambda = 0$, on pourra se servir du déterminant.*

Solution

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$, et X un vecteur propre associé à λ. Il résulte du point a que $Y := BX \neq 0$. Or $BAY = BABX = B\lambda X = \lambda BX = \lambda Y$; si bien que Y est un vecteur propre associé à λ pour BA. Il s'ensuite donc que $\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$. Puisque A et B jouent des rôles identiques, en les échangeant on obtient $\mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\}$; et finalement $\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$.

0 est valeur propre de AB si et seulement si AB nes par injective si et seulement si $0 = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$; si seulement si BA n'est pa s injective i et seulement si 0 est valeur propre de BA.

Il résulte finalement de ce qui précède que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

2) Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même *polynôme caractéristique* .

Solution

Supposons que A est inversible et notons $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice identité. Le polynôme caractéristique de AB est $\det\big(XI - AB\big) \in \mathbb{K}[X]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \det\big(XI - AB\big) &= \det(A)^{-1} \cdot \det\big(XI - AB\big) \cdot \det(A) \\ &= \det(A^{-1}) \cdot \det\big(XI - AB\big) \cdot \det(A) \\ &= \det\big(A^{-1}(XI - AB)A\big) \\ &= \det\big(A^{-1}XIA - A^{-1}ABA\big) \\ &= \det\big(XI - BA\big) ; \end{aligned}$$

qui est précisément le polynôme caractéristique de BA.

3) On ne supose plus nécessairement que A **ou** B **est inversible. On note** $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **la matrice identité et**

$$P := \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) ; Q := \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) ; R := \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) .$$

a) Vérifier que P est inversible.

Solution

Immédiat.

b) Vérifier que $QP = PR$.

Solution

$QP = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; *et* $PR = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Conclure.

Solution

Soit $J := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ *la matrice identité. On a alors, en calculant les déterminants par blocs,*

$$\det\bigl(XJ - Q\bigr) = X^n \det\bigl(XI - BA\bigr) \text{ et } \det\bigl(XJ - R\bigr) = X^n \det\bigl(XI - AB\bigr) .$$

Remarquons que $\det(P) = \det(P)^{-1} = \det(P^{-1}) = 1$. *Alors :*

$$\begin{aligned} X^n \det\bigl(XI - BA\bigr) &= \det\bigl(XJ - Q\bigr) \\ &= \det\bigl(XJ - Q\bigr)\det(P) \\ &= \det\bigl(XJP - QP\bigr) \\ &\underset{\textit{(cf. b)}}{=} \det\bigl(XJP - PR\bigr) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det\bigl(XJP - PR\bigr) \\ &= \det\bigl(XP^{-1}JP - R\bigr) \\ &= X^n \det\bigl(XI - AB\bigr) . \end{aligned}$$

Il en résulte que $\det\bigl(XI - AB\bigr) = \det\bigl(XI - BA\bigr)$.

Exercice III.11.4.5 (Polynômes caractéristiques de AA^* et A^*A) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ où p et q sont des *entiers naturels* tels que $p \leq q$.

Pour k et ℓ des *entiers naturels* on notera $0_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{C})$ la matrice nulle.

1) Montrer qu'il existe une matrice unitaire $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que P^*A^* s'écrive par blocs $P^*A^* = \begin{pmatrix} B^* \\ 0_{q-p,p} \end{pmatrix}$.

Solution

Puisque $r := \mathrm{rg}(A) \leq \min\{p, q\}$, *et* $p \leq q$, $r = \mathrm{rg}(A) \leq p$. *Comme* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$, *on a également* $r = \mathrm{rg}(A^*) \leq p$.

Considérons $A^* \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ *comme une application linéaire de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^p$ *dans* $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^q$. *Considérons alors le produit scalaire hermitien canonique sur* $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ *donné par* $\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{q} \overline{X} * Y$.

Soit alors $(P_k)_{1 \leq k \leq r} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ *une base orthonormée (cf. le théorème III.8.13,) de* $\mathrm{Im}(A^*)$ *et* $(P_k)_{r+1 \leq k \leq q} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ *une base orthonormée de* $\mathrm{Im}\, A^{*\perp}$.

- *La matrice* P *dont les collones sont les* $(P_k)_{1 \leq k \leq q}$ *est donc bien une matrice unitaire de* $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.
- *Les collonnes* $(C_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ *de* A^* *appartiennent à* $\mathrm{Im}\, A^*$.
- *Il s'ensuit que* $\forall r \leq k \leq q,\ \forall 1 \leq \ell \leq p,\ \langle P_k \mid C_\ell \rangle = 0$; *si bien que, comme* $r \leq p$, $\forall p+1 \leq k \leq q,\ \forall 1 \leq \ell \leq p,\ \langle P_k \mid C_\ell \rangle = 0$;
- *Il en résulte que les* $q - p$ *dernières lignes du produit matriciel* P^*A^* *sont nulles.*

2) En déduire que $\det\bigl(X\mathrm{Id}_p - AA^*\bigr) = \det\bigl(X\mathrm{Id}_p - BB^*\bigr)$.

Solution

Rappelons $AP = (AP)^{**} = (P^*A^*)^* = \begin{pmatrix} B^* \\ 0_{q-p,p} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B & 0_{p,q-p} \end{pmatrix}$ *; et que* $PP^* = \mathrm{Id}_q$ *.*

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \det\big(X\mathrm{Id}_p - AA^*\big) &= \det\big(X\mathrm{Id}_q - APP^*A^*\big) \\ &= \det\Big(X\mathrm{Id}_p - \begin{pmatrix} B & 0_{p,q-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^* \\ 0_{q-p,p} \end{pmatrix}\Big) \\ &= \det\big(X\mathrm{Id}_p - BB^*\big) . \end{aligned}$$

3) Montrer que $\det\big(X\mathrm{Id}_q - A^*A\big) = X^{q-p}\det\big(X\mathrm{Id}_p - B^*B\big)$.

Solution

Puisque $PP^* = \mathrm{Id}_q$,

$$\begin{aligned} \det\big(X\mathrm{Id}_q - A^*A\big) &= \det(P^*)\det\big(X\mathrm{Id}_q - A^*A\big)\det(P) \\ &= \det\big(P^*(X\mathrm{Id}_q - A^*A)P\big) \\ &= \det\big(X\mathrm{Id}_q - P^*A^*AP\big) \\ &= \det\Big(X\mathrm{Id}_q - \begin{pmatrix} B^* \\ 0_{q-p,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0_{p,q-p} \end{pmatrix}\Big) \\ &= \det\Big(X\mathrm{Id}_q - \begin{pmatrix} B^*B & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p} \end{pmatrix}\Big) \\ &= \det\Big(\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p - B^*B & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & X\mathrm{Id}_{q-p} \end{pmatrix}\Big) . \end{aligned}$$

On obtient le résultat en calculant le déterminant ci-dessus par blocs (cf. l'exercice III.11.4.3 .)

4) Montrer que $\det\big(X\mathrm{Id}_q - A^*A\big) = X^{q-p}\det\big(X\mathrm{Id}_p - AA^*\big)$.

Solution

Il suffit, en vertu de la question 2 et de la question 3 , de montrer que $\det\big(X\mathrm{Id}_p - BB^*\big) = \det\big(\mathrm{Id}_p - B^*B\big)$ *; ce qui résulte de l'exercice III.11.4.4 .*

5) Peut-on s'affranchir de l'hypothèse $p \leq q$?

Solution

Bien entendu si $q \leq p$*, i suffit de poser* $A' = A^*$ *et de lui appliquer les constructions précédentes.*

III.11.5 . –Endomorphismes autoadjoints

Exercice III.11.5.1 (Comparaison de valeurs propres) Soient $h \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, $\vec{x}_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur vect$(\vec{x}_0)$, et $f = h + p$.

On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$ celles de f.

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Exercice III.11.5.2 (Rayon spectral) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tq } \lambda \in \mathrm{Sp}(f^* \circ f)\}$.

Exercice III.11.5.3 Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de E.
Soient

$$x := x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \text{ et } y := y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

deux vecteurs de E.

Calculer $\langle x \mid y\rangle$ en fonction des coefficients x_i et y_i (pour $i \in \{1,2,3\}$).

2) On considère $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. On note λ sa plus petite valeur propre et λ' sa plus grande valeur propre.

Montrer que l'on a,

$$\forall x \in E,\ \lambda||x||^2 \ \leq \ \langle u(x) \mid x \rangle \ \leq \ \lambda'||x||^2 \ .$$

(On utilisera une base orthonormée convenable.)

3) Soit $v \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme quelconque.

a) Montrer que $u \ := \ \dfrac{1}{2}(v + v^*)$ est auto-adjoint.

b) Soient μ une valeur propre de v, λ la plus petite valeur propre de u et λ' la plus grande valeur propre de u. Montrer que $\lambda \leq \mu \leq \lambda'$.

III.11.6 . –Spectres de certains graphes

Exercice III.11.6.1 ($\mathbf{C}_4$) 1) (Matrice)

Donner la *matrice d'adjacence* du *cycle* $\mathbf{C}_4$.

Solution

$$\mathcal{A}(\mathbf{C}_4) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

2) (Spectre)

Déterminer le *spectre* du *cycle* $\mathbf{C}_4$.

Solution

On constate que $\mathcal{A}(\mathbf{C}_4)$ est de rang 2 ; si bien que 0 est une valeur propre de multiplicité $4 - 2 \ = \ 2$.

Puisque $\mathbf{C}_4$ est k-régulier (pour $k \ = \ 2$,), la proposition III.3.5 assure que 2 est une valeur propre simple de de $\mathbf{C}_4$. Il est presqu'aussi immédiat de constater que la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dont la somme des lignes est nulle n'est pas de rang 3 ; si bien que 2 est une valeur propre de $\mathbf{C}_4$.

Enfin $\mathrm{tr}(\mathcal{A}(\mathbf{C}_4)) \ = \ 0$ (ce qu'on a déjà noté au point iii de la remarque III.1.12 ;) si bien que la dernière valeur propre est -2.

On a donc finalement

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{C}_4) \ = \ \mathrm{Sp}(\Phi(\mathbf{C}_4)) \ = \ \mathrm{Sp}(\mathcal{A}(\mathbf{C}_4)) \ = \ \{-2, 0^{(2)}, 2\} \ .$$

On vérifiera ce résultat dans le cas général des cycles à l'exercice III.11.6.2 .

Exercice III.11.6.2 (Le cycle $\mathbf{C}_n$) Soit $n \ \in \ \mathbb{N}^*$ et $\Phi(\mathbf{C}_n)$ l'*endomorphisme d'adjacence* du *cycle* $\mathbf{C}_n$.

Pour tout $a \ \in \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on note $\alpha_a \ \in \ \mathbb{C}^{\mathbf{C}_n} \ = \ \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ défini par $\alpha_a(a) \ = \ 1$ et $\forall b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ b \ \neq \ a \ , \ \alpha_a(b) \ = \ 0$.

1) On note $\alpha \ := \displaystyle\sum_{a \ \in \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \alpha_a$.

a) Déterminer $\Phi(\mathbf{C}_n)(\alpha)$.

Solution

Rappelons (cf. la définition I.4.12,) que $\forall a \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ N_{\mathbf{C}_n}(a) = \{a-1, a+1\}$. *Il en résulte que*

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_n), \quad \Phi(\mathbf{C}_n)(\alpha)(a) &= \sum_{b \,\in\, N_{\mathbf{C}_n}(a)} \alpha(b) \\ &= \alpha(a-1)+\alpha(a+1) \\ &= \sum_{b \,\in\, \mathcal{V}(\mathbf{C}_n)} \alpha_b(a+1)+\alpha_b(a-1) \\ &= 2 \\ &= 2\alpha(a)\ .\end{aligned}$$

b) En déduire que 2 est *valeur propre* de $\Phi(\mathbf{C}_n)$ et donner un *vecteur propre* associé.

Solution

Le calcul ci-dessus montre que $\Phi(\mathbf{C}_n)(\alpha) = 2\alpha$; *c'est-à-dire que* α *est un vecteur propre de* $\Phi(\mathbf{C}_n)$ *associé à la valeur propre* 2.

On pourrait remarquer qu'on a ici établi un cas particulier de la proposition III.3.5.

On note $\zeta := e^{\dfrac{2i\pi}{n}}$.

2) Rappler comment on peut donner un sens à ζ^a pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solution

L'application $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto \zeta^k$ *est en fait un morphisme de groupes (cf. la définition II.8.2.1,)* $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{C}^*,*)$. *De plus son noyau (cf. le point i de la définition II.8.3.9,) est* $\operatorname{Ker}\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}\,;\, \zeta^k = 1\} = n\mathbb{Z}$. *Il existe donc (cf. la proposition II.8.11.4,) un unique morphisme de groupes* $\overline{\varepsilon} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *tel que* $\overline{\varepsilon} \circ \pi_n = \varepsilon$, *où* $\pi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est la surjection canonique qui à tout entier associe sa classe modulo* n.

Ce qui précède signifie que ζ^k *ne dépend pas de* $k \in \mathbb{Z}$; *mais uniquement de sa classe modulo* n.

3) Pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **on définit** $\beta_a \in \mathbb{C}^{\mathbf{C}_n}$ **par :**

$$\begin{array}{rrcl}\beta_a : & \mathcal{V}(\mathbf{C}_n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & b & \longmapsto & \zeta^{ab}\ .\end{array}$$

a) Calculer $\Phi(\mathbf{C}_n)(\beta_a)$.

Solution

$$\begin{aligned}\forall b \in \mathcal{V}(\mathbf{C}_n), \quad \Phi(\mathbf{C}_n)(\beta_a)(b) &= \sum_{c \,\in\, N_{\mathbf{C}_n}(b)} \beta_a(c) \\ &= \beta_a(b-1)+\beta_a(b+1) \\ &= \zeta^{a(b-1)}+\zeta^{a(b+1)} \\ &= (\zeta^{-a}+\zeta^{a})\zeta^{ab} \\ &= (\zeta^{-a}+\zeta^{a})\beta_a(b)\ .\end{aligned}$$

b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\lambda_a := \zeta^{-a}+\zeta^a = 2\mathrm{Re}(\zeta^a)$ est une *valeur propre* de $\Phi(\mathbf{C}_n)$ et donner une base de l'*espace propre* associé.

Solution

Le calcul précédent montre que pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\Phi(\mathbf{C}_n)(\beta_a) = \lambda_a\beta_a$; *c'est-à-dire que* β_a *est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ_a . *On constate bien que* $\lambda_a \in \mathbb{R}$ *(cf. .)*

Remarquons alors que pour tout $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\lambda_a = \lambda_{-a}$. *Si* $a \neq -a$, *On remarque également que* $\{\beta_a, \beta_{-a}\}$ *est une partie libre de l'espace propre* E_a *associé à la valeur propre* λ_a ; *si bien que* $\dim E_a \geq 2$.

On a évidemment $a = -a$, *pour* $a = 0$, *avec* $\lambda_0 = 2$. *Ce qui donne* $\dim E_0 \geq 1$.

Dans le cas où n *est impair,* 0 *est la seule valeur de* a *vérifiant* $a = -a$; *en revanche si* n *est pair,* $\frac{n}{2} \equiv -\frac{n}{2}\ [n]$.

Puisque les espaces propres sont toujours en somme directe on a :

Si n est impair

$$\begin{array}{rcl} n & & \\ geq & & \dim\Big(\bigoplus_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} E_{\overline{k}}\Big) \\ & \geq & \dim E_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \dim E_{\overline{k}} \\ & \geq & 1 + 2 * \frac{n-1}{2} \\ & \geq & n\ ; \end{array} \qquad 1$$

ce qui entraîne que $\dim E_0 \ = \ 1$ *et* $\forall 1 \leq k \leq \dfrac{n-1}{2},\ \dim E_{\overline{k}} \ = \ 2$. *Il en résulte donc que* $\{\beta_0\}$ *est une base de* E_0 *et que* $\forall 1 \leq k \leq \dfrac{n-1}{2},\ \{\beta_{\overline{k}}, \beta_{-\overline{k}}\}$ *est une base de* $E_{\overline{k}}$.

Si n est pair

$$\begin{array}{rcl} n & \geq & \dim\Big(\bigoplus_{k=0}^{\frac{n}{2}} E_{\overline{k}}\Big) \\ & \geq & \dim E_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \dim E_{\overline{k}} + \dim E_{\overline{\frac{n}{2}}} \\ & \geq & 1 + 2 * \frac{n-2}{2} + 1 \\ & \geq & n\ ; \end{array} \qquad 2$$

si bien que $\dim E_0 \ = \ \dim E_{\overline{\frac{n}{2}}} \ = \ 1$, *et que* $\{\beta_0\}$ *(resp.* $\{\beta_{\overline{\frac{n}{2}}}\}$*,) est une base de* E_0 *(resp.* $E_{\overline{\frac{n}{2}}}$*.) Par ailleurs* $\forall 1 \leq k \leq \dfrac{n-2}{2},\ \dim E_{\overline{k}} \ = \ 2$ *et* $\{\beta_{\overline{k}}, \beta_{-\overline{k}}\}$ *est une base de* $Ej_{\overline{k}}$.

c) Déterminer le *spectre* de $\mathbf{C}_n$ (c'est-à-dire le *spectre* de $\Phi(\mathbf{C}_n)$) et une base de *vecteurs propres* .

Solution

n impair Il résulte du point 1 du point b , que $\mathbb{C}^{\mathbf{C}_n} \ = \ \bigoplus_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} E_{\overline{k}}$ *; c'est-à-dire qu'on a diagonalisé* $\Phi(\mathbf{C}_n)$ *;* $\{\beta_{\overline{k}}\}_{0\ \leq\ k\ \leq\ n-1}$ *est alors une base de vecteurs propres ; et le spectre de* $\mathbf{C}_n$ *est alors* $\mathrm{Sp}(\mathbf{C}_n) \ = \ \{\lambda_0 \ = \ 2\} \ \cup \ \{\lambda^{(2)}_{\overline{k}}\}_{1\ \leq\ k\ \leq\ \frac{n-1}{2}}$.

n est pair Il résulte du point 2 du point b , que $\mathbb{C}^{\mathbf{C}_n} \ = \ \bigoplus_{k=0}^{\frac{n}{2}} E_{\overline{k}}$ *; c'est-à-dire qu'on a diagonalisé* $\Phi(\mathbf{C}_n)$ *;* $\{\beta_{\overline{k}}\}_{0\ \leq\ k\ \leq\ n-1}$ *est alors une base de vecteurs propres ; et le spectre de* $\mathbf{C}_n$ *est alors* $\mathrm{Sp}(\mathbf{C}_n) \ = \ \{\lambda_0 \ = \ 2, \lambda_{\overline{\frac{n}{2}}} \ = \ -2\} \ \cup \ \{\lambda^{(2)}_{\overline{k}}\}_{1\ \leq\ k\ \leq\ \frac{n-2}{2}}$.

On peut bien évidemment rapprocher ce dernier résultat de la question 2 de l'exercice III.11.6.1 . On aurait alors eu $\zeta \ = \ i$*, si bien que* $\lambda_1 \ = \ \lambda_3 \ = \ 0$.

Exercice III.11.6.3 (Spectre des graphes bipartis) Dans tout l'exercice III.11.6.3 , on suppose que G est un *graphe fini simple non-orienté* *biparti* (cf. la définition II.6.1.2,) et on note

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\beta)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{K}_2)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{tikzcd}$$

le *morphisme de graphes non-orientés* correspondant à la *bipartition* $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$. On note $E \ := \ \mathbb{C}^G$ et pour $k \ \in \ \{1, 2\}$, $E_k \ := \ \{\alpha \ \in \ E\ ;\ \forall u \in \mathcal{V}_{3-k},\ \alpha(u) \ = \ 0\}$.

1) (**Somme directe**)
Montrer que

a) $E = E_1 \oplus^{\perp} E_2$,

Solution

Pour tout $\alpha \in E$, *s'il existe* $(\alpha_1, \alpha_2) \in E_1 \times E_2$ *tel que* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, *pour tout* $k \in \{1, 2\}$, *puisque* $\alpha_{3-k|\mathcal{V}_k} = 0$, $\alpha_{k|\mathcal{V}_k} = \alpha_{|\mathcal{V}_k}$; *ce qui définit complètement* α_k *et assure que* $E = E_1 \oplus E_2$.

b) il existe un *isomorphisme* (de $\mathbb{C}$-*espaces vectoriels*) $E_k \cong \mathbb{C}^{\mathcal{V}_k}$.

Solution

On notera comme en III.1.6.ii.2

$$\forall u \in \mathcal{V}(G),\ \alpha_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & \delta_{u,v} name]Kronecker@\text{KRONECKER} . \end{array} \tag{1}$$

Alors $\forall k \in \{1, 2\},\ \{\alpha_u\}_{u \in \mathcal{V}_k}$ *est une base de* E_k, *qui identifie* E_k *à* $\mathbb{C}^{\mathcal{V}_k}$.

Soit $\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^G)$ **l'*endomorphisme d'adjacence*** **de** G.

2) Montrer que pour $k \in \{1, 2\}$ $\Phi(E_k) \subset E_{3-k}$.

Solution

Pour tout $k \in \{1, 2\}$, *tout* $\alpha \in E_k$ *et* $u \in \mathcal{V}_k$, $\Phi(\alpha)(u) = \sum_{v \in N_G(u)} \alpha(v)$. *Or si* $u \in \mathcal{V}_k$ *et* $v \in N_G(u)$, *il résulte de l'axiome Bip*$_2$ *de la proposition II.6.1.1, que* $v \in \mathcal{V}_{3-k}$. *Comme* $\alpha \in E_k$, *il s'ensuit que* $\alpha(v) = 0$. *Par conséquent,* $\forall \alpha \in E_k,\ \Phi(\alpha)_{|\mathcal{V}_k} = 0$; *c'est-à-dire que* $\Phi(\alpha) \in E_{3-k}$.

On note $\sigma : E \to E$ **l'unique *endomorphisme*** **de** E **tel que** $\sigma_{|E_1} = -\mathrm{Id}$ **et** $\sigma_{|E_2} = \mathrm{Id}$.

3) Montrer que $\phi \circ \sigma = -\sigma \circ \Phi$.

Solution

$\alpha \in E_1$ $\Phi\big(\sigma(\alpha)\big) = \Phi(-\alpha) = -\phi(\alpha)$. *Or d'après la question 2* , $\Phi(\alpha) \in E_2$; *si bien que* $\sigma\big(\Phi(\alpha)\big) = \Phi(\alpha)$.
$\alpha \in E_2$ $\Phi\big(\sigma(\alpha)\big) = \Phi(\alpha) = -\sigma\big(\Phi(\alpha)\big)$ *puisque* $\Phi(\alpha) \in E_1$.

4) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

a) si $\lambda \in \mathrm{Sp}(G)$, $-\lambda \in \mathrm{Sp}(G)$

b) et qu'alors λ et $-\lambda$ ont la même *multiplicité* .

Solution

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, *notons* $E_\mu := \mathrm{Ker}\,\Phi - \mu\mathrm{Id}_E$. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(G)$, $\forall \alpha \in E_\lambda,\ \Phi\big(\sigma(\alpha)\big) = -\sigma\big(\Phi(\alpha)\big) = -\lambda\sigma(\alpha)$; *c'es-à-dire que* $\sigma(\alpha) \in E_{-\lambda}$.

La restriction $\sigma_{|E_\lambda}$ *de* σ *à* E_λ *est donc à valeurs dans* $E_{-\lambda}$; *et bien évidemment symétriquement* $\sigma_{|E_{-\lambda}}$ *est à valeurs dans* E_λ. *Comme* $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$, *la restriction* $\sigma_{|E_\lambda}$ *est un isomorphisme* *de* E_λ *sur* $E_{-\lambda}$.

Si donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(G)$, $E_\lambda \neq \{0\}$; *si bien que* $E_{-\lambda} \neq \{0\}$; *c'est-à-dire que* $-\lambda$ *est une valeur propre* *de* Φ. *On a de plus,* $\dim E_\lambda = \dim E_{-\lambda}$.

Comme Φ *est diagonalisable (cf. ,)* $\dim E_\lambda$ *est la multiplicité* *de* λ.

On dit que G **est un *graphe biparti complet*** **si** G **est un *graphe biparti*** **et que, de plus l'implication dans ii est une équivalence *i.e.* pour tout** $\{x, y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{x, y\}\}\big) \neq \emptyset$, **si et seulement s'il existe** $k \in \{1, 2\}$ **tel que** $x \in \mathcal{V}_k$ **et** $y \in \mathcal{V}_{3-k}$.

Dans la suite de l'exercice III.11.6.3 , on suppose que G **est un *graphe biparti complet*** **. On note** $n_k := \#(\mathcal{V}_k)_{k \in \{1,2\}}$. **Soit** $F := \{\alpha \in E \ ;\ \alpha_{|\mathcal{V}_k k \in \{1,2\}}$ **est constante**$\}$.

5) Montrer que F est stable par Φ et σ .

Solution

Notons $\chi_k \;_{k\,\in\,\{1,2\}} E \,\in$ *défini par :*

$$\begin{array}{rcl} \chi_k : & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & u \in \mathcal{V}_k & \longmapsto 1 \\ u \in \mathcal{V}_{3-k} & & \mapsto 0\,. \end{array} \qquad (1)$$

On remarque immédiatement que $\chi_k \in E_k$ *; et il n'est pas tellement plus difficile de voir que* $\{\chi_1, \chi_2\}$ *est une base de* F*.*

On a alors $\sigma(\chi_1) = -\chi_1$ *et* $\sigma(\chi_2) = \chi_2$ *; si bien que* F *est* σ*-stable.*

Puisque $\chi_k \in E_k$*, il résulte de la question 2 , que* $\Phi(\chi_k) \in E_{3-k}$*. Or*

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{V}_{3-k}, \quad \Phi(\chi_k)(u) &= \sum_{v\,\in\,N_G(u)} \chi_k(u) \\ &= \sum_{v\,\in\,\mathcal{V}_k} \chi_k(v) \\ &= n_k\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall k \in \{1,2\},\ \Phi(\chi_k) = n_k \chi_{3-k}\,; \qquad (2)$$

ce qui prouve que F *est* Φ*-stable.*

6) Déterminer le *spectre* de la *restriction* $\Phi_{|F}$ de Φ à F.

Solution

Puisqu'on a montré, à la question 5 , que F *est* Φ*-stable, on peut parler de* $\Phi_{|F}$*. On peut dès lors déterminer la matrice* B *de* $\Phi_{|F}$ *dans la base* $\{\chi_1, \chi_2\}$ *(cf. 5.1,) grâce à question 5,question 2 :* $B = \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ n_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est alors $X^2 - n_1 n_2$ *; si bien que* $\mathrm{Sp}(\Phi_{|F}) = \{-\sqrt{n_1 n_2}, \sqrt{n_1 n_2}\}$.

7) Déterminer la *restriction* $\Phi_{|F^\perp}$ de Φ à l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Solution

Puisque Φ *est autoadjoint (cf. la proposition III.3.2,) et* F *est* Φ*-stable, alors* $F^\perp$ *est aussi* Φ*-stable.*

Pour tout $\alpha \in E, \alpha \in F^\perp \Leftrightarrow \big(\langle \chi_1 \mid \alpha\rangle = \langle \chi_2 \mid \alpha\rangle = 0\big)$ *; c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1,2\}, \quad 0 &= \langle \chi_k \mid \alpha\rangle \\ &= \sum_{u\,\in\,\mathcal{V}(G)} \chi_k(u)\alpha(u) \\ &= \sum_{u\,\in\,\mathcal{V}_k} \alpha(u) \\ &= \Phi(\alpha)(v)\ ,\ v \in \mathcal{V}_{3-k}\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\forall \alpha \in F^\perp,\ \Phi(\alpha) = 0$.

8) Déterminer $\mathrm{Sp}(G)$.

Solution

Il résulte la question 6 que $\mathrm{Sp}(\Phi_{|F}) = \{-\sqrt{n_1 n_2}, \sqrt{n_1 n_2}\}$ *; et de la question 7* $\mathrm{Sp}(\Phi_{|F^\perp}) = \{0^{(\dim F)}\}$.

Come $E = F \oplus F^\perp, \dim F^\perp = n_1 + n_2 - 2$ *; et* $\mathrm{Sp}(G) = \mathrm{Sp}(\Phi) = \{-\sqrt{n_1 n_2}, 0^{(n_1+n_2-2)}, \sqrt{n_1 n_2}\}$.

Exercice III.11.6.4 (Spectre du graphe des arêtes) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe fini simple non-orienté*** k**-*régulier* et** L **son *graphe des arêtes* .**

On note $\mathcal{I}(G)$ **la matrice définie de la manière suivante :**

$$\begin{aligned} \forall (u,e) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{E}(G), \quad \mathcal{I}(G)ue &= 1 \textbf{ si } u \in \varepsilon(G)(e) \\ &= 0 \textbf{ sinon}\,. \end{aligned}$$

Si on note $\ell := \#\big(\mathcal{V}(G)\big)$, **c'est le nombre de lignes de** $\mathcal{I}(G)$, **et** $c := \#\big(\mathcal{E}(G)\big)$, **c'est le nombre de colonnes de** $\mathcal{I}(G)$; **si bien que** $\mathcal{I}(G) \in \mathcal{M}_{\ell,c}(\mathbb{C})$.

1) **a)** Donner $\mathcal{I}(G)$ pour un certain nombre *graphes* connus ; dans chacun de ces cas calculer ${}^t\,\mathcal{I}(G)\cdot\mathcal{I}(G)$ et $\mathcal{I}(G)\cdot{}^t\,\mathcal{I}(G)$.

Solution

G	$\mathcal{I}(G)$
$\mathbf{K}_2$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\mathbf{K}_3 = \mathbf{C}_3$	$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$
$\mathbf{C}_4$	$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$
$\mathbf{K}_4$	$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}$
$\mathbf{K}_5$	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}\{A,B\}&\{C,D\}&\{E,A\}&\{B,D\}&\{C,E\}&\{A,D\}&\{B,E\}&\{A,C\}&\{D,E\}&\{B,C\}\end{matrix} \\ \begin{matrix}A\\B\\C\\D\\E\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$

b) Que vaut le produit scalaire de deux colonnes de $\mathcal{I}(G)$?

Solution

Notons $C_{e\ e\,\in\,\mathcal{E}(G)}$ *les colonnes de* $\mathcal{I}(G)$. *Alors :*

$$\begin{array}{rcl}\forall (e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G),\quad \langle C_e \mid C_f\rangle & = & 2 \textit{ si } e = f \\ & = & 1 \textit{ si } e \text{ et } f \textit{ ont un sommet en commun} \\ & & \textit{i.e. sont voisins dans } L \\ & = & 0 \textit{ sinon }.\end{array}$$

c) Que vaut le produit scalaire de deux lignes de $\mathcal{I}(G)$?

Solution

Notons $L_{u\ u\,\in\,\mathcal{V}(G)}$ *les lignes de* $\mathcal{I}(G)$. *Alors :*

$$\begin{array}{rcl}\forall (u,v)\in\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G),\quad \langle L_u \mid L_v\rangle & = & k \textit{ si } u = v \\ & = & 1 \textit{ si } u \text{ et } v \textit{ on une arête en commun} \\ & & \textit{i.e. sont voisins ans } G \\ & = & 0 \textit{ sinon }.\end{array}$$

2) Montrer que

a) $\mathcal{I}(G)\cdot{}^t\,\mathcal{I}(G) = k\mathrm{Id}_\ell + \mathcal{A}(G)$;

Solution

C'est une conséquence immédiate du point c de la question 1 et des règles du calcul matriciel.

b) ${}^t\mathcal{I}(G) \cdot \mathcal{I}(G) = 2\mathrm{Id}_c + \mathcal{A}(L)$.

Solution

C'est une conséquence immédiate du point b de la question 1 et des règles du calcul matriciel.

c) Montrer que $\det\bigl(X\mathrm{Id}_c - {}^t\mathcal{I}(G)\cdot\mathcal{I}(G)\bigr) = X^{c-\ell}\det\bigl(X\mathrm{Id}_\ell - \mathcal{I}(G)\cdot{}^t\mathcal{I}(G)\bigr)$.

Solution

Voir l'exercice III.11.4.5 III.11.4 .

d) En déduire que $\chi_L(X) = (X+2)^{c-\ell}\chi_G(X-k+2)$.

Solution

$$\begin{aligned}\chi_L(X-2) &= \det\bigl((X-2)\mathrm{Id}_c - \mathcal{A}(L)\bigr)\\ &= \det\bigl(X\mathrm{Id}_c - 2\mathrm{Id}_c - \mathcal{A}(L)\bigr)\\ &= \det\bigl(X\mathrm{Id}_c - {}^t\mathcal{I}(G)\cdot\mathcal{I}(G)\bigr)\\ &= X^{c-\ell}\det\bigl(X\mathrm{Id}_\ell - \mathcal{I}(G)\cdot{}^t\mathcal{I}(G)\bigr)\\ &= X^{c-\ell}\det\bigl((X-k)\mathrm{Id}_\ell - \mathcal{A}(G)\bigr) .\end{aligned}$$

e) Comparer $\mathrm{Sp}(L)$ et $\mathrm{Sp}(G)$.

III.11.7 . —Parcours sur les graphes finis simples non-orientés

Exercice III.11.7.1 (Itérés de la matrice d'adjacence) Les notations sont celles de ..0 et II.6.2.2.

Montrer que $\forall (u,v,\ell) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathbb{N},\ \#\bigl(P_{u,v,\ell}(G)\bigr) = a^{(\ell)}_{u,v}(G)$.
Indication : *On pourra donner une démonstration par récurrence sur l'entier naturel* $\ell \in \mathbb{N}$.

Solution

$\ell = 0$ *On a alors* $\mathcal{A}(G)^\ell = \mathrm{Id}$. *Alors* $\forall u \in \mathcal{V}(G)$,

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_1 & \to & G\\ 0 & \mapsto & u\end{array}$$

est l'unique parcours apartenant à $P_{u,u,0}$.

Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$ $u \neq v$, *il n'existe aucune application* $\{0\} \to \mathcal{V}(G)$ *telle que* $0 \mapsto u$ *et* $0 \mapsto v$.

$\ell = 1$ *Pour ceux que le cas* $\ell = 0$, *ci-dessus bebuterait, on traite le cas* $\ell = 1$, *dont nous aurons, de toute façon besoin dans la suite du raisonnement par récurrence. Il suffit de remarquer qu'il existe* $\pi \in P_{u,v,1}$ *si et seulement si* u *et* v *sont voisin s et de se reporter à la définition III.1.9 de la matrice d'adjacence .*

$\ell \Rightarrow \ell+1$ *Pour tout* $(u,v) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$, *notons* $\tau : P_{u,v,\ell+1} \to \mathcal{V}(G)$, $\pi \mapsto \pi(\ell)$. *On a alors* $P_{u,v,\ell+1} = \coprod_{w \in \mathcal{V}(G)} \tau^{-1}(\{w\})$.

Pour tout $(\pi,w) \in P_{u,v,\ell+1}\times\mathcal{V}(G)$, *si* $\tau(\pi) = \mathcal{V}(\pi)(\ell) = w$, $\mathcal{E}(\pi)\bigl(\{\ell,\ell+1\}\bigr) = \{w,v\} \in \mathcal{E}(G)$; *si bien que* $w \in N_G(v)$. *Par contraposée, si* $w \notin N_G(v)$, $\tau^{-1}(\{w\}) = \emptyset$. *Il s'ensuit que* $P_{u,v,\ell+1} = \coprod_{w \in N_G(v)} \tau^{-1}(\{w\})$.

Si $w \in N_G(v)$ *et* $\pi \in \tau^{-1}(\{w\})$, $\pi_{|\mathbf{P}_\ell} \in P_{u,w,\ell}(G)$. *On considère ici* $\mathbf{P}_\ell$ *comme un sous-graphe de* $\mathbf{P}_{\ell+1}$, *par l'injection* $[0;\ell] \hookrightarrow [0;\ell+1]$. *On définit ainsi une application* $\tau^{-1}(\{w\}) \to P_{u,w,\ell}(G)$, $\pi \mapsto \pi_{|\mathbf{P}_\ell}$. *Réciproquement pour tout* $\pi \in P_{u,w,\ell}(G)$ *on définit* $\overline{\pi}$ *par* $\overline{\pi}_{|\mathbf{P}_\ell} := \pi, \mathcal{V}(\overline{\pi})(\ell+1) := v$ *et* $\mathcal{E}(\overline{\pi})\bigl(\{\ell,\ell+\}\bigr) := \{w,v\}$; *si bien que* $\overline{\pi} \in P_{u,v,\ell+1}$. *On définit ainsi une application* $P_{u,w,\ell}(G) \to \tau^{-1}(\{w\})$ *qui est évidement inverse inverse de la précédente. Il en résulte finalement qu'on a une bijection* $P_{u,w,\ell}(G) \cong \tau^{-1}(\{w\})$.

Il s'ensuite donc que $\#\bigl(P_{u,v,\ell+1}\bigr) = \sum_{w \in N_G(v)} \#\bigl(\tau^{-1}(\{w\})\bigr) = \sum_{w \in N_G(v)} \#\bigl(P_{u,w,\ell}(G)\bigr)$.

Si on fait l'hypothèse de récurrence que $\#\big(P_{u,w,\ell}(G)\big) = a_{u,w}^{(\ell)}(G)$, *il vient* $\#\big(P_{u,v,\ell+1}\big) = \sum_{w \in N_G(v)} a_{u,w}^{(\ell)}(G)$.
Or $\forall w \in \mathcal{V}(G),\ a_{w,v}(G) = 1 \Leftrightarrow w \in N_G(v)$, *par la définition III.1.9 de la matrice d'adjacence (c'est aussi le cas* $\ell = 1$.*)*
Il s'ensuit donc finalement que $\#\big(P_{u,v,\ell+1}\big) = \sum_{w \in \mathcal{V}(G)} a_{u,w}^{(\ell)}(G) \cdot a_{w,v}(G)$, *qui est précisément* $a_{u,v}^{(\ell+1)}(G)$ *par définition du produit matriciel.*

Exercice III.11.7.2 (Parcours dans le graphe $\mathbf{K}_5$) Soit $A := \mathcal{A}(\mathbf{K}_5)$ **la** ***matrice d'adjacence*** **du** ***graphe complet*** $\mathbf{K}_5$.

1) Écrire la matrice A.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $A^2 = \alpha \mathrm{Id}_5 + A$.

Solution

$A^2 = 4\mathrm{Id}_5 + A$; *d'où* $\alpha = 4$.

3) Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un unique *couple* $(a_\ell, b_\ell) \in \mathbb{R}^2$ et un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^\ell = (X+1)(X-\alpha)\cdot Q + a_\ell X + b_\ell$.

Solution

Il suffit de faire la division euclidienne (cf. le théorème III.6.4.2,) de X^ℓ *par le polynôme* $(X+1)(X-\alpha)$ *qui est de degré* 2 ; *si bien que le reste (qui est unique) est de degré* > 2 *et s'écrit donc de manière unique* $a_\ell X + b_\ell$.

4) Déterminer a_ℓ et b_ℓ en fonction de α et ℓ .

Solution

$$\begin{array}{ll} \forall \ell \in \mathbb{N}, & X^\ell = (X+1)(X-\alpha)Q + a_\ell X + b_\ell \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (-1)^\ell & = & (-1+1)(-1-\alpha)Q(-1) - a_\ell + b_\ell \\ \alpha^\ell & = & (\alpha+1(\alpha-\alpha)Q(\alpha) + \alpha a_\ell + b_\ell \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (-1)^\ell & = & -a_\ell + b_\ell \\ \alpha^\ell & = & \alpha a_\ell + b_\ell \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} a_\ell & = & \dfrac{(\alpha^\ell - (-1)^\ell)}{\alpha+1} \\ b_\ell & = & \dfrac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1} \end{array}\right\} \end{array}$$

5) Calculer A^ℓ pour $\ell \in \mathbb{N}$ en fonction de A, Id_5, α et ℓ .

Solution

On a (cf. la question 3 ,) $\forall \ell \in \mathbb{N},\ A^\ell = (A+\mathrm{Id}_5)(A-\alpha\mathrm{Id}_5) \cdot Q(A) + a_\ell A + b_\ell \mathrm{Id}_5$.
Or, d'après la question 2 , $(A+\mathrm{Id}_5)(A-\alpha\mathrm{Id}_5) = 0$; *si bien, qu'en utilisant la question 4 , il vient :*

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathbb{N},\quad A^\ell &= a_\ell A + b_\ell \mathrm{Id}_5 \\ &= \frac{(\alpha^\ell - (-1)^\ell)}{\alpha+1} \cdot A + \frac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1} \cdot \mathrm{Id}_5 . \end{aligned}$$

6) Si, pour tout $(u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N}$, $P_{u,u,\ell}(\mathbf{K}_5)$ est défini comme en II.6.2.2, calculer $\#\big(P_{u,u,\ell}(\mathbf{K}_5)\big)$ en fonction de α et ℓ .
Indication : *On pourra, bien entendu, utiliser le résultat de l'exercice III.11.7.1 .*

Solution

D'après l'exercice III.11.7.1 $\#\big(P_{u,u,\ell}(\mathbf{K}_5)\big) = a^{(\ell)}_{u,u}(\mathbf{K}_5)$.

Or d'après la question 5 , $\forall (u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N},\ a^{(\ell)}_{u,u}(\mathbf{K}_5) = b_\ell = \dfrac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1}$; *si bien que*

$$\forall (u,\ell) \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_5) \times \mathbb{N},\ \#\big(P_{u,u,\ell}(\mathbf{K}_5)\big) = \frac{(\alpha^\ell + \alpha(-1)^\ell)}{\alpha+1} .$$

7) Donner $\#\big(P_{u,u,\ell}(\mathbf{K}_5)\big)$ pour $\ell = 2, 3, 4$.

Solution

Comme $\alpha = 4$ *(cf. la question 2 ,)*

$$\begin{aligned}
\#\big(P_{u,u,2}(\mathbf{K}_5)\big) &= \frac{1}{5}(4^2+4) \\
&= 4 \\
\#\big(P_{u,u,3}(\mathbf{K}_5)\big) &= \frac{1}{5}(4^3-4) \\
&= 12 \\
\#\big(P_{u,u,4}(\mathbf{K}_5)\big) &= \frac{1}{5}(4^4+4) \\
&= 52 .
\end{aligned}$$

Exercice III.11.7.3 (Parcours dans le graphe C_6) Dans l'exercice III.11.7.3 , on suppose que $G = \mathbf{C}_6$ est le *cycle* à 6 *sommet* s que l'on peut considérer comme le *graphe* de CAYLEY associé à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\{-1, 1\}$.

1) (Parcours et graphe sommets-transitif)

a) Montrer que, pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, il existe un *automorphisme de graphes non-orientés* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph^{N-O}}}(\mathbf{C}_6)$ tel que $\tau(u) = v$.

Définition a.1 On dit alors que $\mathbf{C}_6$ est *sommet-transitif* .

Solution

$\mathcal{V}(\tau)$ *Pour tout* $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $d := v - u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. *L'application* $\mathcal{V}(\tau) : \mathcal{V}(\mathbf{C}_6) \to \mathcal{V}(\mathbf{C}_6)$, $x \mapsto x + d$ *est une bijection de* $\mathcal{V}(\mathbf{C}_6)$ *sur lui-même.*

$\mathcal{E}(\tau)$ *L'application* $\mathcal{E}(\tau) : \mathcal{E}(\mathbf{C}_6) \to \mathcal{E}(\mathbf{C}_6)$, $\{x,y\} \mapsto \{x+d, y+d\} = \big\{\mathcal{V}(\tau)(x), \mathcal{V}(\tau)(y)\big\}$ *est une bijection de* $\mathcal{E}(\mathbf{C}_6)$ *sur lui-même.*

Morphisme Enfin $\tau := \big(\mathcal{V}(\tau), \mathcal{E}(\tau)\big)$ *est, pour ainsi dire, par construction, un endomorphisme de graphes non-orientés* de $\mathbf{C}_6$.

b) Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, construire une bijection $P_{u,u,\ell}(G) \cong P_{v,v,\ell}(G)$.
Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le point a .*

Solution

Pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, *on sait, d'après le point a , qu'il existe* $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph^{N-O}}}(G)$ *tel que* $\tau(u) = v$. *Pour tout* $\pi \in P_{u,u,\ell}(G), \tau \circ \pi \in P_{v,v,\ell}(G)$; *ce qui définit une application* $P_{u,u,\ell}(G) \to P_{v,v,\ell}(G)$, $\pi \mapsto \tau \circ \pi$. *L'application* $P_{v,v,\ell}(G) \to P_{u,u,\ell}(G)$, $\pi \mapsto \tau^{-1} \circ \pi$ *est manifestement sa bijection réciproque* .

2) (Spectre)

On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{C}$; et on rappelle que $j^3 = 1$, et $1 + j + j^2 = 0$. On note encore $\zeta := -j$.

On note $E := \mathbb{C}^{\mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{C}$-*espace vectoriel* des *application* s de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$; et pour tout $u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\beta_u \in E : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $v \mapsto \zeta^{uv}$.

On note $\Phi(G) \in \mathrm{End}(E)$ l'*endomorphisme d'adjacence* du *graphe* G.

a) (Vecteur propre)
Calculer $\Phi(G)(\beta_u)$ pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$.

Solution

$$\begin{array}{rcl} \forall (u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G), \quad \Phi(G)(\beta_u)(v) & = & \displaystyle\sum_{w \,\in\, N_G(v)} \beta_u(w) \\ & = & \beta_u(v-1) + \beta_u(v+1) \\ & = & \zeta^{u(v-1)} + \zeta^{u(v+1)} \\ & = & (\zeta^u + \zeta^{-u})\zeta^{uv} \\ & = & (\zeta^u + \zeta^{-u})\beta_u(v)\ . \end{array}$$

En posant $\forall u \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ \lambda_u \ :=\ \zeta^u + \zeta^{-u}$, *il vient*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G) \ = \ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ \Phi(G)(\beta_u) \ = \ \lambda_u \cdot \beta_u\ . \qquad 1$$

b) Déterminer le *spectre* $\mathrm{Sp}(G) \ = \ \mathrm{Sp}(\Phi(G)) \ = \ \mathrm{Sp}(\mathcal{A}(G))$ de G et une base de E de *vecteurs propres* pour $\Phi(G)$.
Indication : *On pourra, bien entendu utiliser le calcul du point a .*

Solution

On a établi en a.1 que pour tout $u \ \in \ \mathcal{V}(G) \ = \ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, (β_u, λ_u) *est un couple (vecteur propre ,valeur propre) pour* $\Phi(G)$ *; en remarquant, en particulier, que* $\beta_u \ \neq \ 0$.
Comme, par ailleurs, $\forall u \in \mathcal{V}(G),$ *,* $\lambda_u \ = \ \lambda_{-u}$*, les valeurs propres de* $\Phi(G)$ *sont* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
On constate en outre que $\{\beta_1, \beta_5\}$ $\{\beta_2, \beta_4\}$ *sont des parties libres de* E*. E notant* $\forall u \ \in \ \{0,1,2,3\},\ E_u \ := \ \mathrm{Ker}\,\Phi(G) - \lambda_u \mathrm{Id}_E$*, il vient :*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Vect}\{\beta_0\} & \subset & E_0 & \Rightarrow & \dim E_0 \ \geq \ 1 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_1, \beta_5\} & \subset & E_1 & \Rightarrow & \dim E_1 \ \geq \ 2 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_2, \beta_4\} & \subset & E_2 & \Rightarrow & \dim E_2 \ \geq \ 2 \\ \mathrm{Vect}\{\beta_3\} & \subset & E_3 & \Rightarrow & \dim E_3 \ \geq \ 1\ . \end{array}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{u=0}^{3} \dim E_u \ \geq \ 6 \ = \ \dim E$*, est que les espaces propres sont en somme directe , Il s'ensuit que* $\dim E_0 \ = \ \dim E_3 \ = \ 1$*, et* $\dim E_1 \ = \ \dim E_2 \ = \ 2$ *. Il en résulte que* $\{\beta_u\}_{\,u \,\in\, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ *est une base de* E *de vecteurs propres pour* $\Phi(G)$.
Le spectre de G *est alors :*

$$\mathrm{Sp}(G) \ = \ \left\{\lambda_0 \ = \ 2\ ,\ \lambda_1 \ = \ 1^{(2)}\ ,\ \lambda_2 \ = \ -1^{(2)}\ \lambda_3 \ = \ -2\right\}. \qquad 1$$

3) (**Parcours dans** $\mathbf{C}_6$)

a) (**Trace**)
Montrer que, pour tout $\ell \ \in \ \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \ = \ (2^\ell + 2)\cdot\big(1 + (-1)^\ell\big)$; où $\mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) \ = \ \mathrm{tr}\big(\Phi(G)^\ell\big)$ est la trace de l'itérée $\ell^{\text{ième}}$(la puissance $\ell^{\text{ième}}$) de la *matrice d'adjacence* de G.

Solution

D'après 2.b.1,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)\big) & = & 2^\ell + 2(1^\ell) + 2(-1)^\ell + (-2)^\ell \\ & = & 2^\ell\big(1 + (-1)^\ell\big) + 2\big(1 + (-1)^\ell\big) \\ & = & (2^\ell + 2)\cdot\big(1 + (-1)^\ell\big)\ . \end{array}$$

b) (**Parcours**)
Calculer en fonction de $\ell \ \in \ \mathbb{N}$, $\#\big(P_{u,u,\ell}(G)\big)$ pour tout $u \ \in \ \mathcal{V}(G)$.
Indication : *On pourra utiliser les résultats de l'exercice III.11.7.1 , et du point b de la question 1 .*

Solution

D'après l'exercice III.11.7.1 ,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}\big(\mathcal{A}(G)^\ell\big) & = & \displaystyle\sum_{u \,\in\, \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} a^{(\ell)}_{u,u}(G) \\ & = & \displaystyle\sum_{u \,\in\, \mathcal{V}(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \#\big(P_{u,u,\ell}(G)\big)\ . \end{array}$$

Or d'après le point b de la question 1 , $\forall (u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ ,\#\big(P_{u,u,\ell}(G)\big) \ = \ \#\big(P_{v,v,\$ell}\big)$; *si bien que*

$$\begin{array}{lrcl} \forall u \in \mathcal{V}(G), & \operatorname{tr}\big(\mathcal{A}(G)^{\ell}\big) & = & 6 \cdot \#\big(P_{u,u,\ell}(G)\big) \\ \Rightarrow & \#\big(P_{u,u,\ell}(G)\big) & = & \frac{1}{6} \cdot \operatorname{tr}\big(\mathcal{A}(G)^{\ell}\big) \\ & & = & \frac{1}{6} \cdot (2^{\ell}+2) \cdot \big(1+(-1)^{\ell}\big)\ . \end{array}$$

c) (**Parcours de longueur impaire**)
Pour $(u,\ell) \ \in \ \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, quelle(s) propriété(s) de $P_{u,u,\ell}(G)$ peut-on énoncer ?

Solution

Pour ℓ *impair* , $1+(-1)^{\ell} \ = \ 0$; *si bien que* $\operatorname{tr}\big(\mathcal{A}(G)^{\ell}\big) \ = \ (2^{\ell}+2) \cdot \big(1+(-1)^{\ell}\big) \ = \ 0$; *si bien que*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G),\ P_{u,u,\ell}(G) \ = \ 0 \ :$$

il n'y a pas de parcours de longueur impaire dans $\mathbf{C}_6$.