LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie ...

Corrigé Des exercices I.5

I.5 . – Exercices

I.5.1 . – Ensembles applications

Exercice I.5.1.1 (Injection) Étant donnée une application $f : A \rightarrow B$,

- 1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes
 - i) f est injective;
 - ii) il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \text{Id}_A$.

Solution

$ii \Rightarrow i$

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in A \times A, \quad f(x) &= f(y) \\ \Rightarrow \quad g[f(x)] &= g[f(y)] \\ \Rightarrow \quad x &= y; \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est injective.

$i \Rightarrow ii$ Pour tout $y \in \text{Im } f$ il existe^a un unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Posons donc $g(y) = x$; ce qui définit g sur $\text{Im } f$. Pour tout $y \notin \text{Im } f$ choisissons un élément x arbitraire dans A et posons $g(y) = x$. Alors, pour tout $x \in A$, $f(x) \in \text{Im } f$; et par conséquent, $g[f(x)] = x$. Bien entendu on ne peut pas dire grand chose, a priori de $f[g(y)]$ pour $y \in B$; mais rien n'est exigé non plus!

a. Pour peu toutefois que A ne soit pas l'vide.

b. Pour peu une fois encore qu'il ne soit pas vide et qu'on n'ait pas trop de répugnance à utiliser l'axiome du choix.

On dit alors que g est une rétraction de f .

- 2) Une telle rétraction est elle unique? Étudier le cas de $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$.

Solution

Pour tout entier pair $m = 2n$, nécessairement $g(m) = n$. En revanche pour tout entier impair $m = 2n + 1$, on peut choisir arbitrairement son image par g . On peut donc ainsi construire un grand nombre (pour ne pas dire une infinité) de retractions g à l'injection f .

Exercice I.5.1.2 (Surjection) Étant donnée une application $f : A \rightarrow B$,

- 1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes
 - i) f est surjective;
 - ii) il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \text{Id}_B$.

Solution

$ii \Rightarrow i$ Pour tout $y \in B$, $f[g(y)] = y$, c'est-à-dire que $g(y)$ est un antécédent pour y ; ce qui assure que f est surjective.

$i \Rightarrow ii$ Si f est surjective, pour tout $y \in B$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est non vide et l'on peut donc choisir l'un de ses éléments qu'on notera $g(y)$. Il est clair qu'alors, pour tout $y \in B$, $f[g(y)] = y$. Ici encore, on ne peut pas dire grand chose a priori de $g[f(x)]$ pour $x \in A$.

On dit alors que g est une section de f .

- 2) Une telle section est elle unique?

Solution

On peut construire de nombreuses sections par exemple à l'application surjective $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à un entier a associe sa classe modulo n . Construire une telle section équivaut en fait à choisir un représentant pour chaque classe ; ce qui laisse beaucoup de choix.

On prendra cependant garde qu'aucune des sections de π ne sera jamais compatible aux structures (de groupe ou d'anneau) sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; autrement dit il n'existe aucune section qui soit un morphisme.

3) Démontrer que si deux sections ont même image elles coïncident.

Solution

Soient donc g et $h : B \rightarrow A$ vérifiant

$$f \circ g = f \circ h = \text{Id}B \text{ et } \text{Im } g = \text{Im } h .$$

$$\begin{aligned} \forall z \in B, & & g(z) \in \text{Im } g = \text{Im } h & \wedge & h(z) \in \text{Im } h = \text{Im } g \\ \Rightarrow \exists (x, y) \in B \times B, & & g(z) = h(x) & \wedge & h(z) = g(y) \\ \Rightarrow & & f[g(z)] = f[h(x)] & \wedge & f[h(z)] = f[g(y)] \\ \Rightarrow & & z = x & = & z = y \\ \Rightarrow & & g(z) = g(y) & = & h(z) ; \end{aligned}$$

ce qui prouve que $g = h$.

Exercice I.5.1.3 (Propriétés des applications) Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1) a) Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(A)) \subset A .$$

Solution

Pour tout $y \in f(f^{-1}(A))$ il existe, par définition, $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. Or, par définition encore, $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$ donc $y \in A$. Il s'ensuit que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), A = f(f^{-1}(A)) .$$

Solution

On a vu (cf. a.) que $f(f^{-1}(A)) \subset A$ indépendamment de toute hypothèse sur f .

Supposons que f est surjective. Alors pour tout $y \in A$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $f(x) \in A$ c'est-à-dire que $x \in f^{-1}(A)$. Il s'ensuit que $y = f(x) \in f(f^{-1}(A))$ ce qui entraîne que $A \subset f(f^{-1}(A))$.

Réciproquement supposons que pour tout $A \subset F, A = f(f^{-1}(A))$. Alors pour tout $y \in f, \{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$ ce qui entraîne en particulier que $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Ceci signifie exactement que f est surjective.

2) (Injectivité (facultatif))

a) Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A)) .$$

Solution

En effet $\forall x \in A, f(x) \in f(A)$ c'est-à-dire $x \in f^{-1}(f(A))$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)) .$$

Solution

On a vu (cf. a.) que $A \subset f^{-1}(f(A))$ indépendamment de toute hypothèse sur f .
 Supposons que f est injective. Pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$, $f(x) \in f(A)$ par définition. Il existe donc $y \in A$, tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est injective, $x = y$ ce qui entraîne $x \in A$: d'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
 Réciproquement supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, $f(x) = f(y)$ entraîne que $f(y) \in f(\{x\})$ donc $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$. Or $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ d'où $y \in \{x\}$ c'est-à-dire que $x = y$ ce qui entraîne que f est injective.

Exercice I.5.1.4 (Bijection réciproque) 1) Pour des ensembles E et F , montrer que $f : E \rightarrow F$ est une bijection de E sur F si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \text{ et } f \circ g = \text{Id}_F . \quad 1$$

Solution

- Si f et g vérifient les égalités 1 ci-dessus, $f \circ g = \text{Id}_E$, assure que g est une section de f au sens de l'exercice I.5.1.2 ; ce qui assure que f est surjective. De manière analogue (ou plutôt duale serait-on tenté de dire,) $g \circ f = \text{Id}_F$ signifie que g est une rétraction de f au sens de l'exercice I.5.1.1 ; ce qui entraîne que f est injective. L'application f est donc bijective.
- Réciproquement si f est bijective, il résulte de l'exercice I.5.1.1 (resp. I.5.1.2) que f possède une rétraction $r : F \rightarrow E$ telle que $r \circ f = \text{Id}_E$, (resp. une section $s : F \rightarrow E$ telle que $f \circ s = \text{Id}_F$). On a alors :

$$\begin{aligned} s &= \text{Id}_E \circ s \\ &= r \circ f \circ s \\ &= r \circ \text{Id}_F \\ &= r . \end{aligned}$$

2) Il existe au plus une application $g : F \rightarrow E$ vérifiant 1.1.

Solution

Si g et h sont deux applications vérifiant 1.1, en particulier

$$g = \text{Id}_E \circ g = h \circ f \circ g = h \circ \text{Id}_F = h .$$

3) Si g vérifie 1.1, g est elle-même une bijection qu'on appelle du fait de l'unicité établie à la question 2, la *bijection réciproque* de f .

Solution

Le fait que g est une bijection résulte du fait que f et g jouent des rôles symétriques dans 1.1 et de l'équivalence établie à la question 1.

Exercice I.5.1.5 (Produit cartésien) Faire la preuve de la proposition I.1.13.15.

Solution

Le point ii de la proposition I.1.13.15 est presque immédiat puisque $\forall (x, y) \in a \times b$, (x, y) est un antécédent de x (resp. y) par p (resp. q .)

Pour le point iii de la proposition I.1.13.15, s'il existe $h : c \rightarrow a \times b$ vérifiant

$$p \circ h = f \text{ et } q \circ h = g ,$$

alors nécessairement

$$\forall x \in c, h(x) = (f(x), g(x)) ;$$

ce qui assure l'unicité de h .

Reste à voir que cette formule définit bien h ; ce qui est pour ainsi dire immédiat.

Exercice I.5.1.6 (Produit cartésien et applications) 1) $(\cdot \times \cdot)$

Faire la démonstration de la proposition 0.3.

Indication : Ce sont des vérifications essentiellement élémentaires ; même si ces énoncés ne sont pas absolument tautologiques.

2) Soient a, b, c trois ensembles.

Étant donnée une application $f : a \times b \rightarrow c$,

pour tout $x \in a$, on définit $g(x) \in c^b$ une application de b dans c par

$$g(x)(y) := f((x, y)).$$

Montrer que l'application

$$\phi : c^{a \times b} \rightarrow (c^b)^a, f \mapsto g$$

est une bijection,

Indication : on pourra donner sa bijection réciproque.

Solution

Soit $g : a \rightarrow c^b$. définissons $f : a \times b \rightarrow c$ par

$$f((x, y)) := g(x)(y) \forall (x, y) \in a \times b, .$$

On définit ainsi une application

$$\psi : (c^b)^a \rightarrow c^{a \times b} .$$

On a alors :

$$\forall f \in c^{a \times b}, \forall (x, y) \in a \times b, \phi(f)(x)(y) = f(x, y) \quad 1$$

et

$$\forall g \in (c^b)^a \forall (x, y) \in a \times b, \psi(g)(x, y) = g(x)(y) . \quad 2$$

Pour tout $f \in c^{a \times b}$, calculons $\psi(\phi(f))$. comme $\psi(\phi(f))$ est une applications de $a \times b$ dans c , on doit évaluer $\psi(\phi(f))$ sur tous les couples $(x, y) \in a \times b$. or d'après la question 2,

$$\forall (x, y) \in a \times b, \psi(\phi(f))(x, y) = \phi(f)(x, y)$$

qui vaut $f(x, y)$ d'après la question 1. Il s'ensuit que

$$\forall f \in c^{a \times b}, \psi(\phi(f)) = f \text{ i.e. } \psi \circ \phi = \text{Id}_{c^{a \times b}} .$$

De même $\forall g \in (c^b)^a$, , calculons $\phi(\psi(g))$. pour tout $x \in a$, $\phi(\psi(g))(x)$ est une application de c dans b , si bien qu'il faut l'évaluer sur tous les éléments $y \in b$. Or d'après la question 1,

$$\forall (x, y) \in a \times b, \phi(\psi(g))(x)(y) = \psi(g)(x, y)$$

qui vaut $g(x)(y)$ d'après la question 2. Il s'ensuit que

$$\forall g \in (c^b)^a, \phi(\psi(g)) = g \text{ i.e. } \phi \circ \psi = \text{Id}_{(c^b)^a} .$$

Exercice I.5.1.7 ($\mathcal{P}_{1,2}(\cdot)$) Faire la démonstration de la proposition 0.5.

I.5.2 . – Relations d'équivalence

Exercice I.5.2.1 (Classes d'équivalence) Faire la preuve du lemme I.3.11.3.2.

Solution

$a \Rightarrow b$ Puisqu'une relation d'équivalence est réflexive, pour tout $x \in E, x \in \bar{x}$. Or si de plus $x \sim y, x \in \bar{y}$; si bien que

$$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset .$$

On utilise le caractère symétrique de la relation d'équivalence qui autorise à écrire indifféremment $x \sim y$ ou $y \sim x$.

$b \Rightarrow c$ Soit $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. alors pour tout $w \in \bar{x}, w \sim x$ et $z \sim x$, i.e. par symétrie $x \sim z$ et par transitivité $w \sim z$. Comme de plus $z \in \bar{y}, z \sim y$; si bien que par transitivité, pour tout $w \in \bar{x}, w \sim y$; i.e. $w \in \bar{y}$; ce qui entraîne finalement

$$\bar{x} \subset \bar{y} .$$

$c \Rightarrow d$ Si $\bar{x} \subset \bar{y}$, en particulier $x \in \bar{y}$; si bien que $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$. Or pour tout $z \in \bar{y}, y \sim z$; ce qui entraîne, par transitivité, $x \sim z$; i.e. $z \in \bar{x}$. Il en résulte donc que $\bar{y} \subset \bar{x}$; ce qui, sous l'hypothèse que $\bar{x} \subset \bar{y}$, entraîne

$$\bar{x} = \bar{y} .$$

Exercice I.5.2.2 (Applications surjectives) Faire la preuve de la proposition I.3.11.3.6.

Solution

I.3.11.3.6.i traduit simplement le fait qu'une relation d'équivalence est réflexive i.e. $x \in \bar{x}$; ce qui assure que $\pi(x) = \bar{x}$. C'est encore un moyen de dire qu'aucune classe d'équivalence n'est vide.

I.3.11.3.6.ii Supposons qu'il existe une relation d'équivalence $\sim$ sur E et une bijection

$$\theta : E/\sim \rightarrow F, \bar{x} \mapsto \rho(x).$$

Notons $\pi : E \rightarrow E/\sim, x \mapsto \bar{x}$ la surjection canonique; si bien que l'hypothèse équivaut à $\theta \circ \pi = \rho$; ce qu'on peut symboliser par le diagramme suivant, dont on dit qu'il est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \pi \downarrow & \searrow \rho & \\ E/\sim & \xrightarrow{\theta} & F. \end{array}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times E, & \quad x \sim y \\ \Leftrightarrow & \quad \bar{x} = \bar{y} \\ \Leftrightarrow & \quad \pi(x) = \pi(y) \\ \Leftrightarrow & \quad \theta[\pi(x)] = \theta[\pi(y)] \\ \Leftrightarrow & \quad \rho(x) = \rho(y); \end{aligned}$$

ce qui prouve l'unicité de $\sim$ si elle existe.

Reste donc à montrer que si l'on définit $\sim$ par $x \sim y$ si $\rho(x) = \rho(y)$, on définit bien une relation d'équivalence qui permet de construire la bijection θ .

Bien entendu $\rho(x) = \rho(x)$ i.e. $x \sim x$ i.e. $\sim$ est réflexive. Le fait qu'elle soit symétrique est presque tautologique. Si enfin $x \sim y$ et $y \sim z$, $\rho(x) = \rho(y)$ et $\rho(y) = \rho(z)$; si bien que $\rho(x) = \rho(z)$ i.e. $x \sim z$. La relation $\sim$ est donc bien transitive. C'est donc bien une relation d'équivalence.

Si θ est bien définie nécessairement

$$\forall x \in E, \theta[\pi(x)] = \rho(x).$$

C'est une bonne définition puisque

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y).$$

De plus, puisque ρ est surjective, θ vérifiant $\theta \circ \pi = \rho$ est surjective.

Enfin

$$\theta[\pi(x)] = \theta[\pi(y)] \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y);$$

i.e. θ est injective.

Exercice I.5.2.3 (Partitions) Donner la preuve de la proposition I.3.11.3.4.

Solution

i) (Preuve du point i de la proposition I.3.11.3.4)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$ et

$$P := \{\bar{x}, x \in E\}$$

l'ensemble des classes d'équivalence selon $\sim$. Autrement dit, pour tout $x \in E, \bar{x} \in P$ est définie par

$$\bar{x} := \{y \in E; y \sim x\}.$$

— Pour tout $\bar{x} \in P, x \in \bar{x}$, en effet $x \sim x$ puisque $\sim$ est réflexive; si bien que $\bar{x} \neq \emptyset$; ce qui assure que l'axiome Part₁ de la définition I.3.11.3.3 est satisfait par P .

— Pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in P \times P$, il découle du lemme I.3.11.3.2 que,

$$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y};$$

c'est-à-dire que l'axiome Part₂ de la définition I.3.11.3.3 est satisfait pour P .

— Enfin pour tout $x \in E, x \in \bar{x}$ (comme nous l'avons déjà dit, par réflexivité de $\sim$), si bien que

$$E \subset \bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x}.$$

Come par ailleurs $\forall x \in E, \bar{x} \subset E,$

$$\bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x} \subset E,$$

d'où finalement

$$E = \bigcup_{\bar{x} \in P} \bar{x}$$

ce qui assure que l'axiome Part_3 de la définition I.3.11.3.3 est satisfait par P .

L'ensemble P satisfaisant les axiomes de la définition I.3.11.3.3 c'est donc bien une partition de E .

ii) (Preuve du point ii de la proposition I.3.11.3.4)

Soit E un ensemble et P une partition de E . S'il existe une relation d'équivalence $\sim$ telle que les classes selon $\sim$ sont les éléments de P , alors pour tout $x \in E$, d'après l'axiome Part_3 de la définition I.3.11.3.3, il existe $A \in P$ tel que $x \in A$. De plus d'après l'axiome Part_2 de la définition I.3.11.3.3, s'il existe $B \in P$ tel que $x \in B$, alors $A \cap B \neq \emptyset$ et par conséquent $A = B$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique $A \in P$ tel que $x \in A$. Si A est la classe de x , pour tout $y \in E$,

$$y \sim x \Leftrightarrow y \in A.$$

La relation $\sim$ est alors caractérisée par le fait que $x \sim y$ si et seulement si il existe $A \in P$ tel que $x \in A$ et $y \in A$. L'unicité de $\sim$ est alors assurée.

Reste à montrer que $\sim$ ainsi définie est bien une relation d'équivalence : Or

- d'après l'axiome Part_3 de la définition I.3.11.3.3, pour tout $x \in E$, il existe $A \in P$ tel que $x \in A$, ce qui entraîne que $x \sim x$, c'est-à-dire que $\sim$ est réflexive ;
- la définition même de $\sim$ assure qu'elle est symétrique ;
- enfin pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$, $x \sim y$ et $y \sim z$, entraîne qu'il existe $(A, B) \in P \times P$, tel que

$$x \in A, y \in A, y \in B, z \in B.$$

Il en résulte que $y \in A \cap B$ si bien que, d'après l'axiome Part_2 de la définition I.3.11.3.3, $A = B$, si bien que $z \in A$, c'est-à-dire que $x \sim z$. Il en résulte que $\sim$ est transitive.

I.5.3 . – Ensembles finis

Exercice I.5.3.1 (Intervalles de $\mathbb{N}$) Soient p et q deux entiers naturels.

- 1) Montrer qu'il existe une application injective $f : [0; p] \rightarrow [0; q]$ si et seulement si $p \leq q$.
- 2) En déduire qu'il existe une application bijective $f : [0; p] \rightarrow [0; q]$ si et seulement si $p = q$.
- 3) En déduire qu'il n'existe pas d'application injective $f : \mathbb{N} \rightarrow [0; p]$.

I.5.4 . – Graphes

Exercice I.5.4.1 (Graphes (à involution, non-orientés) isomorphes) Faire la démonstration

- 1) de la proposition I.1.12 ;
- 2) de la proposition I.2.5 ;
- 3) de la proposition I.2.14.

Exercice I.5.4.2 (Caractérisation alternative des graphes à involution) Pour $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un graphe on notera

$$\begin{aligned} \sigma(G) : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) &\longrightarrow \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \\ (u, v) &\longmapsto (v, u) \end{aligned}$$

et $G^{\text{sym}} := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \sigma(G) \circ \varepsilon(G))$.

1) Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un graphe .

- a) Montrer que G^{sym} est un graphe .

Solution

On constate immédiatement que G^{sym} satisfait les axiomes Gph_1 à Gph_3 de la définition I.1.1.

b) $G^{\text{sym}} = G$.

Solution

$$\begin{aligned} G^{\text{sym}} &= (\mathcal{V}(G^{\text{sym}}), \mathcal{E}(G^{\text{sym}}), \sigma(G^{\text{sym}}) \circ \varepsilon(G^{\text{sym}})) \\ &= (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \sigma(G^{\text{sym}}) \circ \sigma(G) \circ \varepsilon(G)). \end{aligned}$$

Or $\sigma(G^{\text{sym}}) \circ \sigma(G) = \text{Id}_{\mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)}$; si bien que

$$G^{\text{sym}} = (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)) = G.$$

2) Étant donné un graphe $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

Inv_1) Il existe une application $\text{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ telle que $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \text{inv}(G))$ est un graphe à involution au sens de la définition I.2.1.

Inv_2) Il existe une application $\text{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ telle que

i) $(\text{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \text{inv}(G)) : G \rightarrow G^{\text{sym}}$ est un morphisme de graphes (cf. la définition II.1.1.) et

ii) $(\text{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \text{inv}(G)) \circ (\text{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \text{inv}(G)) = \text{Id}_G$.

Solution

$\text{Inv}_1 \Rightarrow \text{Inv}_2$ i) L'axiome MorGph_1 de la définition II.1.1 est évidemment satisfait par $\text{Id}_{\mathcal{V}(G)}$.

MorGph_2 est tautologiquement satisfait par $\text{inv}(G)$.

MorGph_3 résulte de l'axiome $\text{Gph}_{\text{Inv}_6}$ de la définition I.2.1.

ii) résulte de l'axiome $\text{Gph}_{\text{Inv}_5}$ de la définition I.2.1.

$\text{Inv}_2 \Rightarrow \text{Inv}_1$ $\text{Gph}_{\text{Inv}_1}$ à $\text{Gph}_{\text{Inv}_3}$ de la définition I.2.1 Puisque G est un graphe, les axiomes $\text{Gph}_{\text{Inv}_1}$ à $\text{Gph}_{\text{Inv}_3}$ de la définition I.2.1 sont satisfaits.

$\text{Gph}_{\text{Inv}_4}$ est tautologique.

$\text{Gph}_{\text{Inv}_5}$ Le point ii) de la condition Inv_2 entraîne que $\text{inv}(G) \circ \text{inv}(G) = \text{Id}_{\mathcal{E}(G)}$.

$\text{Gph}_{\text{Inv}_5}$ est une conséquence du point i) de la condition Inv_2 .

Exercice I.5.4.3 (Correspondance entre graphes à involution et graphes non-orientés) Faire la démonstration

- 1) du point i) de la proposition I.2.19.
- 2) de la proposition II.1.6.
- 3) du point iii) de la proposition I.2.19.
- 4) du point iv) de la proposition I.2.19.
- 5) du point v) de la proposition I.2.19.
- 6) du point vi) de la proposition I.2.19.

Exercice I.5.4.4 (Quelques propriétés du graphe à involution associé à un graphe non-orienté)

Les notations sont celles I.2.17.1 à I.2.17.4.

1) (Produit fibré)

Montrer que pour tout ensemble X et tout couple d'applications

$$(\alpha : X \rightarrow \mathcal{E}(G), \beta : X \rightarrow \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G))$$

vérifiant

$$\varepsilon(G) \circ \alpha = \pi_{1,2}(G) \circ \beta ;$$

i.e. pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}(G) \\ \beta \downarrow & & \varepsilon(G) \downarrow \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\pi_{1,2}(G)} & \mathcal{P}_{1,2}(G) \end{array} \quad \text{il existe une unique application}$$

$$\gamma : X \rightarrow \mathcal{E}^{Inv}(G) \text{ telle que } \alpha = \theta(G) \circ \gamma \text{ et } \beta = \varepsilon^{Inv}(G) \circ \gamma .$$

Solution

Unicité Si une telle application γ existe, pour tout $x \in X$,

$$\theta(G)(\gamma(x)) = \alpha(x) \text{ et } \varepsilon^{Inv}(G)(\gamma(x)) = \beta(x) ;$$

ce qui entraîne $\gamma(x) = (\alpha(x), \beta(x))$; ce qui assure l'unicité de γ .

Existence Reste donc à que $\gamma(x) := (\alpha(x), \beta(x))$ définit bien une japplication à valeurs dans $\mathcal{E}^{Inv}(G)$; précisément (cf. I.2.17.1.) puisque $\varepsilon(G)(\alpha(x)) = \pi_{1,2}(G)(\beta(x))$, $(\alpha(x), \beta(x)) \in \mathcal{E}^{Inv}(G)$; ce qui assure l'existence de γ .

2) (Fibre)

a) Pour tout $x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$,

déterminer $\theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\})$ en fonction de $\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(y, z)\})$ pour $(y, z) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$.

Solution

Pour tout $x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, $\theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}) = (\varepsilon(G) \circ \theta(G))^{-1}(\{x\})$; qui vaut encore (cf. I.2.17.4.) $(\pi_{1,2}(G) \circ \varepsilon^{Inv}(G))^{-1}(\{x\}) = \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{\pi_{1,2}(G)^{-1}(\{x\})\})$.

Si $x = \{u\}$ pour $u \in \mathcal{V}(G)$ est un singleton ,

$$\pi_{1,2}(G)^{-1}(\{x\}) = \{(u, u)\} \text{ et } \theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}) = \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, u)\}) . \quad 1$$

Si $x = \{u, v\}$ pour $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ est une paire ,

$$\begin{aligned} \pi_{1,2}(G)^{-1}(\{x\}) &= \{(u, v), (v, u)\} \\ \text{et } \theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}) &= \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\}) \cup \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(v, u)\}) . \end{aligned} \quad 2$$

b) Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, la restriction

$\theta(G)|_{\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})}$ de $\theta(G)$ à $\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})$ est une bijection sur $\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})$.

Solution

— Pour tout $(e, u, v) \in \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})$, $\varepsilon(G)(\theta(G)(e, u, v)) = \pi_{1,2}(G)(\varepsilon^{Inv}(G)(e, u, v))$ (cf. I.2.17.4;) ce qui entraîne que $\varepsilon(G)(e) = \pi_{1,2}(G)(u, v) = \{u, v\}$; ce qui entraîne que $\theta(G)|_{\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})}$ est bien à valeurs dans $\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})$.

— Pour tout $e \in \varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})$, (e, u, v) est l'unique antécédent de e dans $\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})$; ce qui prouve que $\theta(G)|_{\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})} : \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\}) \rightarrow \varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})$ est une bijection .

3) (Voisins, prédécesseurs, successeurs)

Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8,) et G^{Inv} le *graphe à involution associé* (cf. la définition I.2.18.)

Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, la restriction $\text{Id}_{\mathcal{V}(G)|_{N_{G^{Inv}}^-(u)}}$ (resp. $\text{Id}_{\mathcal{V}(G)|_{N_{G^{Inv}}^+(u)}}$) de l'identité de $\mathcal{V}(G)$ à l'ensemble des produits cartésiens (cf. le point ii de la définition I.1.7,) (resp. à l'ensemble des successeurs,) du sommet u de G^{Inv} , est une bijection à valeurs dans l'ensemble $N_G(u)$ des voisins (cf. le point v de la définition I.2.12,) du sommet u dans le *graphe non-orienté* G .

Solution

On prouve le résultat pour $N_{G^{Inv}}^-(u)$; celui pour $N_{G^{Inv}}^+(u)$ se prouvant exactement de la même manière.

Soit $u \in \mathcal{V}(G)$. Pour tout $v \in \mathcal{V}(G)$, $v \in N_{G^{Inv}}^-(u)$ si et seulement si il existe $e \in \mathcal{E}(G^{Inv})$ tel que $\varepsilon(G^{Inv})(e) = (v, u)$; c'est-à-dire, par définition même de G^{Inv} , si et seulement si il existe $(e, v, u) \in \mathcal{E}^{Inv}(G)$.

Ceci équivaut encore, par construction au fait qu'il existe $e \in \mathcal{E}(G)$ tel que $\varepsilon(G)(e) = \{u, v\}$; ce qui équivaut finalement au fait que $v \in N_G(u)$.

I.5.5 . – Graphes finis

Exercice I.5.5.1 (Graphes associés) 1) (Quelques exemples)

Pour $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un *graphe fini non-orienté*, donner, dans les cas suivants, son *graphe à involution associé* G^{Inv} au sens de la définition I.2.18 :

a) (Graphe isolé)

$G := \mathbf{I}_n$ le *graphe isolé* à n sommets (cf. la définition I.4.9;)

Solution

$G^{Inv} = \mathbf{I}_n = G$.

b) (Graphe complet)

$G := \mathbf{K}_2$ est le *graphe complet* à 2 sommets (cf. la définition I.4.14;)

Solution

Par définition du *graphe à involution associé* on aura $\mathcal{V}(G^{Inv}) = \mathcal{V}(G) = \{1, 2\}$. Comme $\mathcal{E}(G) = \{\{1, 2\}\}$, il résulte de I.2.17.1, que

$$\mathcal{E}(G^{Inv}) = \mathcal{E}^{Inv}(G) = \{(\{1, 2\}, 1, 2), (\{1, 2\}, 2, 1)\}$$

qui est en bijection avec $\{(1, 2), (2, 1)\}$; ce qui permet de construire un isomorphisme de graphes à involution

$$G^{Inv} \cong \left(\{1, 2\}, \{(\{1, 2\}, 1, 2), (\{1, 2\}, 2, 1)\}, \begin{array}{l} (1, 2) \mapsto (\{1, 2\}, 1, 2) \quad (1, 2) \mapsto (\{1, 2\}, 2, 1) \\ (2, 1) \mapsto (\{1, 2\}, 2, 1) \quad (2, 1) \mapsto (\{1, 2\}, 1, 2) \end{array} \right).$$

c) (Boucle)

$G := (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \emptyset\}\})$ est le *graphe fini non-orienté* ayant un unique sommet $\emptyset$ et une seule arête $\{\emptyset, \emptyset\}$ qui est une *boucle* (cf. le point iv de la définition I.2.12.) L'application $\varepsilon(G)$ est bien évidemment donnée par $\varepsilon(G)(\{\emptyset, \emptyset\}) = \{\emptyset, \emptyset\}$.

Solution

On aura $\mathcal{E}(G^{Inv}) = \mathcal{E}^{Inv}(G) = \{(\{\emptyset, \emptyset\}, \emptyset, \emptyset)\}$.

2) Soient $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un *graphe fini non-orienté* et G^{Inv} le *graphe à involution associé* associé (cf. la définition I.2.18.)

a) Comparer $\#(\mathcal{E}(G))$ et $\#(\mathcal{E}(G^{Inv}))$.

Solution

On notera $\mathcal{P}_1(G) := \mathcal{P}_1(\mathcal{V}(G))$, (resp. $\mathcal{P}_2(G) := \mathcal{P}_2(\mathcal{V}(G))$), l'ensemble des singletons formés d'un sommet de G , (resp. des paires formées de deux sommets distincts de G .)

D'après la définition I.2.18, $\mathcal{E}(G^{Inv}) = \mathcal{E}^{Inv}(G)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(G^{Inv}) &= \mathcal{E}^{Inv}(G) \\
 &= \prod_{x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)} (\varepsilon(G) \circ \theta(G))^{-1}(\{x\}) \\
 &= \prod_{x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)} \theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}) \\
 &= \prod_{x \in \mathcal{P}_1(G)} \theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}) \\
 &\cup \prod_{x \in \mathcal{P}_2(G)} \theta(G)^{-1}(\{\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})\}).
 \end{aligned}$$

Il résulte alors du point 1 du point a de la question 2 de l'exercice I.5.4.4 I.5.4 du point 2 du point a de la question 2 de l'exercice I.5.4.4 I.5.4 que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(G^{Inv}) &= \mathcal{E}^{Inv}(G) \\
 &= \prod_{u \in \mathcal{V}(G)} \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, u)\}) \\
 &\cup \prod_{\{u, v\} \in \mathcal{P}_2(G)} \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\}) \cup \varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(v, u)\}).
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit, tous les ensembles considérés ici étant finis :

$$\begin{aligned}
 \#(\mathcal{E}(G^{Inv})) &= \#(\mathcal{E}^{Inv}(G)) \\
 &= \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, u)\})) \\
 &\quad + \sum_{\{u, v\} \in \mathcal{P}_2(G)} \#(\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(u, v)\})) + \#(\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(v, u)\})).
 \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après le point b de la question 2 de l'exercice I.5.4.4 I.5.4, que :

$$\begin{aligned}
 \#(\mathcal{E}(G^{Inv})) &= \#(\mathcal{E}^{Inv}(G)) \\
 &= \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u\}\})) \\
 &\quad + \sum_{\{u, v\} \in \mathcal{P}_2(G)} 2\#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})) \\
 &= 2 \cdot \prod_{x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)} \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{x\})) \\
 &\quad - \prod_{u \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u\}\})).
 \end{aligned}$$

1

b) Confronter la formule obtenue aux constructions de la question 1.

Solution

1.a Dans le cas du graphe isolé, la formule $0 = 0$ n'est certes pas très éclairantes.

1.b On a ici $\#(\mathcal{E}(\mathbf{K}_2^{Inv})) = 2 \cdot \#(\mathcal{E}(\mathbf{K}_2))$; ce qui s'explique par le fait que $\forall u \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_2)$, $\varepsilon(\mathbf{K}_2)^{-1}(\{\{u\}\}) = \mathcal{E}^{Inv}(\mathbf{K}_2)^{-1}(\{\{u\}\}) = \emptyset$.

Exercice I.5.5.2 (Propriétés des degrés) 1) a) Faire la démonstration du point ii de la proposition I.3.7.

Solution

Pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, d'après le point iii de la définition I.3.5, $d_{G^{Inv}}(u) = d_{G^{Inv}}^-(u) + d_{G^{Inv}}^+(u)$; qui vaut encore, en vertu du point i de la proposition I.3.7, $2 \cdot d_{G^{Inv}}^-(u)$; si bien que, d'après le point i de la définition I.3.5, on a :

$$d_{G^{Inv}}(u) = 2 \cdot d_{G^{Inv}}^-(u) = 2 \cdot \sum_{v \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon(G^{Inv})^{-1}(\{(v, u)\})) , \text{ qui vaut encore (cf. la définition I.2.18.) } 2 \cdot \sum_{v \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon^{Inv}(G)^{-1}(\{(v, u)\})) ; \text{ ce qui vaut encore, en vertu du point b de la question 2 de l'exercice I.5.4.4 I.5.4 , } 2 \cdot \sum_{v \in \mathcal{V}(G)} \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u, v\}\})) .$$

On a finalement, en vertu de la définition I.3.6, $d_{G^{Inv}}(u) = 2 \cdot (d_G(u) - \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u\}\})))$.

b) Confronter la formule obtenue ci-dessus aux exemples de graphes à involution associés connus et en particulier ceux construits à l'exercice I.5.5.1 .

Solution

I.5.5.1.1.a Ici encore la formule $0 = 0$ ne sera sans doute pas très éclairante.

I.5.5.1.1.b Dans le cas du graphe complet $\mathbf{K}_2$, (ou même d'ailleurs de $\mathbf{K}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est un graphe non-orienté qui n'a pas de boucle (cf. le point iv de la définition I.2.12.) Le terme $\#(\varepsilon(G)^{-1}(\{\{u\}\}))$ est donc nul pour tout $u \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_n)$. On a bien $d_{\mathbf{K}_n}(u) = n - 1$ et $d_{\mathbf{K}_2^{Inv}}(u) = 2n - 2$ d'où

$$\forall u \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_n), d_{\mathbf{K}_2^{Inv}}(u) = 2 \cdot d_{\mathbf{K}_n}(u) .$$

I.5.5.1.1.c On rappelle que dans ce cas, on doit « compter deux fois les boucle s » (cf. la définition I.3.6,) $d_G(\emptyset) = 2$. On aura encore $d_{G^{Inv}}(\emptyset) = 2$; puisque dans la construction du graphe à involution associé on ne « double pas les boucle s » (cf. I.5.4.I.5.4.2.a.1.) La formule est donc bien vérifiée dans ce cas encore.

2) Faire la démonstration du point iii de la proposition I.3.7.

Solution

Soit $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \text{inv}(G))$ un graphe fini à involution .

On a établi (cf. la proposition II.1.6,) on a un isomorphisme de graphes à involution $G \cong G^{N-O^{Inv}}$. Comme, par ailleurs (cf. la définition I.2.15 et la définition I.2.18,) $\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}(G^{N-O}) = \mathcal{V}(G^{N-O^{Inv}})$, il résulte que

$$\forall u \in \mathcal{V}(G), d_G(u) = d_{G^{N-O^{Inv}}}(u) .$$

Le point ii de la proposition I.3.7 ((cf. le point a de la question 1 ,) entraîne alors que

$$\forall u \in \mathcal{V}(G), d_G(u) = d_{G^{N-O^{Inv}}}(u) = 2 \cdot (d_{G^{N-O}}(u) - \#(\varepsilon(G^{N-O})^{-1}(\{\{u\}\}))) .$$

Or d'après le point b de la question 2 de l'exercice I.5.4.4 I.5.4 , $\#(\varepsilon(G^{N-O})^{-1}(\{\{u\}\})) = \#(\varepsilon(G^{N-O^{Inv}})^{-1}(\{(u, u)\}))$ qui vaut encore $\#(\varepsilon(G)^{-1}(\{(u, u)\}))$.

Il en résulte donc que

$$\forall u \in \mathcal{V}(G), d_{G^{N-O}}(u) = \frac{1}{2}d_G(u) + \#(\varepsilon(G)^{-1}(\{(u, u)\})) .$$

I.5.6 . – Graphes finis simples non-orientés

Exercice I.5.6.1 (Nombre d'arêtes) Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un graphe fini simple non-orienté .

Déterminer le nombre d'arêtes $\#(\mathcal{E}(G))$ de G en fonction des degrés des sommets de G .

Solution

Notons $\mathcal{X} := \{(u, e) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{E}(G) ; u \in \varepsilon(G)(e)\}$; c'est-à-dire le sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{V}(G) \times \mathcal{E}(G)$ formé des couples dont le premier élément est un sommet u et le second une arête dont u est une extrémité .

Le principe consiste à calculer le nombre d'éléments de $\mathcal{X}$ de deux manières différentes, soit en groupant ces éléments

par colonne, soit par ligne. Pour formaliser cette idée introduisons :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{V}(G) \\ (u, e) &\longmapsto u \\ \lambda : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{E}(G) \\ (u, e) &\longmapsto e. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{X} = \coprod_{v \in \mathcal{V}(G)} \gamma^{-1}(\{v\}) = \coprod_{e \in \mathcal{E}(G)} \lambda^{-1}(\{e\}). \quad \text{I.5.6.1.1}$$

$\gamma^{-1}(\{u\})$ est précisément l'ensemble des couples dont le second élément est une arête d'extrémité u si bien que

$$\#\left(\gamma^{-1}(\{u\})\right) = \#\left(N_G(u)\right) = d_G(u) \text{ (cf. le lemme I.4.7.)}$$

$\lambda^{-1}(\{e\})$ est l'ensemble des couples dont le premier élément est une extrémité de e . Or dans un graphe simple (cf. la définition I.4.1.) une arête a exactement 2 extrémités si bien que $\#\left(\lambda^{-1}(\{e\})\right) = 2$.

Alors I.5.6.1.1 donne lieu à la suite d'implications :

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} \#\left(\gamma^{-1}(\{u\})\right) &= \#\left(\mathcal{X}\right) = \sum_{e \in \mathcal{E}(G)} \#\left(\lambda^{-1}(\{e\})\right) \\ \Rightarrow \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} d_G(u) &= \sum_{e \in \mathcal{E}(G)} 2 \\ \Rightarrow 2\#\left(\mathcal{E}(G)\right) &= \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} d_G(u). \end{aligned}$$

Exercice I.5.6.2 (Graphes à n sommets) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel .

Combien existe-t-il de graphes finis simples non-orientés $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ tels que

- $\mathcal{V}(G) = [1; n]$;
- $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}_{1,2}([1; n])$;
- $\varepsilon(G) = \text{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}([1; n])|_{\mathcal{E}(G)}}$?

Solution

Sous les conditions ci-dessus un tel graphe est complètement déterminé par la donnée de $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}_{1,2}([1; n])$; autrement dit l'ensemble de ces graphes est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}_{1,2}([1; n]))$ qui est un ensemble fini à

$$2^{\#\left(\mathcal{P}_{1,2}([1; n])\right)} \text{ éléments soit } 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice I.5.6.3 (Graphes réguliers) Soit G un graphe k -régulier possédant n sommets .

Combien d'arêtes G possède-t-il ?

Solution

La formule de l'exercice I.5.6.1 devient alors $2\#\left(\mathcal{E}(G)\right) = k\#\left(\mathcal{V}(G)\right)$.

Exercice I.5.6.4 (Lemme des poignées de main) Soit G un graphe fini simple non-orienté .

Montrer que le nombre de sommets de degré impair dans G est pair.

Solution

Notons $P := \{u \in \mathcal{V}(G) ; d_G(u) \equiv 0 [2]\}$ et $I := \{u \in \mathcal{V}(G) ; d_G(u) \equiv 1 [2]\}$. Alors $\mathcal{V}(G) = P \cup I$ et $P \cap I = \emptyset$. Il s'ensuit, d'après l'exercice I.5.6.1, que $2\#\left(\mathcal{E}(G)\right) = \sum_{u \in P} d_G(u) + \sum_{u \in I} d_G(u)$. En réécrivant cette

égalité modulo 2, il vient $0 = 2\#\left(\mathcal{E}(G)\right) = 0\#\left(P\right) + \#\left(I\right)$; ce qui entraîne $\#\left(I\right) \equiv 0 [2]$.

Ce résultat est connu sous le nom de « lemme des poignées de main ».

Exercice I.5.6.5 (Graphe des arêtes) Soit $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ un graphe . On définit le graphe des arêtes de G $L(G)$ de la manière suivante :

- $\mathcal{V}(L(G)) = \mathcal{E}(G)$.
- Il y a une arête entre deux sommets e et f de $L(G)$ si les arêtes e et f dans G ont un sommet en commun : $\forall (e, f) \in (\mathcal{V}(L(G)) \times \mathcal{V}(L(G))) = (\mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G)), \{e, f\} \in \mathcal{E}(L(G)) \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{V}(G), u \in \varepsilon(G)(e) \cap \varepsilon(G)(f)$.

1) (Chemin de longueur n)

Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{P}_n)$ du *chemin* $\mathbf{P}_n$ pour $n \geq 2$.

Solution

$$L(\mathbf{P}_n) \cong \mathbf{P}_{n-1} .$$

2) (Cycle de longueur n)

Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{C}_n)$ du *cycle* $\mathbf{C}_n$ pour $n \geq 3$.

Solution

$$L(\mathbf{C}_n) \cong \mathbf{C}_n .$$

3) (Graphe complet)

Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{K}_3)$ du *graphe complet* $\mathbf{K}_3$.

Solution

Comme $\mathbf{K}_3 \cong \mathbf{C}_3$,

$$L(\mathbf{K}_3) \cong L(\mathbf{C}_3) \cong \mathbf{C}_3 \cong \mathbf{K}_3^a .$$

a. On a admis ici le résultat relativement intuitif que si deux *graphes* sont *isomorphes* leurs *graphes des arêtes* respectifs le sont aussi. On pourrait écrire l'argument dans le détail; et même se demander s'il y a une réciproque.

4) Étudier $L(\mathbf{K}_4)$.

5) (Graphes k -réguliers)

Si G est un *graphe k -régulier*, montrer que $L(G)$ est ℓ -régulier pour un *entier naturel* $\ell \in \mathbb{N}$ à déterminer.

Solution

Pour tout $e \in \mathcal{V}(L(G)) = \mathcal{E}(G)$ il existe un unique (cf. la définition I.4.1.) $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ tel que $\varepsilon(G)(e) = \{u, v\}$. Les sommets adjacents à e dans $L(G)$ sont alors les arêtes de G distinctes de e et ayant u ou v comme extrémité.

Or puisque G est k -régulier il y a exactement k arêtes d'extrémité u (resp. v .) dont e elle-même; et donc exactement $k - 1$ arêtes d'extrémité u (resp. v .) distincte de e . Le sommet e de $L(G)$ a donc $\ell = 2k - 2$ voisins dans $L(G)$. Le *graphe fini simple non-orienté* $L(G)$ est donc $2k - 2$ -régulier.

Exercice I.5.6.6 (Caractérisation des graphes G vérifiant $L(G) = G$) 1) Montrer que

$$2\#(\mathcal{E}(L(G))) = \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)(d_G(x) - 1) .$$

Solution

Soit $G = (X, E)$ un *graphe contenant une arête*. Le degré $d_{L(G)}(x, y)$ de l'arête $(x, y) \in E$ est $(d_G(x) - 1) + (d_G(y) - 1)$. Donc :

$$\begin{aligned} 2\#(\mathcal{E}(L(G))) &= \sum_{e \in \mathcal{E}(G)} d_{L(G)}(e) \\ &= \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}(G)} (d_G(x) - 1) + (d_G(y) - 1) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} \sum_{y \in N_G(x)} (d_G(x) - 1) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)(d_G(x) - 1) . \end{aligned}$$

2) En déduire tous les graphes G tels que $L(G) = G$.

Solution

Soit $G = (X, E)$ tel que $L(G) = G$. Soit $L(G) = (X', E')$ son graphe des arêtes . Par hypothèse, $\#(X) = \#(E) = \#(E') = \#(X')$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\#(E') &= 2\#(E) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)^2 - 2\#(E) . \end{aligned}$$

De $\#(E) = \#(X)$, on déduit donc :

$$\sqrt{\frac{1}{\#(X)} \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)^2} = 2 .$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{\#(E)} \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x) \\ &= \frac{1}{\#(X)} \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x) . \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{\#(X)} \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x) = \sqrt{\frac{1}{\#(X)} \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)^2} .$$

D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $(d_G(x))_{x \in X}$ et $(1)_{x \in X}$, cette égalité n'est vraie que si tous les $d_G(x)$ sont égaux, c'est-à-dire si G est régulier. Dans ce cas, G est nécessairement 2-régulier, donc une union disjointe de cycles. Réciproquement, une union disjointe de cycles est égale à son graphe des arêtes.