I . – Graphes

I.0 . – Introduction

Ce chapitre (I) peut sembler particulièrement long ; cependant on n'attend pas une lecture minutieuse des paragraphes I.1.13 et I.3.11 qui n'ont été inclus dans le texte que pour rappeler des définitions souvent bien connues et auxquels on conseille surtout de se rapporter en cas de besoin. On pourrait même ne lire le paragraphe I.1.13 qu'à partir de la définition I.1.13.10.

Les paragraphes I.1 et I.2 donnent des définitions assez générales dont il peut être agréable de disposer dans un souci de cohérence. Néanmoins les notions dont il sera fait majoritairement usage dans la suite du texte se trouvent dans le paragraphe I.4 et en particulier celle de *graphe fini simple non-orienté* (cf. la définition I.4.4.) Il est en particulier indispensable de comprendre les exemples I.4.9 à I.4.15 auxquels nous nous rapporterons fréquemment dans la suite et qui servirons de modèles élémentaires aux constructions que nous ferons dans les chapitres ultérieurs.

La proposition I.4.3 est particulièrement utile puisqu'elle fournit des critères permettant de comparer des *graphes* entre eux.

I.1 . – Le vocabulaire des graphes

Définition I.1.1 (Graphe) Un *graphe* G noté $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *triplet* tel que :

Gph_1) **(Sommets)**
$\mathcal{V}(G)$ est un *ensemble* appelé *ensemble des sommets* [1] de G ;

Gph_2) **(Arêtes)**
$\mathcal{E}(G)$ est un *ensemble* appelé *ensemble des arêtes* [2] de G ;

Gph_3) **(Extrémités)**
$\varepsilon(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ est une *application* appelée *application extrémités* .

Définition I.1.2 (Sommet) Pour un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, un *élément* de $\mathcal{V}(G)$ s'appelle un *sommet* ou *nœud* de G.

Définition I.1.3 (Arête) Pour un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, un *élément* de $\mathcal{E}(G)$ s'appelle une *arête* ou un *arc* de G.

Définition I.1.4 (Extrémités) Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* et $e \in \mathcal{E}(G)$ une *arête* de G.

i) Le *couple* $(u, v) := \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ s'appelle le *couple des extrémités de l'arête* e.

1. vertex en *anglais*
2. edge en *anglais*

ii) La *première projection* (resp. *deuxième projection* ,) (cf. la définition I.1.13.17,) $\mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(G)$ composée avec $\varepsilon(G)$ est une *application*

$$\mathfrak{o}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G) \text{ (resp. } \mathfrak{e}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G) \text{) .} \tag{1}$$

Pour toute *arête* $e \in \mathcal{E}(G)$ de G,
— $\mathfrak{o}(G)(e)$ s'appelle l'*origine de l'arête* [3] ou la *source de l'arête* e.
— $\mathfrak{e}(G)(e)$ s'appelle la *destination de l'arête* [4] ou la *cible de l'arête* e.

Ainsi si $(u, v) = \varepsilon(G) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ l'*origine* ou *source* de l'*arête* e est le *sommet* u ; tandis que sa *cible* ou *destination* est le *sommet* v.

Exemple I.1.5 (Quelques graphes) a) (**Graphe vide**)
Puisqu'il existe une *unique application* $\mathrm{Id}_\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ (cf. le point c de l'exemple I.1.13.14,) on peut se demander si le triplet $\left(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\right)$ est un graphe. On constate qu'il répond en effet bien aux *axiomes* Gph_1 à Gph_3 de la définition I.1.1 et on l'appellera le *graphe vide* .

b) (**Graphe isolé**)
Considérons maintenant un *ensemble* V quelconque et le *triplet* $\left(V, \emptyset, \varepsilon\right)$ $\varepsilon : \emptyset \to V \times V$ est l'*unique application* de l'*ensemble vide* dans un *ensemble* quelconque (cf. le point c de l'exemple I.1.13.14.) Ce *triplet* est encore un *graphe* qu'on appellera le *graphe isolé* d'*ensemble des sommets* V. Le *graphe vide* (cf. le point a ,) est évidemment un cas particulier de *graphe isolé* .

c) ($\mathbf{K}_2$)
Le *graphe* usuellement noté $\mathbf{K}_2$
— a pour *ensemble des sommets* , $\mathcal{V}(\mathbf{K}_2) = \{1, 2\}$
— et pour *ensemble des arêtes* , $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
— On a :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon(\mathbf{K}_2) : & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) & \longrightarrow & \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \times \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \\ & x & \longmapsto & x \, ; \end{array}$$

C'est un cas particulier de *graphe complet* (cf. la définition I.4.14 ;) c'est également un cas particulier de *chemin* (cf. la définition I.4.10 ;) et même à l'extrême de *cycle* (cf. I.4.12 ;) même si nous ne retiendrons sans doute pas cette convention dans la suite.

Définition I.1.6 (Boucle) Dans un *graphe* $G := \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\right)$, une *boucle* est une *arête* dont la *source* et la *cible* (ou encore *origine* et la *destination* ,) sont un même *sommet* ; autrement dit $e \in \mathcal{E}(G)$ est une *boucle* si $\exists u \in \mathcal{V}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (u, u)$.

Définition I.1.7 (Sommets adjacents/voisins) Soit $G := \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\right)$ un *graphe*

i) (**Prédécesseur/successeur**)
Pour tout $(e, u, v) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, si $\varepsilon(G)(e) = (u, v)$, on dit que u est un *prédécesseur* de v et que v est un *successeur* de u.

Étant donné un *sommet* $u \in \mathcal{V}(G)$ de G,

ii) (**Prédécesseurs**)
on note $N_G^-(u) := \{v \in \mathcal{V}(G) \, ; \, \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (v, u)\}$ l'*ensemble des prédécesseurs* de u ;

3. origin en *anglais*
4. end en *anglais*

iii) (**Successeurs**)
on note $N_G^+(u) := \{v \in \mathcal{V}(G) \,;\, \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (u,v)\}$ l'*ensemble* sccr de u ;

iv) (**Voisins**)
on note $N_G(u) := N_G^-(u) \cup N_G^+(u)$ qu'on appelle l'*ensemble des voisins* de u.

On remarque que $\forall (u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ u \in N_G^+(v) \Leftrightarrow v \in N_G^-(u)$; ce qui entraîne encore l'équivalence $u \in N_G(v) \Leftrightarrow v \in N_G(u)$. On dit, dans ce cas que u et v sont *voisins* ou *adjacents* .

Définition I.1.8 (Relation d'adjacence) Pour tout *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, sa *relation d'adjacence* $\mathcal{R}(G)$ est la *relation binaire* (cf. le point iv de la définition I.1.13.10,) définie par $u\,\mathcal{R}(G)\,v$ si u et v sont *adjacents* (ou *voisins* ;) c'est-à-dire

$$\forall (u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ u\,\mathcal{R}(G)\,v \Leftrightarrow \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (u,v) \text{ ou } \varepsilon(G)(e) = (v,u)\ .$$

La *relation d'adjacence* est manifestement *symétrique* (cf. I.1.13.11.ii ;) mais n'a aucune raison a priori, d'être *réflexive* (cf. le point i de la définition I.1.13.11,) ni d'être *transitive* (cf. le point iv de la définition I.1.13.11.) .

Définition I.1.9 (Arêtes adjacentes) Deux *arêtes* $e \in \mathcal{E}(G)$ et $f \in \mathcal{E}(G)$ d'un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, sont *adjacentes* (ou *incidentes*) si elles ont une *extrémité* commune ; autrement dit

$$\exists (u,v,w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),$$

$$\begin{array}{rlcl} & \varepsilon(G)(e) = (u,v) & \wedge & \varepsilon(G)(f) = (u,w) \\ \text{ou} & \varepsilon(G)(e) = (u,v) & \wedge & \varepsilon(G)(f) = (w,u) \\ \text{ou} & \varepsilon(G)(e) = (v,u) & \wedge & \varepsilon(G)(f) = (u,w) \\ \text{ou} & \varepsilon(G)(e) = (v,u) & \wedge & \varepsilon(G)(f) = (w,y)\ ; \end{array}$$

cette définition étant assez lourde dans un cas très général ; mais amenée à se simplifier dans le cas des *graphes simples* (cf. la définition I.4.1.)

Proposition I.1.10 (Graphe des arêtes) *Étant donné un graphe* $G := G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, *on note*

$$L(G) := L(G) := \big(\mathcal{V}(L(G)), \mathcal{E}(L(G)), \varepsilon(L(G))\big)$$

où :

— $\mathcal{V}(L(G)) := \mathcal{E}(G)$;
— $\mathcal{E}(L(G)) := \big\{(e,f) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G) \,;\, \mathfrak{o}(G)(f) = \mathfrak{e}(G)(e)\big\}$ *(cf. I.1.4.ii.1 ;)*
— $\varepsilon(L(G)) : \mathcal{E}(L(G)) \to \mathcal{V}(L(G)) \times \mathcal{V}(L(G))\ ,\ (e,f) \mapsto (e,f)$.

Alors $L(G)$ *est un graphe appelé graphe des arêtes de* G.

***Démonstration** : (cf. l'exercice I.5.6.5.)*

Définition I.1.11 (Graphes isomorphes) Un *graphe* $\big(\mathcal{V},\mathcal{E}\varepsilon\big)$ est *isomorphe* à un *graphe* $\big(\mathcal{V}',\mathcal{E}'\varepsilon'\big)$, s'il existe un couple de *bijections* :

$$\left(\begin{array}{lccc} \alpha : & \mathcal{V} & \to & \mathcal{V}' , \\ \beta : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E}' \end{array} \right)$$

tel que

$$\forall (e,v,w) \in \mathcal{E}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V},\ \varepsilon(e) \ = \ (v,w) \ \Leftrightarrow \ \varepsilon'\big(\beta(e)\big) \ = \ \big(\alpha(v),\alpha(w)\big) \ .$$

Proposition I.1.12 (Propriétés des graphes isomorphes) *Étant donnés des graphes* $G \ := \ \big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G)\big)$, $H \ := \ \big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H)\big)$, $I \ := \ \big(\mathcal{V}(I),\mathcal{E}(I),\varepsilon(I)\big)$:

i) ***(Réflexivité)***
Le graphe G *est isomorphe à lui-même ;*

ii) ***(Symétrie)***
Si G *est isomorphe à* H, H *est isomorphe à* G ; *on dira alors simplement que* G *et* H *sont isomorphes ;*

iii) ***(Transitivité)***
Si G *est isomorphe à* H *et* H *est isomorphe à* I, G *est isomorphe à* I.

Démonstration : *(cf. l'exercice I.5.4.1.)*

On appellera classe d'isomorphisme de graphes l'« ensemble » des graphes isomorphe à un graphe donné.

I.1.13 . –Ensembles, relations, applications

Nous avons, tout au long du paragraphe I.1 qui précède, fait librement usage des termes « *ensemble* » et « *application* » et de quelques autres qui leur sont intimement liés.

Il ne saurait ici être question de se lancer dans un exposé de « *théorie des ensembles* ». Il s'agit principalement de préciser un certain nombre de notions et de notations quant auxquelles il serait préférable qu'il n'y ait pas de confusion par la suite. La présente section (I.1.13) est plus qu'inspirée par [3] avec quelques emprunts à [1] et [2] ; un voile pudique étant jeté sur [4] comme bien souvent . . .

Suivant les remarques avisées de P. DEHORNOY [6, sec. 3.5], [3, sec. 4.4], on ne saurait faire jouer à une quelconque « *théorie des ensembles* » un rôle qu'elle ne saurait tenir. Bien davantage donc que de « *théorie des ensembles* » il est question ici de *langage ensembliste* dont on souhaiterait qu'il ne soit pas trop malmené par les utilisateurs du présent texte, tant il contribue à assurer la validité des raisonnements qu'il formule. La plus fréquente des erreur consiste, par exemple, à utiliser à contre emploi les symboles $\in$ et $\subset$; en utilisant l'un à la place de l'autre : $a \ \in \ b$ équivaut à $\{a\} \ \subset \ b$ et $a \ \subset \ b$ équivaut à $a \ \in \ \mathcal{P}(b)$.

La signification des symboles utilisez ci-dessus sera donnée au cours de ce paragraphe et nous nous attacherons à préciser le bon usage qui doit en être fait.

Le plus surprenant sans doute est que jamais nous ne donnerons une définition d'*ensemble* ; ce qui ne se fait d'ailleurs pas. On se contentera finalement de spécifier la grammaire du symbole $\in$. Plus surprenant encore on espère convaincre le lecteur que cela suffit en fait pour écrire des raisonement mathématiques ; et surtout assurer leur validité.

Le *systèmede* ZERMELO *fini* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}}$ explicité ci-après fournit un premier point de départ à la théorie **ZFC** donnée à la définition I.3.11.2.9. Il consiste en un certain nombre d'*axiomes* qui sont des *propositions* écrites avec les *symboles de la logique* (cf. I.1.13.1,)et dont les seules *variables* sont des *ensembles* . Il comporte en outre et principalement le *symbole* $\in$ dont en quelque sorte, il fixe la « grammaire ». On pourait, à juste titre, s'étonner une fois encore ici que les *axiomes* de $\mathbf{Z}_{\text{fini}}$ (et ceux de **ZFC** ne feront pas mieux d'ailleurs) ne « construisent un monde où il n'y a que des *ensembles* » alors que l'intuition semble suggérer qu'il « existe » des objets mathématiques de « natures » multiples et diverses. Cependant cemonde » des ensembles est assez vaste pour représenter une partie substantiellle des mathématiques. En outre l'homogénéité de ce système est d'une grande lisibilité pour les questions relatives à la cohérence de l'édifice mathématique.

Les *symboles de la logique du premier ordre* sont les suivant et l'on ne détailera pas ici selon quels critères une *formule* écrite avec ces *symboles* est valide. Nous renvoyons à [5] ceux qu'intéresseraient particulièrement ces questions.

Notation I.1.13.1 (Symboles de la logique du premier ordre) i) $\forall$: pour tout (quantificateur universel ;)

ii) $\exists$: il existe ;

iii) $\text{et ou} \wedge$: et (conjonction ;)

iv) $\text{ou ou} \vee$: disjonction ;

v) $\text{non ou} \not$ négation ;

vi) $\Rightarrow$: implication ; en notant d'ailleurs que ce dernier symbol est introduit par pure comodité ; puisqu'il peut s'exprimer grâce à ceux déjà introduit ci-dessus : En effet $P \Rightarrow Q$ signifie $\not P \vee Q$.

Définition I.1.13.2 (Le système $\mathbf{Z}_{\text{fini}}$) Le *systèmede* ZERMELO *fini* $\mathbf{Z}_{\text{fini}}$ est constitué des *axiomes* suivants :

$\mathbf{Z}_{\text{fini}\,1}$) (***extensionnalité* (*Ext*)**)
$\forall a, b \left(\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b\right) \Rightarrow a = b)$,

$\mathbf{Z}_{\text{fini}\,2}$) (***Paire***)
$\forall a, b\, \exists c\, (\, a \in c \,\text{et}\, b \in c\,)$,

$\mathbf{Z}_{\text{fini}\,3}$) (***union* (*Un*)**)
$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \big(\, \exists y\, (\, x \in y \,\text{et}\, y \in a\,) \Rightarrow x \in b\, \big)$,

$\mathbf{Z}_{\text{fini}\,4}$) (***parties* (*Par*)**)
$\forall a\, \exists b\, \forall x\, \big(\, \forall y\, (\, y \in x \Rightarrow y \in a\,) \Rightarrow x \in b\, \big)$,

et pour chaque *formule ensembliste* $F(x, c)$ où a et b n'apparaissent pas comme *variables libres*

$\mathbf{Z}_{\text{fini}\,5}$) (***séparation* (*Sep*$_F$)**)
$\forall a\, \forall c\, \exists b\, \forall x\, \big(\, x \in b \Leftrightarrow (\, x \in a\, et\, F(x, c\,)\,)\, \big)$.

Remarque I.1.13.3 i) Le corpus d'*axiomes* ci-dessus fournit un énoncé d'*unicité* l'*axiome* $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,1}$ *un ensemble est défini par ses éléments* ; et des énoncés d'*existence* les *axiomes* $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,2}$ à $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,5}$ de la définition I.1.13.2.

ii) Néanmoins la portée des énoncés d'*existence* est assez limitée ; n'assurant l'*existence* d'*ensembles* que comme parties d'*ensembles* déjà existants ; ce qui pourrait bien donner lieu à une théorie sans objets. La nécessité de restreindre les *axiomes de compréhension* aux *axiomes de séparation* s'impose pour échapper au *paradoxe de* BERRY [1, sec. 3.3] et au *paradoxe de* RUSSEL [1, sec. 3.4]. On est alors obligé de réintroduire les *axiomes* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,2}$ à $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,4}$ de la définition I.1.13.2 pour disposer d'un certain nombre d'opérations ensemblistes que l'on est en droit de considérer comme naturelles et intuitives ; et dont l'utilité s'imposera dans le reste de la construction.

iii) Enfin les *axiomes de séparation* font référence à la notion de *formule ensembliste* qu'il serait bon de préciser quelque peu.

Définition I.1.13.4 (Formules ensemblistes (cf. [1, def. 3.13])) Une *formule ensembliste* est une *formule* comportant des *variables*, les *symboles de la logique du premier ordre* (cf. I.1.13.1) et le symbole $\in$. Autrement dit ce sont des formules obtenues en assemblant à l'aide de *négations*, *conjonctions*, *disjonctions*, *implications* et des *formules* de la forme $x = y$ et $x \in y$.

On est cependant habitué à utiliser un certain nombre d'autres symboles comme $\cup$, $\cap$, $\subset$ etc . . . Or ceux-ci ne semblant pas autorisés dans les *formules ensemblistes* (cf. I.1.13.4 ;) ce qui risque de restreindre considérablement la construction de nouveaux ensembles à partir des *axiomes de séparation* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,5}$. On peut néanmoins définir ces symboles comme suite, à partir des *axiomes* de la définition I.1.13.2 :

Notation I.1.13.5 ($\Leftrightarrow$) Nous utiliseront librement dans la suite, pour deux *propositions* P et Q $P \Leftrightarrow Q$ qui ne signifie rien de plus (mais rien de moins d'ailleurs), que $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$.

Définition I.1.13.6 (Symboles du *langage ensembliste*) i) ($\bigcup$)
Grâce à l'*axiome de l'union* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,3}$ et aux *axiomes de séparation* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,5}$, on peut définir $\bigcup$ par la formule $\forall a,\ \forall b,\ \big(\, z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists c,\ (\, c \in a \text{ et } b \in c\,)\,\big)$.

ii) ($\subset$)
$\forall a,\ \forall b,\ \big(\, a \subset b \Leftrightarrow (\,\forall x,\ (x \in a \Rightarrow x \in b)\,\big)$.

iii) ($\emptyset$)
L'*ensemble vide* peut-être défini par la *formule* : $\forall a,\ \big(\, a = \emptyset \Leftrightarrow \forall b,\ (\, b \notin a\,)\,\big)$.

iv) ($\mathcal{P}(\cdot)$)
On définit, grâce à l'*axiome* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,4}$ et aux *axiomes de séparation* l'*ensemble des parties* d'un *ensemble* par la formule : $\forall a,\ \forall b,\ (\, b \in \mathcal{P}(a) \Leftrightarrow b \subset a\,)$.

v) ($\{\cdot,\cdot\}$: **paire**)
Pour deux *ensembles* a et b l'*axiome de la paire* $\mathbf{Z}_{\mathrm{fini}\,2}$ et les *axiomes de séparation* assurent que $\{a, b\}$ est bien un *ensemble* qui ne contient que les seuls *éléments* a et b.

vi) ($\cup$: **réunion**)
Lorsqu'on dispose de $\{a, b\}$, on peut, grâce au point i , définir $a \cup b := \bigcup\{a, b\}$ qu'on appelle la *réunion* des *ensembles* a et b.

vii) ($\cap$)
$\forall a,\ \forall b,\ \forall x, (x \in a \cap b \Leftrightarrow x \in a \text{ et } x \in b)$.

Définition I.1.13.7 (Formules ensemblistes étendues (cf. [3, def. 2.3])) On appelle *formule ensembliste étendue* une *formule* comportant des *variables* , les *symboles de la logique* et les symboles supplémentaires définis à la définition I.1.13.6.

Remarque I.1.13.8 On pourait dès lors se demander s'il est légitime d'utiliser les *formules ensemblistes étendues* de la définition I.1.13.7 pour exposer le reste de la théorie. Sans entrer dans les détails il suffit de savoir qu'on peut en fait se ramner « suivant un processus raisonnable » aux *formules ensemblistes* de la définition I.1.13.4.

Un bon exercice consiste à réécrire avec les *symboles* de la définition I.1.13.6 ceux des *axiomes* de la définition I.1.13.2 qui peuvent l'être leur donnant alors une forme plus lisible et plus usuelle.

Remarque I.1.13.9 (Ensemble vide) Rien dans l'axiomatique de la définition I.1.13.2 n'assure jusqu'ici que l'*ensemble vide* $\emptyset$, défini au point iii de la définition I.1.13.6, existe ; ni même qu'il existe aucun ensemble. Cependant on pourrait s'interroger sur le bien fondé d'une théorie sans objets … De toute façon l'*axiome de l'infini* (cf. l'axiome $\mathbf{Z}_6$ de la définition I.3.11.2.3r)emediera à cette lacune. Même si nous en donnerons une formulation impliquant le *symbole* $\emptyset$ il faut se persuader qu'on pourrait en donner une formulation purement *ensembliste* au sens de la définition I.1.13.4 et qu'alors l'*existence* de l'*ensemble vide* s'en déduit grâce à l'axiome $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,5}$ de la définition I.1.13.2 (de *séparation* .)

On va voir que le cadre présenté ci-dessus permet déjà de définir un grand nombre d'objets mathématiques usuels :

Définition I.1.13.10 (Objets usuels) i) (**Singleton**)
L'axiome $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,4}$ et l'axiome $\mathbf{Z}_{\text{fini}\,5}$ de la définition I.1.13.2 permettent de définir, pour tout *ensemble* a, le *singleton* $\{a\} := \{b \in \mathcal{P}(a) \; ; \; b = a\}$.

ii) (**Couples**)
Au regard des *axiomes* de la définition I.1.13.2, seules les *paires* existent (cf. I.1.13.6.vi.) Or dans une *paire* il est impossible de parler de l'ordre des *éléments* : $\{x, y\} = \{y, x\}$. On peut représenter le *couple* (x, y) par $\big\{\{x, y\}, \{x\}\big\}$. C'est alors un bon exercice sur les manipulations des *axiomes* de la définition I.1.13.2 de montrer que $(x, y) \neq (y, x)$.

iii) (**Produit cartésien**)
Dès l'instant où l'on dispose de *couples* , on peut définir le *produit cartésien* de deux *ensembles* a et b noté $a \times b$ par :

$$a \times b := \{(x, y) \; ; \; x \in a, \; y \in b\} .$$

C'est encore un exercice, très formel certes, de voir à quel titre, au vu des *axiomes* de la définition I.1.13.2, c'est bien un *ensemble* .

iv) (**Relation**)
Une *relation* (ou *relation binaire*) sur un *ensemble* a est alors une *partie* R du produit cartésien $a \times a$. À la notation naturellement issue du formalisme développé jusqu'ici $(x, y) \in R$, on préférera bien sûr, celle tout à fait usuelle et connue de $x \; R \; y$.

v) (**Fonction**)
Une *fonction* f d'un *ensemble* a dans un *ensemble* b est une *partie* du *produit cartésien* $a \times b$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in a \times b \times b, \ \big(\ (\ (x,y) \ \in \ f \text{ et } (x,z) \ \in \ f \ ) \ \Rightarrow \ y \ = \ z \ .$$

Autrement dit un *élément* de a possède au plus une *image* par f dans b.
Ici encore on continuera à écrire (comme on l'a toujours fait) $y \ = \ f(x)$ pour $(x,y) \ \in \ f$.

On rappelle maintenant quelques définitions espérons-le bien connues concernant les *relations* et les *fonctions* :

Définition I.1.13.11 (Relations) Soit a un *ensemble* et R une *relation* sur a :

i) (**Réflexivité**)
On dit que R est *réflexive* si $\forall x \in a, \ x \ R \ x$.

ii) (**Symétrie**)
On dit que R est *symétrique* si $\forall x \in a, \ \forall y \in a, \ (\ x \ R \ y \ \Rightarrow \ y \ R \ x \ )$.

iii) (**Antisymétrie**)
On dit que R est *antisymétrique* si $\forall x \in a, \ \forall y \in a, \ \big(\ (\ x \ R \ y \text{ et } y \ R \ x \ ) \ \Rightarrow x \ = \ y \ \big)$.

iv) (**Transitivité**)
On dit que R est *transitive* si $\forall x \in a, \ \forall y \in a, \ \forall z \in a, \ \big(\ (\ x \ R \ y \text{ et } yRZ \ ) \ \Rightarrow x \ R \ z \ \big)$.

v) (**Relation d'équivalence**)
On dit que R est une *relation d'équivalence* si elle est *réflexive* , *symétrique* et *transitive* .

vi) (**Relation d'ordre**)
— On dit que R est une *relation d'ordre* si elle est *réflexive* , *antisymétrique* et *transitive* .
— On dit alors que le *couple* (a, R) est un *ensemble ordonné* .
— On dit que R est une *relation d'ordre total* si $\forall x \in a, \ \forall y \in a, \ (x \ R \ y$ ou $y \ R \ x)$;
— dans ce cas on dit que le *couple* (a, R) est un *ensemble totalement ordonné* .

vii) (**Majorant/minorant** . . .)
Si $(a, \leq)$ est un *ensemble ordonné* et b
$subset a$ une *partie* de a, un *majorant* (resp. *minorant*) pour b (dans a,) est un *élément* $x \ \in \ a$ vérifiant $\forall y \in b, \ (y \leq x)$ resp. $(\forall y \in b, \ (x \leq y))$.
Si b possède un *majorant* (resp. un *minorant*) on dit que b est *majorée* (resp. *minorée* ,)
Un *plus-grand élément* (resp. *plus-petit élément* ,) pour b est un *majorant* (resp. *minorant*) de b appartenant à b.

viii) (**Relation d'ordre stricte**)
Lorsqu'une *relation d'ordre* est notée $\leq$ (resp. $\geq$,) il est usuelle de noter $<$ (resp. $>$,) la *relation d'ordre strict* qui lui est associée et définie par

$$x \ < \ y \ (\text{ resp. } x \ > \ y, \ ) \ \Leftrightarrow \ \big(\ (\ x \ \leq \ y \ (\text{ resp. } x \ \geq \ y \ ) \ ) \text{ et } x \ \neq \ y \ \big) \ .$$

Définition I.1.13.12 (Fonctions) Soit f une *fonction* de a dans b (cf. le point v de la définition I.1.13.10.)

i) (**Domaine**)
On appelle *domaine* de f et on note $\mathrm{Dom}\, f \;:=\; \{x \;\in\; a\,;\, \exists y \;\in\; b,\;\; ; \; f(x) \;=\; y\}$ le *sous-ensemble* de a formé des *éléments* qui ont une *image* par f.

ii) (**Image**)
On appelle *image* de f et on note $\mathrm{Im}\, f \;:=\; \{y \;\in\; b\,;\, \exists x \;\in\; ,\; ; \; f(x) \;=\; y\}$ le *sous-ensemble* de b formé des *éléments* qui ont un *antécédent* dans a.

iii) (**Application**)
On dit que f est une *application* si $\mathrm{Dom}\, f \;=\; a$.

Notation I.1.13.13 Pour deux *ensembles* a et b on peut montrer que les *applications* de a dans b qui sont représentées par des *parties* $a \times b$ *i.e.* sont des *éléments* de $\mathcal{P}(a \times b)$ (cf. le point iv de la définition I.1.13.6,) forment un *ensemble* qu'on notera b^a.

Exemple I.1.13.14 (Applications) a) (**Identité**)
Pour tout *ensemble* a (y compris $a \;=\; \emptyset$) l'*ensemble* a^a contient toujours au moins un *élément* noté Id_a appelé *identité* a et caractérisé par $\forall x \in a,\ \mathrm{Id}_a(x) \;=\; x$.

b) ($a^\emptyset$)
Il existe une *unique application* $\emptyset \;\to\; a$ si bien que $a^\emptyset$ est un *singleton* .

c) ($\emptyset^a$)
Si a n'est pas *vide* il n'existe aucune *application* de a dans $\emptyset$ $\emptyset^a \;=\; \emptyset$ est donc *vide* . En revanche $\emptyset^\emptyset$ est un *singleton* .

d) (**Composition**)
Pour tous a, b, c, la *composition des applications* est une *application*

$$\circ \;:\; b^a \times c^b \;\to\; c^a\ ,\ (f, g) \;\mapsto\; g \;\circ\; f\ .$$

où $g \;\circ\; f$ est définie de la manière bien connue par :

$$\forall x \in a,\ g \;\circ\; f(x) \;=\; g\big(f(x)\big)\ .$$

On appelle $g \;\circ\; f$ l'*application composée* des *applications* f et g. Il est également usuel de parler pour $\circ$ de *loi de composition* (cf. la définition II.4.5.1 ;) $\circ$ n'étant cependant pas *interne* .

Proposition I.1.13.15 (Produit) *Étant donnés deux ensembles a et b, le produit cartésien $a \times b$ (cf. le point iii de la définition I.1.13.10,)*

i) est muni des deux applications

$$\begin{array}{rccc} p: & a \times b & \longrightarrow & a \\ & (x, y) & \longmapsto & x \\ \text{et } q: & a \times b & \longrightarrow & b \\ & (x, y) & \longmapsto & y\ . \end{array}$$

ii) Les applications p et q sont surjectives .

iii) Pour tout ensemble c et tout couple d'applications $\big(f : c \to a, g : c \to b\big)$, il existe une unique application

$$h : c \to a \times b \text{ telle que } p \circ h = f \text{ et } q \circ h = g\,.$$

Remarque I.1.13.16 (Produit) Pour tous a, b, c, l'*application* $(a \times b) \times c \to a \times (b \times c)$, $\big((x,y),z\big) \mapsto \big(x,(y,z)\big)$ est une *bijection* si bien qu'on notera simplement $(x,y,z) := \big((x,y),z\big) \cong \big(x,(y,z)\big)$ le *triplet* et $a \times b \times c$ le *produit cartésien* . De la même manière on écrira $(x,y,z,t) \in a \times b \times c \times d$ pour les *quadruplets* .

Définition I.1.13.17 (Projections) Avec les notations de la proposition I.1.13.15, l'*application* p (resp. q,) est appelée la *première projection* , (resp. la *deuxième projection* ,) ou encore projection sur le premier facteur (resp. projection sur le deuxième facteur.)

Définition I.1.13.18 (Applications) Soit $f : a \to b$ une *application* .

i) **(Injectivité)**
On dit que f est *injective* si $\forall x \in a,\ \forall y \in a,\ (\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\ )$.

ii) **(Surjectivité)**
On dit que f est *surjective* si $\forall y \in b,\ \exists x \in a,\ f(x) = y$.

Par exemple, les *projections* introduite à la définition I.1.13.17 sont des *applications surjectives* .

iii) **(Bijectivité)**
On dit que f est *bijective* si elle est simultanément *injective* et *surjective* . On dira alors que f est une *bijection* .

Il est alors équivalent de dire que f possède une *bijection réciproque* ; c'est-à-dire qu'il existe une *application* $g : b \to a$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_a \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_b \text{ (cf. la question 1 de l'exercice I.5.1.4.)}$$

Définition I.1.13.19 (Restriction) Soient a et b des *ensembles* . Pour tout $c \subset a$, il est immédiat de vérifier que $(c \times b) \subset (a \times b)$. Pour toute *fonction* (resp. *application*) $f : a \to b$ il n'est pas difficile de constater non plus que $f \cap (c \times b)$ représente une *fonction* (resp une *application*) de c dans b, qu'on appellera *restriction* de f à c et qu'on notera $f_{|c}$.

Lemme I.1.13.20 (Propriétés de la restriction) *i) Si $f : a \to b$ est une fonction $f_{|\mathrm{Dom}\,f}$ est une application .*

ii) Si $f : a \to b$ est une application injective , pour tout $c \subset a$, $f_{|c}$ est encore une application injective .

Définition I.1.13.21 (Image directe/réciproque d'une partie)

Étant donnée une *fonction* $f : a \to b$,

i) **(Image directe)**
Pour toute *partie* $c \subset a$ de a, on appelle *image d'directe* (ou simplement *image*) de c par f et on note $f(c)$ l'*ensemble* $f(c) := \{y \in b\,;\ \exists x \in c,\ y = f(x)\}$; qui n'est autre que $\mathrm{Im}\big(f_{|c}\big)$ (cf. la définition I.1.13.19, et le point ii de la définition I.1.13.12.)

ii) (**Image réciproque**)
Pour toute *partie* $d \subset b$ de b, on appelle *image d'réciproque* de d par f l'*ensemble* noté $f^{-1}(d) := \{x \in a \; ; \; f(x) \in d\}$.

Remarque I.1.13.22 (ATTENTION) i) La notation $f^{-1}(d)$ ci-dessus **ne signifie pas qu'il existe** une *fonction* f^{-1} et que $f^{-1}(d)$ soit l'*image d'directe* de d par cette *fonction* .

ii) Dans le cas où f est *bijective* (cf. le point iii de la définition I.1.13.18,) il existe effectivement une *bijection réciproque*

$$g : b \to a \text{ vérifiant } f \circ g = \mathrm{Id}_b \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_a .$$

Alors pour toute $d \subset b$ de b, c'est un exercice (qu'il convient de faire si on ne l'a jamais fait auparavant) on montre que $f^{-1}(d) = g(d)$.

Définition I.1.13.23 (Applications et ordre) Soit $f : (a, \leq_a) \to (b, \leq_b)$ une *application* d'un *ensemble ordonné* (cf. le point vi de la définition I.1.13.11,) $(a, \leq_a)$ dans un *ensemble ordonné* $(b, \leq_b)$.

— On dit que f est une *application croissante* (resp. une *application décroissante* ,) si

$$\forall x \in a, \; \forall y \in a, \; \big(x \leq y \; \Rightarrow \; f(x) \leq_b f(y) \text{ (resp. } f(y) \leq_b f(x) \text{) }\big) .$$

— Si f est *croissante* ou *décroissante* on dit que f est une *application monotone* .

— On dit que f est une *application strictement croissante* (resp. une *application strictement décroissante* ,) si

$$\forall x \in a, \; \forall y \in a, \; \big(x <_a y \; \Rightarrow \; f(x) <_b f(y) \text{ (resp. } f(y) <_b f(x))\big) .$$

— Si f est *strictement croissante* *strictement décroissante* on dit que f est une *application strictement monotone* .

Les définitions ci-dessus ont été données pour les *applications* (cf. le point iii de la définition I.1.13.12 ;) mais on obtiendrait les définitions correspondantes pour les *fonctions* en considérant l'*application* obtenue en restreignant une *fonction* à son *domaine* (cf. le point i du lemme I.1.13.20.)

I.2 . −Graphes à involution, graphes non-orientés

Définition I.2.0 (Involution) Étant donné un *ensemble* e, une *involution* (ou *application involutive*) de e dans lui-même, est une *application* $i : e \to e$ telle que $i \circ i = \mathrm{Id}_e$.

Il et immédiat qu'une telle *application* est *bijective* (cf. le point iii de la définition I.1.13.18.)

Définition I.2.1 (Graphe à involution) Un *graphe à involution* est un *quadruplet* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ tel que :

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}1}$) (**Sommets**)
$\mathcal{V}(G)$ est un *ensemble* (cf. Gph_1.)

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}2}$) (**Arêtes**)
$\mathcal{E}(G)$ est un *ensemble* (cf. Gph_2.)

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}3}$) (**Extrémités**)
$\varepsilon(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ est une *application* (cf. Gph_3.)

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}4}$) $\mathbf{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ est une *application* .

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}5}$) $\mathbf{inv}(G) \circ \mathbf{inv}(G) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)}$.

$\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}6}$) $\forall (e,u,v) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ (u,v) = \varepsilon(G)(e) \Rightarrow (v,u) = \varepsilon(G)\big(\mathbf{inv}(G)(e)\big)$.

Autrement dit G est un *graphe à involution* si et seulement si

i) $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *graphe* , au vu des *axiomes* $\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}1}$ à $\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}3}$ correspondant aux *axiomes* Gph_1 à Gph_3 de la définition I.1.1. qu'on appellera le *graphe sous-jacent* à G ;

ii) et de plus $\mathbf{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ une *application* satisfaisant l'axiome $\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}5}$ et l'axiome $\mathrm{Gph}_{\mathrm{inv}6}$; en particulier $\mathbf{inv}(G)$ est une *involution* .

Exemple I.2.2 (Graphes à involution) a) (**Graphe vide**)
Le *graphe vide* considéré au point a de l'exemple I.1.5 peut évidemment être considéré comme un *graphe à involution* en définissant l'*involution* $\mathbf{inv}$ comme l'*unique application* $\emptyset \to \emptyset$.

b) (**Graphe isolé**)
Pour un *ensemble* V quelconque, le *graphe isolé* $\big(V, \emptyset, \varepsilon\big)$ considéré au point b de l'exemple I.1.5 peut être muni de l'*involution* $\emptyset \to \emptyset$ qui en fait un *graphe à involution* .

Définition I.2.3 (Éléments caractéristiques) Puisqu'un *graphe à involution* est en particulier un *graphe* un certain nombre des définitions données au paragraphe I.1 se transposent ici sans changement. Soit $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* .

i) (**Sommets**)
Un *élément* de $\mathcal{V}(G)$ s'appelle un *sommet* de G (cf. la définition I.1.2.)

ii) (**Arête**)
Un *élément* de $\mathcal{E}(G)$ s'appelle une *arête* de G (cf. la définition I.1.3.)

iii) (**Extremités**)
Pour toute *arête* $e \in \mathcal{E}(G)$, le *couple* $(u,v) = \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ s'appelle le *couple des extrémités de l'arête* e (cf. la définition I.1.4,) u son *origine* et v sa *destination* .

On dira encore que u est un *prédécesseur* de v et v un *successeur* de u.

iv) (**Boucle**)
Une *boucle* est une *arête* dont la *source* et la *cible* (ou encore *origine* et la *destination* ,) sont un même *sommet* ; autrement dit $e \in \mathcal{E}(G)$ est une boucle si $\exists u \in \mathcal{V}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (u,u)$ (cf. la définition I.1.6.)

v) (**Sommets adjacents/voisins**)
On notera encor :

- $N_G^-(u) := \{v \in \mathcal{V}(G)\ ;\ \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (v,u)\}$ l'*ensemble des prédécesseurs* de u (cf. le point ii de la définition I.1.7 ;)
- $N_G^+(u) := \{v \in \mathcal{V}(G)\ ;\ \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = (u,v)\}$ l'*ensemble des successeurs* de u (cf. le point iii de la définition I.1.7 ;)
- $N_G(u) := N_G^-(u) \cup N_G^+(u)$ l'*ensemble des voisins* de u (cf. le point iv de la définition I.1.7.)

vi) (**Relation d'adjacence**)
La *relation d'adjacence* $\mathcal{R}(G)$ est définie exactement de la même manière qu'à la définition I.1.8 ; et a exactement les mêmes propriétés.

Définition I.2.4 (Graphes à involution isomorphes) Un *graphes à involution* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ est *isomorphe* à un *graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ si les *graphes sous-jacents* sont *isomorphes* au sens de la définition I.1.11 (cf. le point ii de la proposition I.1.12,) et si de plus, avec les notations de la définition I.1.11, la *bijection* $\beta : \mathcal{E}(G) \cong \mathcal{E}(H)$

$$\mathbf{inv}(H) \circ \beta = \beta \circ \mathbf{inv}(G) .$$

Proposition I.2.5 (Propriétés des graphes à involution isomorphes) *Étant donnés des graphes à involution* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$:

*i) **(Réflexivité)***
Le graphe à involution G est isomorphe à lui-même ;

*ii) **(Symétrie)***
Si G est isomorphe à H, H est isomorphe à G ; on dira alors simplement que G et H sont isomorphes ;

*iii) **(Transitivité)***
Si G est isomorphe à H et H est isomorphe à I, G est isomorphe à I.

Démonstration : *(cf. l'exercice I.5.4.1.)*

On appellera classe d'isomorphisme de graphes à involution l'« ensemble » des graphes à involution isomorphe à un graphe donné.

I.2.6 . – Terminologie

La définition I.1.1 de *graphe* que nous avons donnée, correspond à ce qu'on appelle parfois un *graphe orienté* (voire un *multi-graphe orienté* . En effet

i) d'abord on tient compte du sens de l'*arête* e reliant les *sommets* u et v ; ce qu'on exprime par $\varepsilon(e) = (u, v) \neq (v, u)$;

ii) ensuite il se peut que deux *sommets* u et v soient reliés par plusieures *arêtes* .

Lorsqu'on ne se trouve pas dans la situation du point ii c'est-à-dire lorsqu'on n'a qu'au plus une *arête* entre deux *sommets* , on parle, à quelque chose près, ce que nous détaillerons au paragraphe I.4, de *graphe simple* . Dans le point c de l'exemple I.1.5, on a été obligé de définir $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ pour correspondre à la définition I.1.1.

On aurait certainement envie d'alléger ces notations ; d'autant que ces sortes de *graphes* semblent suffisamment courant pour qu'on leur réserve un traitement particulier. Ce sont des *graphes* dits *non-orientés* .

Lemme I.2.7 (Graphe non orienté associé à un graphe à involution) *Soit* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe à involution (cf. la définition I.2.1.)*

i) La relation binaire (cf. le point iv de la définition I.1.13.10,) $\sim (G)$ *définie sur* $\mathcal{E}(G)$ *par* $\forall (e, f) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G),\ e \sim (G)\ f \ \Leftrightarrow\ \big(e = f \text{ ou } e = \mathbf{inv}(G)(f)\big)$ *est une relation d'équivalence (cf. le point v de la définition I.1.13.11.)*

On notera $\mathcal{E}^{\text{n-O}}(G)$ *le quotient de* $\mathcal{E}(G)$ *par la relation* $\sim (G)$; *c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence . On notera encore* $\omega(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}^{\text{n-O}}(G)$ *la surjection canonique (cf. le point ii de la définition I.3.11.3.7.)*

ii) Il existe une unique application $\varepsilon^{\text{n-O}}(G) : \mathcal{E}^{\text{n-O}}(G) \to \mathcal{P}_{1,2}\big(\mathcal{V}(G)\big)$ *telle que* $\varepsilon^{\text{n-O}}(G) \circ \omega(G) = \pi_{1,2}(G) \circ \varepsilon(G)$; *autrement dit on a le carré commutatif (cf. 0.1.ii.1,) suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\omega(G)} & \mathcal{E}^{\text{n-O}}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon^{\text{n-O}}(G)} \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\pi_{1,2}(G)} & \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(G)) \end{array} \qquad 1$$

Le lemme ci-dessus suggère qu'il suffirait sans doute, pour définir un *graphe à involution* , de donner un *ensemble* de *sommets* $\mathcal{V}$, un *ensemble* d'*arêtes* $\mathcal{E}$ et une *application* ε à valeurs dans $\mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(\cdot))$ et non pas $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. On donne donc la définition suivante :

Définition I.2.8 (Graphe non orienté) Un *graphe non-orienté* est un *triplet* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ tel que :

$\mathrm{Gph}_{\text{n-O1}}$) **(Sommets)**
$\mathcal{V}(G)$ est un *ensemble* appelé *ensemble des sommets* de G ;

$\mathrm{Gph}_{\text{n-O2}}$) **(Arêtes)**
$\mathcal{E}(G)$ est un *ensemble* appelé *ensemble des arêtes* de G ;

$\mathrm{Gph}_{\text{n-O3}}$) **(Extrémités)**
$\varepsilon(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(G))$ est une *application* appelée *application extrémités* .

Notation I.2.9 ($\mathcal{P}_{1,2}(\cdot)$) On simplifie un peu les notations de 0.4 dans le cas des *graphes non-orientés* :
Si $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *graphe non-orienté* on notera
— $\mathcal{P}_{1,2}(G) := \mathcal{P}_{1,2}\big(\mathcal{V}(G)\big)$
— $\pi_{1,2}(G) := \pi_{1,2}(\mathcal{V}(G)) : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathcal{P}_{1,2}(G) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(G))$.

Exemple I.2.10 (Graphes non-orientés) a) **(Graphe vide non-orienté)**
Le *triplet* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ où $\varepsilon : \emptyset \to \mathcal{P}_{1,2}(\emptyset) = \emptyset$ est l'*unique application* $\emptyset \to \emptyset$ est un *graphe non-orienté* qu'on appellera *graphe vide non-orienté* .

b) **(Graphe non-orienté isolé)**
Pour un *ensemble* V quelconque, le *triplet* $\big(V, \emptyset, \varepsilon\big)$ où $\varepsilon : \emptyset \to \mathcal{P}_{1,2}(V)$ est l'*unique application* $\emptyset \to \mathcal{P}_{1,2}(V)$ est un *graphe non-orienté* qu'on appelle le *graphe isolé non-orienté* .

Remarque I.2.11 Le seul défaut de la définition ci-dessus est, qu'au sens strict un *graphe non-orienté* n'est pas un *graphe* puisque l'*application extrémités* ε est à valeurs dans $\mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V})$ et non pas dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Cela interdirait de particulariser aux *graphes non-orientés* des définitions ou propriétés données pour les *graphes* . Le lemme I.2.7, assure cependant qu'on peut construire un *graphe non-orienté* à partir d'un *graphe à involution* ; ce dernier quant à lui étant bien un *graphe* . On serait presque rassuré si tout *graphe non-orienté* provenait d'un *graphe à involution* . C'est le cas comme le montre la proposition I.2.18 ; mais malheureusement quelques *isomorphismes* vont se glisser çà et là. Ce n'est pas bien grave ; parce qu'ils auront, bien entendu, la bone idée de transporter les « propriétés intéressantes » ; mais il compliqueront un peu l'exposé. On peut néanmoins déjà définir les *éléments caractéristiques* d'un *graphe non-orienté* essentiellement de la même façon que pour les *graphes* à l'exception des questions d'*adjacence* (cf. le point v de la définition I.2.12 :)

Définition I.2.12 (Éléments caractéristiques d'un graphe non-orienté) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* .

i) (**Sommets**)
Un *élément* de $\mathcal{V}(G)$ s'appelle un *sommet* de G (cf. la définition I.1.2.)

ii) (**Arête**)
Un *élément* de $\mathcal{E}(G)$ s'appelle une *arête* de G (cf. la définition I.1.3.)

iii) (**Extremités**)
Pour toute *arête* $e \in \mathcal{E}(G)$, la *paire* $\{u, v\} = \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$ s'appelle l'*couple des extrémités de l'arête* e (cf. la définition I.1.4.)

Les notions d'*origine* et de *destination* ne font plus sens dans ce context.

iv) (**Boucle**)
Une *boucle* est une *arête* $b \in \mathcal{E}(G)$ dont l'*ensemble des extrémités* est un *singleton* : $\varepsilon(G)(b) = \{u\}$ (cf. la définition I.1.6.)

v) (**Sommets adjacents/voisins**)
ici encore les notions de *prédécesseur* et *successeur* ne sont pas pertinentes. On notera simplement,pour $v \in \mathcal{V}(G)$ un *sommet* de G $N_G(v) := \{w \in \mathcal{V}(G) \ ; \ \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = \{v, w\}\}$, l'*ensemble des voisins* de v.

On a toujours $\forall (v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ v \in N_G(w) \Leftrightarrow w \in N_G(v)$; et on dit, dans ce cas, que v et w sont *voisins* ou *adjacents* .

vi) (**Relation d'adjacence**)
La *relation d'adjacence* $\mathcal{R}(G)$ sur G est définie par

$$\forall (u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ u\,\mathcal{R}(G)\,v \Leftrightarrow \exists e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = \{u, v\} .$$

On doit adapter la formule par rapport à celle donnée à la définition I.1.8 ; néanmoins la *relation d'adjacence* définie ici a les mêmes propriétés ; à savoir qu'elle est *symétrique* , mais n'est ni *réflexive* ni *transitive* a priori.

Notation I.2.13 ($\mathcal{P}_{1,2}(\cdot)$) On simplifie un peu les notations de 0.4 dans le cas des *graphes non-orientés* :

Si $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *graphe non-orienté* on notera

— $\mathcal{P}_{1,2}(G) := \mathcal{P}_{1,2}\big(\mathcal{V}(G)\big)$

— $\pi_{1,2}(G) := \pi_{1,2}(\mathcal{V}(G)) : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathcal{P}_{1,2}(G) = \mathcal{P}_{1,2}(\mathcal{V}(G))$.

Définition I.2.14 (Graphes non-orientés isomorphes) Un *graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est *isomorphe* à un *graphe non-orienté* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ sil existe un *couple* de *bijections* :

$$\left(\begin{array}{llll} \alpha : & \mathcal{V}(G) & \to & \mathcal{V}(H)\,, \\ \beta : & \mathcal{E}(G) & \to & \mathcal{E}(H) \end{array} \right)$$

tel que

$$\forall (e, v, w) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ \varepsilon(G)(e) = \{v, w\} \Leftrightarrow \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) = \{\alpha(v), \alpha(w)\}\ .$$

Proposition I.2.15 (Propriétés des graphes non-orientés isomorphes) *Étant donnés des graphes non-orientés* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$:

i) ***(Réflexivité)***
Le graphe non-orienté G *est isomorphe à lui-même ;*

ii) ***(Symétrie)***
Si G *est isomorphe à* H, H *est isomorphe à* G *; on dira alors simplement que* G *et* H *sont isomorphes ;*

iii) ***(Transitivité)***
Si G *est isomorphe à* H *et* H *est isomorphe à* I, G *est isomorphe à* I.

Démonstration *: (cf. l'exercice I.5.4.1.)*

On appellera classe d'isomorphisme de graphes non-orientés l'« ensemble » des graphes non-orientés isomorphe à un graphe donné.

Définition I.2.16 (Graphe non-orienté associé à un graphe à involution) Si $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ est un *graphe à involution* , le lemme I.2.7 assure que $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}^{\text{n-O}}(G), \varepsilon^{\text{n-O}}(G)\big)$ est un *graphe non-orienté* qu'on appellera le *graphe non-orienté associé* à G et qu'on notera $G^{\text{n-O}}$.

Exemple I.2.17 (Graphe non-orienté associé à un graphe à involution) a) (**Graphe vide**)
Le *graphe vide non-orienté* (cf. le point a de l'exemple I.2.10,) est *isomorphe* (cf. ,) au *graphe non-orienté associé* au *graphe à involution* du point a de l'exemple I.2.2.

b) (**Graphe isolé**)
Le *graphe isolé non-orienté* (cf. le point b de l'exemple I.2.10,) est *isomorphe* (cf. la définition I.2.14,) au *graphe non-orienté associé* au *graphe à involution* du point b de l'exemple I.2.2.

Proposition I.2.18 (Graphe à involution associé à un graphe non-orienté) *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe non-orienté . On définit :*

$$\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) := \{(e,u,v) \in \mathcal{E}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \;;\; \varepsilon(G)(e) = \pi_{1,2}(G)(u,v)\} , \tag{I.2.18.1}$$

$$\theta(G) : \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) \to \mathcal{E}(G) , (e,u,v) \mapsto e , \tag{I.2.18.2}$$

$$\varepsilon^{\mathsf{inv}}(G) : \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) \to \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) , (e,u,v) \mapsto (u,v) , \tag{I.2.18.3}$$

Ainsi on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) & \xrightarrow{\theta(G)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon^{\mathsf{inv}}(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\pi_{1,2}(G)} & \mathcal{P}_{1,2}(G) \end{array} \quad \text{(cf. 0.2.2.)} \tag{I.2.18.4}$$

i) Le triplet $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G), \varepsilon^{\mathsf{inv}}(G)\big)$ *est un graphe au sens de la définition I.1.1.*

***Démonstration** : Il est immédiat de constater que les axiomes Gph$_1$ à Gph$_3$ sont satisfaits.*

ii) L'application $\mathbf{inv}(G) : \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) \to \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) , (e,u,v) \mapsto (e,v,u)$ *est bien définie et le quadruplet* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G), \varepsilon^{\mathsf{inv}}(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *est un graphe à involution au sens de la définition I.2.1.*

***Démonstration** :*

- *Gph$_{\mathsf{inv}1}$ – Gph$_{\mathsf{inv}3}$ Les axiomes Gph$_{\mathsf{inv}1}$ à Gph$_{\mathsf{inv}3}$ sont satisfaits (cf. le point i .)*
- *Gph$_{\mathsf{inv}4}$ Par définition de E, si $(e,u,v) \in E$, $f(e) = \{u,v\}$; si bien que $(e,v,u) \in E$. Ainsi* $\mathbf{inv}$ *est bien définie à valeurs dans E ; c'est-à-dire que l'axiome Gph$_{\mathsf{inv}4}$ est satisfait.*
- *Gph$_{\mathsf{inv}5}$ Il est presqu'aussi immédiat de constater que* $\mathbf{inv} \circ \mathbf{inv} = \mathrm{Id}_E$ *ce qui assure que l'axiome Gph$_{\mathsf{inv}5}$ est satisfait.*
- *Gph$_{\mathsf{inv}6}$ Est immédiat.*

Définition I.2.19 (Graphe à involution associé à un graphe non-orienté) Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* , la proposition I.2.18 assure que $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(G), \varepsilon^{\mathrm{inv}}(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ est un *graphe à involution* au sens de la définition I.2.1 qu'on appellera le *graphe à involution associé* à G et qu'on notera G^{inv}.

Proposition I.2.20 (Correspondance entre graphe non-orientés et graphes à involution) *i) Étant donné un graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, *$G$ et $G^{\mathrm{inv}^{\text{n-O}}}$ sont isomorphes en tant que graphes non-orientés (cf. la définition I.2.14.)*

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice I.5.4.3.)*

ii) Pour $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe à involution G et $G^{\text{n-O}^{\mathrm{inv}}}$ sont isomorphes en tant que graphes à involution (cf. la définition I.2.4.)*

***Démonstration** : (cf. la question 2 de l'exercice I.5.4.3.)*

iii) ***(Graphes à involution isomorphes)***

Étant donnés deux graphes à involution G et H, ils sont isomorphes au sens de la définition I.2.4 si et seulement si $G^{\text{n-O}}$ et $H^{\text{n-O}}$ sont isomorphes au sens de la définition I.2.14.

***Démonstration** : (cf. la question 3 de l'exercice I.5.4.3.)*

iv) ***(Graphes non-orientés isomorphes)***

Étant donnés deux graphes non-orientés G et H, ils sont isomorphes au sens de la définition I.2.14 si et seulement si G^{inv} et H^{inv} sont isomorphes au sens de la définition I.2.4.

***Démonstration** : (cf. la question 4 de l'exercice I.5.4.3.)*

v) ***(Adjacence dans un graphe à involution)***

Soit $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un graphe à involution . Pour tout couple de sommets $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, u et v sont voisins (cf. le point v de la définition I.2.3,) si et seulement s'ils le sont dans le graphe non-orienté associé $G^{\text{n-O}}$ (cf. le point v de la définition I.2.12 ;) ce qui a un sens puisque $\mathcal{V}\big(G^{\text{n-O}}\big) = \mathcal{V}(G)$.

La relation d'adjacence sur G (cf. le point vi de la définition I.2.3,) est en fait la relation d'adjacence sur $G^{\text{n-O}}$ (cf. le point vi de la définition I.2.12.)

***Démonstration** : (cf. la question 5 de l'exercice I.5.4.3.)*

vi) ***(Adjacence dans un graphe non-orienté)***

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe non-orienté . Pour tout couple de sommets $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, u et v sont voisins (cf. le point v de la définition I.2.12,) si et seulement s'ils le sont dans le graphe à involution associé G^{inv} (cf. le point v de la définition I.2.3 ;) ce qui a un sens puisque $\mathcal{V}\big(G^{\text{inv}}\big) = \mathcal{V}(G)$.

La relation d'adjacence sur G (cf. le point vi de la définition I.2.12,) est en fait la relation d'adjacence sur G^{inv} (cf. le point vi de la définition I.2.3.)

***Démonstration** : (cf. la question 5 de l'exercice I.5.4.3.)*

I.3 . −Graphes finis, degré

Définition I.3.1 (Graphes (à involution, non-orientés) finis) Un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (cf. la définition I.1.1,)(resp. un *graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$, (cf. la définition I.2.1,))(resp. un *graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (cf. la définition I.2.8,)) est *fini* si l'*ensemble des sommets* $\mathcal{V}(G)$ et l'*ensemble des arêtes* $\mathcal{E}(G)$ sont des *ensembles finis* (cf. la définition I.3.11.1.11.) On dit alors que G est un

i) *graphe fini* ,

ii) (resp. *graphe fini à involution* ,)

iii) (resp. *graphe fini non-orienté* .)

Proposition I.3.2 (Graphes isomorphes) *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes ,(resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *et* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution ,)(resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés .)*

Si G *et* H *sont isomorphes (cf. la définition I.1.11 , (resp. la définition I.2.4 ,) (resp. la définition I.2.14 ,))* G *est fini si et seulement si* H *et fini .*

Exemple I.3.3 (Graphes finis) a) (**Graphe vide**)

Le *graphe vide* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ (cf. le point a de l'exemple I.1.5,) est en particulier un *graphe fini* .

b) (**Graphe isolé**)

Pour $n \in \mathbb{N}$, le *graphe isolé* $\big([1;n], \emptyset, \varepsilon\big)$ (cf. le point b de l'exemple I.1.5,) est un *graphe fini* .

On l'appellera le *graphe isolé à* n *sommets*.

Lemme I.3.4 (Graphes associés) *i) Un graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, *(cf. la définition I.2.8,) est fini si et seulement si le graphe à involution associé* G^{inv} *(cf. la définition I.2.19,) est fini .*

ii) Un graphe à involution $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *(cf. la définition I.2.1,) est fini si et seulement si le graphe non-orienté associé (cf. la définition I.2.16,) est fini .*

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice I.5.5.1.)*

Définition I.3.5 (Degrés/valences d'un sommet dans un graphe fini) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini* et $u \in \mathcal{V}(G)$ un *sommet* de G.

i) (**Degré entrant**)

Le *degré entrant* $d_G^-(u)$ en u est le nombre d'*arêtes* dont u est la *destination* (ou *cible* :)

$$\begin{aligned} d_G^-(u) &:= \#\big(\{e \in \mathcal{E}(G) \,;\, \mathfrak{e}(G)(e) = u\}\big) \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \in \mathcal{V}(G)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\Big) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{V}(G)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\big) \qquad \text{(cf. le point ii de la définition I.1.4 .)} \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \in N_G^-(u)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\Big) \\ &= \sum_{v \in N_G^-(u)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\big) . \end{aligned}$$

ii) (**Degré sortant**)

Le *degré sortant* $d_G^+(u)$ en u est le nombre d'*arêtes* dont u est l'*origine* (ou la *source* :)

$$\begin{aligned} d_G^+(u) &:= \#\big(\{e \in \mathcal{E}(G) \,;\, \mathfrak{o}(G)(e) = u\}\big) \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \in \mathcal{V}(G)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,v)\}\big)\Big) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{V}(G)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,v)\}\big)\big) \qquad \text{(cf. le point ii de la définition I.1.4 .)} \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \in N_G^+(u)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,v)\}\big)\Big) \\ &= \sum_{v \in N_G^+(u)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,v)\}\big)\big) . \end{aligned}$$

iii) (**Degré**)
Le *degré* $d_G(u)$ est donné par

$$\begin{aligned} d_G(u) &:= d_G^-(u) + d_G^+(u) \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \,\in\, N_G(u)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,v)\}\big) \cup \bigcup_{v \,\in\, N_G(u)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\Big) \\ &= \sum_{v \,\in\, N_G^-(u)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v,u)\}\big)\big) + \sum_{v \,\in\, N_G^+(u)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\}\big)(u,v)\big)\ . \end{aligned}$$

c'est le nombre d'*arêtes* dont u est une *extrémité* (soit *origine* soit *destination* .)

On trouvera parfois le terme de *valence* en lieu et place de celui de *degré* .

Définition I.3.6 (Degré dans un graphe non-orienté) Si $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *graphe fini non-orienté* (cf. la définition I.2.8) et $u \in \mathcal{V}(G)$ un *sommet* de G le *degré* $d_G(u)$ est le nombre d'*arêtes* dont u est une *extrémité* où les *boucles* (cf. la définition I.1.6 et le point iv de la définition I.2.12) sont comptés deux fois. La distinction entre *origine* et *destination* n'a pas de sens dans cette situation.

$$\begin{aligned} d_G(u) &:= \#\big(\{e \,\in\, \mathcal{E}(G)\ ;\ u \,\in\, \varepsilon(G)(e)\}\big) + +\#\big(\{e \,\in\, \mathcal{E}(G)\ ;\ \varepsilon(G)(e) = \{u\}\}\big) \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \,\in\, \mathcal{V}(G)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u,v\}\}\big)\Big) + \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)\big) \\ &= \sum_{v \,\in\, \mathcal{V}(G)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u,v\}\}\big)\big) + \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)\big) \\ &= \#\Big(\bigcup_{v \,\in\, N_G(u)} \varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u,v\}\}\big)\Big) + \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)\big) \\ &= \sum_{v \,\in\, N_G(u)} \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u,v\}\}\big)\big) + \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)\big)\ . \end{aligned}$$

Proposition I.3.7 (Propriétés des degrés) *i)* ***(Graphe à involution)***
Si $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *est un graphe fini à involution (cf. la définition I.2.1,)* $\forall u \in \mathcal{V}(G),\ d_G^-(u) = d_G^+(u)$ et $d_G(u) = 2d_G^-(u) = 2d_G^+(u)$.

ii) ***(Graphe à involution associé)***
Si $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *est un graphe fini non-orienté et* G^{inv} *son graphe à involution associé (cf. la définition I.2.19,) (qui est alors un graphe fini à involution ,)*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G) = \mathcal{V}\big(G^{\text{inv}}\big),\ d_{G^{\text{inv}}}(u) = 2\cdot\Big(d_G(u) - \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)\big)\Big)\ .$$

Démonstration : *(cf. le point a de la question 1 de l'exercice I.5.5.2.)*

iii) ***(Graphe non-orienté associé)***
Pour $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe fini à involution et* $G^{\text{n-O}}$ *son graphe non-orienté associé (cf. la définition I.2.16,) (qui est alors un graphe fini non-orienté ,)*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G),\ d_{G^{\text{n-O}}}(u) = \frac{1}{2}d_G(u) + \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(u,u)\}\big)\big)\ .$$

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice I.5.5.2.)*

*iv) **(Isomorphisme et degré)***

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes finis ,(resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *et* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes finis à involution ,)(resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes finis non-orientés .)*

Si G *et* H *sont isomorphes (cf. la définition I.1.11 , (resp. la définition I.2.4 ,) (resp. la définition I.2.14 ,)) on note* $\big(\alpha : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)\ ,\ \beta : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)\big)$ *le couple de bijections vérifiant les hypothèses des définitions ci-dessus.*

Alors :

$$\forall u \in \mathcal{V}(G),\ \begin{array}{rcl} d^-_G(u) & = & d^-_H\big(\alpha(u)\big) \\ d^+_G(u) & = & d^+_H\big(\alpha(u)\big) \\ d_G(u) & = & d_H\big(\alpha(u)\big) \end{array}\ ,\ \Big(\textit{resp.}\ \begin{array}{rcl} d^-_G(u) & = & d^-_H\big(\alpha(u)\big) \\ d^+_G(u) & = & d^+_H\big(\alpha(u)\big) \\ d_G(u) & = & d_H\big(\alpha(u)\big) \end{array}\Big)\ ,\ \Big(\textit{resp.}\ d_G(u) = d_H\big(\alpha(u)\big)\Big)\ .$$

Remarque I.3.8 (Degré) La définition I.3.6 peut sembler un peu surprenante ; mais telle quelle elle est cohérente avec la définition I.3.5. En effet dans cette dernières les *boucles* sont à la fois comptées dans le *degré entrant* et le *degré sortant* . On peut alors énoncer des résultats comme ceux de la proposition I.3.7.

Bien entendu, toutes ces complications disparaissent dans le cas des *graphes simples* puisqu'il n'y a plus de *boucle* (cf. le lemme I.4.7.)

Notation I.3.9 (Adjacence) Étant donné un *graphe fini* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (resp. un *graphe fini non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$,) on note

$$\mathfrak{a}(G) : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathbb{N}\ ,\ (v, w) \mapsto \#\Big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{(v, w)\}\big)\Big)\ \Big(\text{resp. } \#\Big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{v, w\}\}\big)\Big)\Big)\ .$$

On remarque immédiatement que pour un *graphe fini non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, on a :

$$\forall (v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ \mathfrak{a}(G)(v, w) = \#\Big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{v, w\}\}\big)\Big) = \#\Big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{w, v\}\}\big)\Big) = \mathfrak{a}(G)(w, v)\ .$$

Remarque I.3.10 (Adjacence) Si $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est un *graphe fini* (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini non-orienté* ,) la *relation d'adjacence* $\mathcal{R}(G)$ (cf. la définition I.1.8, (resp. le point vi de la définition I.2.12,)) peut s'interpréter en termes de l'*application* $\mathfrak{a}(G)$ définie ci-dessus. On a :

$$\forall (v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ v\,\mathcal{R}(G)\,w \Leftrightarrow \mathfrak{a}(G)(v, w) \neq 0\ .$$

I.3.11 . −Ensembles finis, ensemble des entiers naturels, le système ZFC

Les notions d'*ensemble fini* et de leur *nombre d'éléments* qui sont au cœur des définitions du paragraphe I.3 qui précède sont certainement assez bien connues ; et elles sont en général convenablement maniées. Aussi, ce qui suit, (I.3.11,) est-il encore plutôt « culturel » au même titre que le paragraphe I.1.13. Il sera cepandant prétexte à exposer le reste de la théorie **ZFC** dont nous n'avons abordé que l'embryon $\mathbf{Z}_{\text{fini}}$ au paragraphe I.1.13 ; ceci étant d'autant plus frustrant que, si de nombreux objets mathématiques peuvent s'exprimer à l'aide d'*ensemble* , on chercherait vainement à extraire des *axiomes* de la définition I.1.13.2, qu'il existe des *ensembles* .

L'introduction de l'*ensemble* $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* présente alors un triple intérêt :
— Elle donne un cadre formel à la notion d'*ensemble fini* (cf. I.3.11.1 ;)
— elle sert de prétexte à prolonger la théorie $\mathbf{Z}_{\text{fini}}$ (cf. la définition I.1.13.2,) jusqu'à la théorie **ZFC** (cf. la définition I.3.11.2.9 ;)
— elle sert de point de départ à l'introduction des autres *ensembles* numériques $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; sans nécessité d'introduire aucun *axiome* supplémentaire (cf. I.3.11.3.)

I.3.11.1. –L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels C'est un objet sans doute bien connu du lecteur, aussi n'en donnerons-nous ici qu'une présentation très rapide. L'*ensemble des entiers naturels* peut être introduit à l'aide d'un *système de* PEANO :

Définition I.3.11.1.1 (Système de PEANO) On appelle *système de* PEANO la donnée d'un *ensemble* $\mathbb{N}$, contenant au moins un *élément* 0, et de trois *applications* :

$$\begin{array}{rrcl} \mathfrak{s}: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ +: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ *: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \end{array} \qquad \text{I.3.11.1.1.1}$$

satisfaisant les *axiomes* suivants appelés *axiome de* PEANO :

PA_1) (**Succ**$_1$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \big(p \neq 0 \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N},\ (p = \mathfrak{s}(q))\big)\ .$$

PA_2) (**Succ**$_2$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \big(\mathfrak{s}(p) = \mathfrak{s}(q) \Rightarrow p = q\big)\ .$$

PA_3) (**Ind**)
$\forall A \subset \mathbb{N},\ \big(0 \in A \wedge \forall p \in \mathbb{N},\ (p \in A \Rightarrow \mathfrak{s}(p) \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}\big)\ .$

PA_4) (**Add**$_1$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (0 + p = p)\ .$$

PA_5) (**Add**$_2$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \big(\mathfrak{s}(p) + q = \mathfrak{s}(p+q)\big)\ .$$

PA_6) (**Mult**$_1$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (0 * p = 0)\ .$$

PA_7) (**Mult**$_2$)

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \big(\mathfrak{s}(p) * q = (p * q) + q\big)\ .$$

Pour la première fois on affirme qu'existe un *ensemble* ; ce qui pourrait permettre d'en construire d'autres grâce aux *axiomes* de la définition I.1.13.2, suivant les procédés évoqués au paragraphe I.1.13. C'est d'ailleurs ainsi que pourrait se lire le paragraphe I.3.11.3. Une approche plus homogène peut cependant être adoptée comme nous l'apercevront au paragraphe I.3.11.2 grâce à l'introduction de l'*axiome de l'infini* (cf. l'axiome $\mathbf{Z}_6$ de la définition I.3.11.2.3.)

À ce point, on peut néanmoins déduire des *axiomes de* PEANO un certain nombre de propriétés de l'*ensemble des entiers naturels* dont nous nous bornons ici à donner une liste sans démonstration.

Proposition I.3.11.1.2 (Propriétés algébriques de la loi $+$) *La loi $+$ sur $\mathbb{N}$ a les propriétés suivantes :*

*i) **(Associativité)***
Elle est associative (cf. II.4.5.9;) .

*ii) (**Élément neutre**)*
0 *est un élément neutre (cf. II.4.5.11.i ;)* .

*iii) (**Commutativité**)*
elle est commutative (cf. II.4.5.10.) .

*iv) (**Régularité**)*
Tout élément de $\mathbb{N}$ *est régulier c'est-à-dire que*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{N},\ \big((p + r = q + r \Rightarrow p = q) \wedge (r + p = r + q \Rightarrow p = q)\big)\,.$$

v) On a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ (p + q = 0 \Rightarrow p = 0 \wedge q = 0)\,.$$

Proposition I.3.11.1.3 (Propriétés de la loi $*$) *La loi $*$ sur $\mathbb{N}$ possède les propriétés suivantes :*
— *Elle est associative ;*
— *elle possède un élément neutre 1 ;*
— *elle est distributive à gauche et à droite sur l'addition ;*
— *elle est commutative ;*
— 0 *est un élément absorbant .*

Définition I.3.11.1.4 ($\leq$) On définit la *relation binaire* $\leq$ sur $\mathbb{N}$, par la formule :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ \big(p \leq q \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N},\ (q = p + r)\big)\,. \qquad \text{I.3.11.1.4.1}$$

Pour tout *couple* (p, q) d'*entiers naturels* , si $p \leq q$, on dira que p est *inférieur ou égal* q.

Proposition I.3.11.1.5 ($\leq$) *La relation binaire $\leq$ définie ci-dessus est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ (cf. I.1.13.11.vi.)*

Définition I.3.11.1.6 On peut définir de manière exactement analogue une relation $\geq$ (*supérieur ou égal*) par $p \geq q$ s'il existe r tel que $p = q + r$ ce qui est exactement équivalent à $q \leq p$.

On peut aussi définir une *relation* $<$ *strictement inférieur à* (resp. $>$ *strictement supérieur à*,) par $p < q$ (resp. $p > q$) si $p \leq q$ (resp. $p \geq q$) et $p \neq q$. Les relations $<$ et $>$ ne sont pas des *relations d'ordre* , puisqu'elles ne sont pas *antisymétriques* .

Notation I.3.11.1.7 On notera $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},$:

$$\begin{array}{rcl} [p;q] & := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p \leq r \leq q\} \\ [p;q[& := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p \leq r < q\} \\ ]p;q] & := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p < r \leq q\} \\ ]p;q[& := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p < r < q\} \\ [p;+\infty[& := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p \leq r\} \\ ]p;+\infty[& := & \{r \in \mathbb{N}\,;\ p < r\}\,. \end{array} \qquad \text{I.3.11.1.7.1}$$

Proposition I.3.11.1.8 (Ordre total) *La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$ (cf. le point vi de la définition I.1.13.11.)*

Proposition I.3.11.1.9 (Plus petit *élément*) *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus-petit élément (cf. I.1.13.11.vii.)*

Proposition I.3.11.1.10 (Plus grand élément) *Une partie non vide P de $\mathbb{N}$ est majorée (cf. I.1.13.11.vii,) si et seulement si elle possède un plus grand élément. Celui-ci est alors le plus petit de ses majorants.*

Définition I.3.11.1.11 (Ensemble fini) On dira qu'un *ensemble* a est *fini* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et une *application injective* $i : a \to [1; p]$.

Exemple I.3.11.1.12 (Ensembles finis) i) L'*ensemble vide* $\emptyset$ est un *ensemble fini* .

b) Si

$$A \subset E \text{ et } B \subset E$$

sont des parties finies d'un ensemble E alors

$$A \cup B \text{ et } A \cap B$$

sont finis. Toute partie de A est finie.

Si A et B sont des ensembles finis, $A \times B$ est fini.

c) Pour p et q des entiers naturels, les ensembles

$$[p; q], [p; q[,]p; q] \text{ et }]p; q[$$

sont des ensembles finis.

d) En revanche $\mathbb{N}$ n'est pas fini (cf. la question 3 de l'exercice I.5.3.1) ce qui motive la définition suivante :

Proposition I.3.11.1.13 (Conséquences de la définition définition I.3.11.1.11) *i) Si a est un ensemble fini , et $b \to a$ une application injective , b est un ensemble fini .*

ii) Si a est un ensemble fini , pour toute partie $b \in \mathcal{P}(a)$, b est un ensemble fini .

iii) Si $a \in \mathcal{P}(e)$ et $b \in \mathcal{P}(e)$, sont des ensembles finis , il en est de même de $a \cap b$ et $a \cup b$.

iv) Si a et b sont des ensembles finis , il en est de même de $a \times b$ (cf. le point iii de la définition I.1.13.10,) et a^b (cf. I.1.13.13.)

.

Lemme I.3.11.1.14 *Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe une application injective $i : [1; p] \to [1; q]$.

b) $p \leq q$.

Corollaire I.3.11.1.15 *L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels lui-même n'est pas un ensemble fini.*

Définition I.3.11.1.16 (Ensemble dénombrable) On dit qu'un *ensemble* a est *dénombrable* s'il existe une *bijection* $A \cong \mathbb{N}$.

Exemple I.3.11.1.17 (Ensembles dénombrables) Les ensembles

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$$

sont dénombrables mais $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne l'est pas non plus que $\mathbb{R}$.

Proposition I.3.11.1.18 *Pour tout ensemble fini A, le plus petit entier p tel qu'il existe une application injective $i : A \to [1;p]$ est l'unique entier p tel qu'il existe une bijection $A \cong [1;p]$.*

Définition I.3.11.1.19 (Cardinal) Pour un ensemble fini a l'unique entier p tel qu'il existe une bijection $a \cong [1;p]$ est appelé *cardinal* de a ou *nombre d'éléments* de a ; on le notera $\#(a)$.

Exemple I.3.11.1.20 On a déjà remarqué que $[1;0] = \emptyset$ d'où il résulte que

$$\#(\emptyset) = 0 .$$

L'application

$$\{x\} \to [1;1]\,,\ x \mapsto 1$$

est manifestement une bijection d'où il résulte que

$$\#(\{x\}) = 1 = \mathfrak{s}(0) .$$

Proposition I.3.11.1.21 (Propriétés du cardinal) *Étant donnés deux ensembles finis a et b :*

i) Pour tout $x \notin a$,

$$\#(a \cup \{x\}) = \#(a) + 1 .$$

ii) $\#(a) + \#(b) = \#(a \cup b) + \#(a \cap b)$;

iii) $\#(a \times b) = \#(a) * \#(b)$.

iv) $\#(a^b) = \#(a)^{\#(b)}$.

Proposition I.3.11.1.22 *Soient a et b deux ensembles finis. Si $\#(b) \leq \#(a)$:*

i) toute application $i : a \to b$ injective, est bijective ;

ii) toute application surjective $p : b \to a$ est bijective.

Corollaire I.3.11.1.23 (de la proposition I.3.11.1.18) *Soient a et b deux ensembles finis. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe une bijection $a \cong b$.

b) Il existe une injection $a \hookrightarrow b$ et une injection $b \hookrightarrow a$.

c) $\#(a) = \#(b)$.

Proposition I.3.11.1.24 (Parties finies de $\mathbb{N}$) *Étant donnée une partie $P \subset \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *La partie P est non vide et finie.*

b) *La partie P est non vide et majorée.*

c) *La partie P possède un plus grand élément.*

d) *Il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une bijection $[1; m] \cong P$.*

Proposition I.3.11.1.25 *Une partie $P \subset \mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est soit finie soit dénombrable.*

I.3.11.2. –Le système ZFC On a vu au paragraphe I.3.11.1 qu'on pourrait adjoindre aux *axiomes* du *systèmede* ZERMELO *fini* de la définition I.1.13.2 les *axiomes de* PEANO de la définition I.3.11.1.1 et qu'alors on disposerait d'au moins un *ensemble* : l'*ensemble* $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* . On constaterait alors au paragraphe I.3.11.3 que l'*existence* des *ensembles* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ en découle.

Cependant, quitte à étendre le *systèmede* ZERMELO *fini* de la manière que nous allons exposé dans ce paragraphe (I.3.11.2,) on pourra se convaincre, même si nous n'exposerons pas tous les détails ici, qu'un *système de* PEANO existe dans **ZFC**.

Définition I.3.11.2.1 (Successeur) L'*union* de deux *ensembles* , construite au point vi de la définition I.1.13.6, permet ensuite de définir le *successeur* de a : $\mathrm{succ}(a) := a \cup \{a\}$.

Exemple I.3.11.2.2 (Successeurs) À ce point, si on suppose cependant que $\emptyset$ existe on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{succ}(\emptyset) & = & \emptyset \cup \{\emptyset\} \\ & = & \{\emptyset\}, \\ \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\emptyset)) & = & \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \\ & = & \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\ \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\emptyset))) & = & \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \cup \big\{\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\big\} \\ \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\} \ \ldots & & \end{array} \qquad \text{I.3.11.2.2.1}$$

On s'aperçoit qu'à chaque opération succ, le « *nombre d'éléments* augmente d'un ; et que les *ensembles* ainsi construits pourraient être de bons candidats pour représenter les *entiers naturels* ; pour peu qu'on puisse les « équiper » de suffisamment de « structure algébrique » *i.e.* $+, \cdot, \ldots$

Définition I.3.11.2.3 (Système de ZERMELO Z) On appelle *système de* ZERMELO le *système d'axiomes* constitué des *axiomes de* ZERMELO *finis* (cf. la définition I.1.13.2a)uquel on adjoint l'*axiome de l'infini* :

Z$_6$) (***infini*** (***Inf***))
$\exists a \left(\emptyset \in a \text{ et } \forall x \in a, \ (\mathrm{succ}(x) \in a) \right)$.

Définition I.3.11.2.4 (Ensembles récurrent) On dit qu'un *ensemble* a est *récurrent* si

$$\emptyset \in a \text{ et } \forall x \in a,\ (\mathrm{succ}(x) \in a)\ .$$

On a dès lors le sentiement qu'un *ensemble* représentant les *entiers naturels* devrait être un ensemble récurrent .

L'*axiome de l'infini* n'est peut-être pas suffisant pour garantir une bonne représentation de $\mathbb{N}$; en particulier dans un *ensemble récurrent* , il n'est pas exclu que plusieurs *éléments* ait le même *successeur* . Et puis s'il existe des *ensembles récurrents* , lequel d'entre eux choisir pour représenter $\mathbb{N}$; pour mpeu même qu'ils conviennent tous ; ce qui n'est rien moins que certain . . .

Lemme I.3.11.2.5 *L'intersection de deux ensembles récurrents est un ensemble récurrent.*

Définition I.3.11.2.6 On notera ω le plus petit ensemble récurrent ; c'est-à-dire, en vertu du lemme I.3.11.2.5 l'intersection de tous les *ensembles récurrents* .

Il est loin d'être immédiat que l'*ensemble* ω ci-dessus satisfasse les *axiomes de* PEANO ; ce peut cependant être établi ; ce que nous ne ferons certainement pas ici.

On présente les derniers *axiomes* qu'il faut adjoindre au système de ZERMELO définition I.3.11.2.3 pour arriver au système de ZERMELO–FRAENKEL **ZF** (cf. I.3.11.2.7,) puis finalement au système **ZFC** (cf. I.3.11.2.9.) On ne mentionnera ces *axiomes* que pour mémoire et parce que le système **ZF** voire **ZFC** est couramment utilisé par une large partie de la communauté mathématique.

L'*axiome de fondation* (cf. l'axiome $\mathbf{ZF}_8$ de la définition I.3.11.2.7,) en particulier pourrait sembler mystérieux. La restriction de la théorie à l'étude des *ensembles pur* (cf. [3, def. 1.1]) qu'il introduit, tout en facilitant son usage, ne limite pas le pouvoir de représentation de la théorie .

Nous ne commenterons pas, dans cette présentation très succinte, l'introduction des *axiomes de remplacement* et renvoyons à [3, sec 2.5] pour des détails.

Définition I.3.11.2.7 (Le système de ZERMELO–FRAENKEL ZF) Le *système de* ZERMELO–FRAENKEL est obtenu en adjoignant au *système de* ZERMELO les *axiomes* :

Pour $F(x, y, c)$ *formule ensembliste* où a et b n'apparaissent pas comme *variables libres* , on appelle *axiome de remplacement* pour F :

$\mathbf{ZF}_7$) (***remplacement*** (***Rem***$_F$))

$$\begin{array}{lll} \forall a \forall c & \big((\forall x, y, z((F(x, y, c) \quad \text{et}\& F(x, z, c)) \Rightarrow y = z\big) & \\ \Rightarrow & \exists b \forall y \big(\exists x \in a,\ (F(x, y, c)) \qquad \Rightarrow & y \in b))\big)\ . \end{array}$$

$\mathbf{ZF}_8$) (***fondation*** (***Af***$_F$))

$\forall a \left(a \neq \emptyset \Rightarrow \exists b \in a \left(b \cap a = \emptyset \right) \right)$.

Remarque I.3.11.2.8 On réserve ordinairement une place à part à l'*axiome du choix* sans doute parce qu'un certain nombre de matthématiciens ne l'utilisent qu'avec une extrême circonspection tandis que certains autres le refusent tout bonnement. Le point de vue le plus pragmatique consiste à clairement désigner les résultats dont une preuve utilise l'*axiome du choix* .

Les deux résultats marquants de GÖDEL (1938) *s'il est cohérent, le système* ***ZF****ne réfute pas l'axiome du choix ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de la négation de l'axiome du choix à partir des axiomes* du *système* ***ZF*** et COHEN (1963) *s'il est cohérent, le système* ***ZF****ne démontre pas l'axiome du choix ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de l'axiome du choix à partir des axiomes du système* ***ZF*** ne permettent de choisir ni en sa faveur ni en sa défaveur.

Définition I.3.11.2.9 (ZFC) i) (**fonction de choix**)
Soit a un ensemble. On appelle *fonction de choix* sur a une *application* $f : a \setminus \{\emptyset\} \to a$ vérifiant $f(x) \in x$ pour tout x non vide dans a.

ii) (**Axiome du choix**)
On appelle *axiome du choix* l'énoncé : Tout *ensemble* possède une *fonction de choix* .

iii) (**Le système ZFC**)
On appelle *système* ***ZFC*** la famille d'*axiomes* constituée des *axiomes* de **ZF** et de l'*axiome du choix* ci-dessus, c'est-à-dire constituée des *axiomes* du *systèmede* ZERMELO *fini* introduits à la définition I.1.13.2 de l'*axiome* définition I.3.11.2.3,axiome $\mathbf{Z}_6$ de l'*infini* , de l'axiome $\mathbf{ZF}_7$ de la définition I.3.11.2.7 (de *remplacement* ,) de l'axiome $\mathbf{ZF}_8$ de la définition I.3.11.2.7 (de *fondation*) et de l'*axiome du choix* .

I.3.11.3. – Relations d'équivalence Dès l'instant où l'on dispose de l'*ensemble* $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* , il n'est pas très difficile de montrer que l'on peut construire l'*ensemble* $\mathbb{Z}$ des *entiers relatifs* comme *quotient* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par une certaine *relation d'équivalence* (cf. le point v de la définition I.1.13.11 ;) c'est-à-dire sans sortir du cadre du *système* ***ZFC***.

On considère en effet la *relation d'équivalence* $\sim$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$\forall (p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4,\ (p, q) \ \sim\ (r, s) \ \Leftrightarrow p + s \ =\ r + q\ .$$

Elle consiste en fait à définir un *entier relatif* comme « différence » de deux *entiers naturels* .

Dès lors l'*ensemble* $\mathbb{Q}$ des *nombres rationnels* s'obtient également comme *quotient* de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}$ $setminus$ $\{0\})$ par la *relation d'équivalence* $\sim$ définie par

$$\forall (p, q, r, s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})\ \times\ \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}),\ (p, q)\ \sim\ (r, s)\ \Leftrightarrow\ ps\ =\ rq\ .$$

Les possibles constructions de l'*ensemble* $\mathbb{R}$ des *réels* à partir de $\mathbb{Q}$ sont certes plus élaborées ; mais celui qui aurait le courage de les étudier pas à pas s'apercevrait que chacunes des étapes de ces constructions peut se faire dans le cadre de **ZFC**. Le passage de $\mathbb{R}$ à l'*ensemble* $\mathbb{C}$ des *nombre complexe* est en revanche assez simple.

On peut désormais donc faire toute l'*arithmétique* dans **ZFC** puisqu'elle s'appuie sur les *axiomes de* PEANO . Mais puisque nous disposons également de représentations de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ nous constatons qu'également toute l'analyse peut être considérée dans ce cadre.

Les *relations d'équivalence* , dont nous avons rappelé la définition au point v de la définition I.1.13.11, étant amenées à jouer un rôle majeur dans la plupart des constructions que nou déveloperons dans ce cours, il ne nous a pas paru vain de leur consacrer quelques lignes afin de rappler certaines de leur propriétés que nous espérons bien connues, ainsi que d'exposer quelques résultats moins habituels.

On va voir immédiatement que les *relations d'équivalence* constituent une sorte de description alternative aux *applications surjectives* . Bien mieux encore, nombre de relations que nous pourrons définir s'avéreront *compatibles* aux structures algébriques et fourniront dès lors non seulement des *applications surjectives* mais encore des *morphismes surjectifs* (cf. la définition II.4.5.18 et définition II.5.6.28.)

Définition I.3.11.3.1 (Classes (d'équivalence)) Étant donnée une *relation binaire* (cf. le point iv de la définition I.1.13.10,) (pas nécessairement une *relation d'équivalence* ,) $\sim$ sur un *ensemble* E, pour tout $x \in E$, on appelle *classe* de x selon $\sim$ (ou pour $\sim \dots$) le *sous-ensemble* $\overline{x} := \{y \in E\ ;\ y \sim x\} \subset E$ de E.

Si $\sim$ est une *relation d'équivalence* (cf. le point v de la définition I.1.13.11, ce qui est le cas qu'on rencontrera le plus souvent,) on parlera de *classe d'équivalence* .

Le lemme technique suivant permet d'établir bon nombre de résultats concernant les *relations d'équivalence* :

Lemme I.3.11.3.2 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $x \sim y$;

b) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$;

c) $\overline{x} \subset \overline{y}$;

d) $\overline{x} = \overline{y}$.

Démonstration : *(cf. l'exercice I.5.2.1.)*

Nous allons maintenant comparer les *relations d'équivalence* à d'autres objets mathématique dont on va s'apercevoir qu'ils ne sont en fait que des descriptions alternatives de la même réalité. En premier lieu les partitions d'un ensemble :

Définition I.3.11.3.3 (Partition d'un ensemble) Soit E un ensemble. On rappelle qu'une *partition* de E est une partie B de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E (ou encore un *élément* de $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$) vérifiant :

Part$_1$) $\emptyset \notin B$;

Part$_2$) $\forall X \in B, \forall Y \in B, \big(X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y\big)$;

Part$_3$) $\bigcup_{X \in B} X = E$.

Proposition I.3.11.3.4 *Étant donné un ensemble E,*

i) pour toute relation d'équivalence $\sim$ sur E, l'ensemble des classes selon $\sim$ est une partition de E ;

ii) réciproquement, étant donnée une partition P de E, il existe une unique relation d'équivalence sur E dont l'ensemble des classes est égal à P.

On définit ainsi une bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence sur E et l'ensemble des partitions de E.

Démonstration : *(cf. l'exercice I.5.2.3.)*

On compare maintenant les *relations d'équivalence* sur un ensemble E et les *applications surjectives* dont E est l'ensemble de départ :

Notation I.3.11.3.5 Pour un ensemble E muni d'une *relation d'équivalence* $\sim$, on note $E/\sim$ l'*ensemble* des *classes d'équivalence* selon $\sim$.

Proposition I.3.11.3.6 *Soit E un ensemble,*

i) pour toute relation d'équivalence $\sim$ sur E, l'application

$$\pi \ : \ E \ \to \ E/\sim \, , \ x \ \mapsto \ \overline{x}$$

est surjective ;

ii) réciproquement pour toute application surjective $\rho \ : \ E \ \to \ F$, il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que l'application $E/\sim \to \ F$, $\overline{x} \mapsto \rho(x)$ soit une bijection bien définie. La relation $\sim$ est alors caractérisée par

$$x \ \sim \ y \ \Leftrightarrow \ \rho(x) \ = \ \rho(y) \ .$$

On définit ainsi une bijection de l'ensemble des relations d'équivalence sur E dans l'ensemble des applications surjectives de E dans un ensemble F.

Démonstration : *(cf. l'exercice I.5.2.2.)*

Définition I.3.11.3.7 (Ensemble quotient) Étant donné un *ensemble* E et une *relation d'équivalence* $\sim$, on appelle

i) *ensemble quotient* (ou simplement *quotient*) l'*ensemble* $E/\sim$ et

ii) *surjection canonique* (et parfois même *projection canonique*) l'*application* $\pi \ : \ E \ \to \ E/\sim \, , \ x \ \mapsto \ \overline{x}$.

Lemme I.3.11.3.8 *Avec les notations de la définition I.3.11.3.7, pour tout $(x, y) \ \in \ E \times E$, les assertions a à d du lemme I.3.11.3.2 sont encore équivalentes à $\pi(x) \ = \ \pi(y)$.*

Proposition I.3.11.3.9 (Propriété universelle) *Pour toute application $f \ : \ E \ \to \ F$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\forall (x, y) \in E \times E, \ x \ \sim \ y \ \Rightarrow \ f(x) \ = \ f(y)$.

b) Il existe une unique application $g \ : \ E/\sim \to \ F$ tel que $g \circ \pi \ = \ f$.

De plus, si f est surjective g l'est aussi et g est injective si l'implication dans a est une équivalence .

***Démonstration** :*

b ⇒ a Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $x \sim y$ entraîne d'après le lemme I.3.11.3.8,, $\pi(x) = \pi(y)$; ce qui implique $f(x) = g[\pi(x)] = g[\pi(y)] = f(y)$.

a ⇒ b Unicité S'il existe une application $g : E/\sim \to F$, telle que $g \circ \pi = f$, alors g est unique parce que π est surjective (cf. le point i de la proposition I.3.11.3.6.)

existence Plus précisément pour tout $\alpha \in E/\sim$ il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \pi(x)$. Alors nécessairement $g(\alpha) = g[\pi(x)] = f(x)$. Ceci sera une bonne définition pour g ; si dès que $\alpha = \pi(y)$, pour $y \in E$ on a encore $g(\alpha) = g[\pi(y)] = f(y)$.

Or $\pi(y) = \alpha = \pi(x)$ equivaut précisément, en vertu du lemme I.3.11.3.8, à $x \sim y$; ce qui entraîne d'après le point a, que $f(x) = f(y)$; et assure donc que g est bien définie.

Injectivité L'application g est injective si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\forall(\alpha,\beta) \in E/\sim \times E/\sim,\ g(\alpha) = g(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ g[\pi(x)] = g[\pi(y)] \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)\} \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)\} \\
&\Rightarrow \{\forall(x,y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y\}\ .
\end{aligned}$$

Surjectivité Si g est surjective, comme π l'est, $f = g \circ \pi$, l'est aussi.

Réciproquement, si f est surjective, pour tout $u \in F$, il existe $x \in E$ tel que $u = f(x)$; ce qui entraîne $u = g[\pi(x)]$; ce qui assure que g est surjective[5]

I.4 . −Graphes finis simples non-orientés

Définition I.4.1 (Graphe simple non orienté) Un *graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (cf. la définition I.2.8,) est dit *simple* et on parle alors de *graphe simple non-orienté* , si $\forall x \in \mathcal{P}_{1,2}(G),\ \#\big(\varepsilon(G)^{-1}\big(\{x\}\big)\big) < \#(x)$.

Cette formulation très concise mais peut-être pas suffisamment explicite signifie en fait que :

— Si $u \in \mathcal{V}(G)$ est un *sommet* de G, $\{u\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$ est un *singleton* *i.e.* $\#\big(\{u\}\big) = 1$. On exige alors que son *image réciproque* $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u\}\}\big)$; c'est-à-dire l'*ensemble* des *arêtes* dont les deux *extrémités* sont égales à u, contient strictement moins d'un *élément* *i.e.* est vide. Autrement dit le *graphe non-orienté* G n'a pas de *boucle* (cf. le point iv de la définition I.2.12.)

— Si $(u, v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, avec $u \neq v$, sont deux *sommets* distincts de G, $\{u, v\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, est alors une *paire* ; ce qui entraîne que son *image réciproque* $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u, v\}\}\big)$ par $\varepsilon(G)$ *i.e.* l'*ensemble des arêtes* d'*extrémités* u et v, possède au plus un *élément* . Autrement dit, dans G il y a au plus une *arête* entre deux *sommets* distincts.

Remarque I.4.2 (Adjacence) Il a été question de *relation d'adjacence* (cf. la définition I.1.8, le point vi de la définition I.2.3, le point vi de la définition I.2.12.) Cependant dans ces cas très généraux cete *relation* ne suffisaient par à décrire le *graphe* ni même le *graphe non-orienté* . On comprend bien, en effet, que la seule information que deux *sommets* sont *voisins* ne suffit pas à savoir combien d'*arêtes* il y a entre les deux, a fortiori dans quel sens elles vont …

De manière peut-être un peu plus formelle, ce qui précède se reformulerait en disant que deux *graphes* (resp. *graphes non-orientés*) peuvent avoir la même *relation d'adjacence* sans nécessairement être *isomorphes* .

5. C'est d'ailleurs un fait générale pour des *applications* $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ que si $v \circ u$ est surjective, alors v l'est.

Dans le cas des *graphes simples non-orientés* on imagine que la donnée de la *relation d'adjacence* suffit à définir le *graphe* dans la mesure où il suffit de savoir s'il y a une *arête* entre deux *sommets* ou pas. La proposition I.4.3 qui suit formalise plus précisément cette idée :

Proposition I.4.3 (Adjacence dans un graphe simple non-orienté) *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H),$ *des graphes simples non-orientés .*

i) ***(Relation d'adjacence)***
Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) G *et* H *sont isomorphes (cf. la définition I.2.14.)*

b) $\mathcal{R}(G) \cong \mathcal{R}(H)$ *(cf. I.2.12.vi.)*

Démonstration *: Précisons un peu ce que signifie le point b. Ceci signifie d'abord qu'il existe une bijection* $\alpha : \mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(H)$ *tel que*

$$\forall (v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ v\,\mathcal{R}(G)\,w \Leftrightarrow \alpha(v)\,\mathcal{R}(H)\,\alpha(w)\ ;$$

ce qu'on pourrait encore écrire $\big(\alpha \times \alpha\big)\big(\mathcal{R}(G)\big) = \mathcal{R}(H)$ *, (cf. 0.2, le point iv de la définition I.1.13.10.)*

a $\Rightarrow$ *b C'est une conséquence immédiate de la définition de graphes non-orientés isomorphes (cf. I.2.14.)*

b $\Rightarrow$ *a Soit donc* $\alpha : \mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(H)$ *une bijection telle que* $\forall (v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ v\,\mathcal{R}(G)\,w \Leftrightarrow \alpha(v)\,\mathcal{R}(H)\,\alpha(w)$ *. Pour tout* $e \in \mathcal{E}(G)$*, il existe* $\{v, w\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$ *tel que* $\varepsilon(G)(e) = \{v, w\}$ *. Il s'ensuit que* $v\,\mathcal{R}(G)\,w$ *; ce qui entraîne* $\alpha(v)\ \mathcal{R}(H)\ \alpha(w)$ *; ce qui entraîne encore* $0 < \#\big(\varepsilon(H)^{-1}\big(\{\{\alpha(v), \alpha(w)\}\}\big)\big) \leq 1$ *; la seconde inégalité résultant du fait que* H *est un graphe simple non-orienté .*

Il existe donc $f \in \mathcal{E}(H)$ *tel que* $\varepsilon(H)^{-1}\big(\{\{\alpha(v), \alpha(w)\}\}\big) = \{f\}$ *. Posons alors* $\beta(e) = f$*. On a donc défini une application* $\beta : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$*.*

Pour tout ($f \in \mathcal{E}(H)$*, il existe un unique* $\{x, y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(H)$ *tel que* $\varepsilon(H)(f) = \{x, y\}$ *. En particulier* $x\,\mathcal{R}(H)\,y$ *. Or il existe un unique* $(v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ *tel que* $\alpha(v) = x$ *et* $\alpha(w) = y$ *. Il s'ensuit, en vertu du point b, que* $v\,\mathcal{R}(G)\,w$ *; d'où du fait que* G *est un graphe simple non-orienté , il existe un unique* $e \in \mathcal{E}(G)$ *tel que* $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{v, w\}\}\big) = \{e\}$ *. En posant* $\gamma(f) := e$*, on vient de définir une application* $\gamma : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(G)$ *.*

Reste à constater que β *et* γ *sont les bijections réciproques l'une de l'autre et que le couple* (α, β) *fait bien de* G *et* H *des graphes non-orientés isomorphes .*

ii) ***(Le cas fini)***
Supposons que G *et* H *sont finis i.e. sont des graphes finis simples non-orientés . On remarques que les applications* $\mathfrak{a}(G)$ *et* $\mathfrak{a}(H)$ *(cf. I.3.9,) qui sont apriori à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, sont en fait à valeurs dans* $\{0, 1\}$*.*

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a) G *et* H *sont isomorphes (cf. la définition I.2.14.)*

b) $\mathfrak{a}(G) \cong \mathfrak{a}(H)$ *, où* $\mathfrak{a}$ *est l'application introduite en I.3.9.*

***Démonstration** : Précisons que le point b signifie qu'il existe une bijection $\alpha : \mathcal{V}(G) \cong \mathcal{V}(H)$ telle que*

$$\forall (v,w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ \mathfrak{a}(G)(v,w) \ = \ \mathfrak{a}(H)\big(\alpha(v), \alpha(w)\big) \ .$$

Il résulte alors de la remarque I.3.10, que

$$\forall (v,w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G),\ v \,\mathcal{R}(G)\, w \ \Leftrightarrow \ \alpha(v) \,\mathcal{R}(H)\, \alpha(w) \ ;$$

et on conclut alors grâce au point i .

Définition I.4.4 (Graphe fini simple non-orienté) Si un *graphe fini non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (cf. la définition I.3.1,) est *simple* au sens de la définition I.4.1 ci-dessus on dit que G est un *graphe fini simple non-orienté*. Cela signifie explicitement que :

— $\mathcal{V}(G)$ est un *ensemble fini* ;
— $\mathcal{E}(G)$ est un *ensemble fini* ;
— le *graphe non-orienté* G n'a pas de *boucle* ;
— dans le *graphe non-orienté* G il y a au plus une *arête* entre deux *sommets* distincts.

Remarque I.4.5 On aurait pu définir la notion de *graphe simple* et même de *graphe à involution simple* ; mais nous n'en aurons sans doute pas l'usage.

Exemple I.4.6 (Graphes simples non-orientés) a) **(Graphe vide)**

Le *graphe vide non-orienté* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ (cf. le point a de l'exemple I.2.10,) est un *graphe simple non-orienté*. Puisque $\emptyset$ est un *ensemble fini*, $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ est un *graphe fini simple non-orienté*.

b) **(Graphes isolés)**

Les *graphes isolés* $\big(V, \emptyset, \varepsilon\big)$ pour V un *ensemble* quelconque (cf. le point b de l'exemple I.2.10,) sont des *graphes simples non-orientés*.

Si V est un *ensemble fini*, le *graphe isolé* $\big(V, \emptyset, \varepsilon\big)$ est un *graphe fini simple non-orienté*.

Lemme I.4.7 (Degré dans un graphe fini simple non-orienté) *La définition du degré pour un graphe fini non-orienté donnée en I.3.6 se simplifie encore pour un graphe fini simple non-orienté : Si* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *est un graphe fini simple non-orienté,*

$$\forall u \in \mathcal{V}(G),\ d_G(u) \ = \ \#\big(N_G(u)\big) \ .$$

***Démonstration** : Appliquer les définitions.*

Définition I.4.8 (Graphe fini simple non-orienté k-régulier) On dit qu'un *graphe fini simple non-orienté* est *k-régulier* s'il existe un *entier naturel* $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u \in \mathcal{V}(G),\ d_G(u) = k$.

On donne I.4.9 à I.4.15 une liste de *graphes finis simples non-orientés* dont il est bon de connaître les définitions.

Définition I.4.9 (Graphe isolé à n sommets) Pour $n \in \mathbb{N}$ le *graphe isolé à n som-mets* est le *graphe fini simple non-orienté* $\big([1;Nn], \emptyset, \varepsilon\big)$ (cf. le point b de l'exemple I.4.6, le point b de l'exemple I.3.3, le point b de l'exemple I.2.10.)

C'est le *graphe fini non-orienté* dont

- — l'*ensemble des sommets* est $[1;n]$;
- — l'*ensemble des arêtes* est $\emptyset$
- — l'*application extrémités* ε l'*unique application* (cf. le point c de l'exemple I.1.13.14,) $\emptyset \to \mathcal{P}_{1,2}([1;n])$.

On notera usuellement $\mathbf{I}_n$ ce *graphe fini simple non-orienté* .

Pour $n = 0$, $\mathbf{I}_0$ est le *graphe vide* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ (cf. le point a de l'exemple I.4.6.)

Définition I.4.10 (Chemins de longueur n) Étant donné un *entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, le *chemin de longueur n* est le *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ dont :

- — l'*ensemble des sommets* est $[0;n]$;
- — l'*ensemble des arêtes* est $\big\{\{i, i+1\}_{0 \le i \le n-1}\big\}$;
- — l'*application extrémités* ε est la restriction de l'*identité* à $\mathcal{E}(\mathbf{P}_n) \subset \mathcal{P}_{1,2}([0;n])$.

Exemple I.4.11 (Chemins de longueur n) Le *chemin* de *longueur* 0 $\mathbf{P}_0$ est *isomorphe* au *graphe isolé* $\mathbf{I}_1$ à un *sommet* .

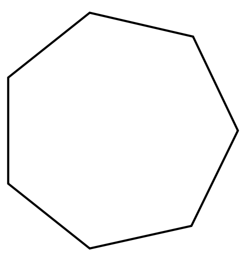
Définition I.4.12 (Cycles de longueur n) Étant donné un *entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'*ensemble* des *classes* d'*entiers* modulo n. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on notera encore i sa *classe* dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le *cycle de longueur n* $\mathbf{C}_n$ est le *graphe fini simple non-orienté* dont :

- — l'*ensemble des sommets* est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
- — l'*ensemble des arêtes* est $\big\{\{i, i+1\}_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\big\}$;
- — l'*application extrémités* ε est la restriction de l'*identité* à $\mathcal{E}(\mathbf{C}_n) \subset \mathcal{P}_{1,2}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exemple I.4.13 (Cycles de longueur n) a)

$$\begin{array}{ccc} 1 & ---- & 2 \\ | & & | \\ 4 & ---- & 3 \end{array}$$

est usuellement noté $\mathbf{C}_4$.

b)  est usuellement noté $\mathbf{C}_7$.

Définition I.4.14 (Graphes complets à n sommets) Étant donné un *entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, le *graphe complet à n sommets* $\mathbf{K}_n$ est le *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{K}_n$ dont

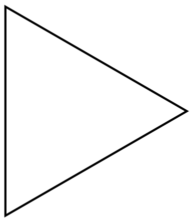
— l'*ensemble des sommets* est $[1;n]$;
— l'*ensemble des arêtes* est $\left\{\{i,j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}\right\}$;
— l'*application extrémités* est la restriction de l'*identité* à $\mathcal{E}(\mathbf{K}_n) \subset \mathcal{P}_{1,2}([1;n])$.

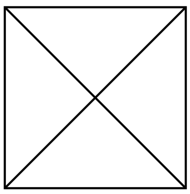
C'est le *graphe fini simple non-orienté* à n *sommets* ayant « le plus possible d'*arêtes* ».

Exemple I.4.15 (Graphes complets à n sommets) a) (**Graphe vide**)
Le *graphe complet* $\mathbf{K}_0$ n'est autre que le *graphe isolé* $\mathbf{I}_0$ qui est encore le *graphe vide* $(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset)$.

b) (**Graphe complet à 1 *sommet***)
Le *graphe complet* $\mathbf{K}_1$ est encore le *graphe isolé* $\mathbf{I}_1$ à un seul *sommet* .

c) $1 --- 2$ est le *graphe complet* $\mathbf{K}_2$. Il est en fait *isomorphe* au *chemin* $\mathbf{P}_1$ de *longueur* 1.

d)  est le *graphe complet* $\mathbf{K}_3$. Il est en fait *isomorphe* au *cycle* $\mathbf{C}_3$ de *longueur* 3 .

e)  est le *graphe complet* $\mathbf{K}_4$.

I.5 . −Exercices

I.5.1 . −Ensembles applications

Exercice I.5.1.1 (Injection) Étant donée une application $f : A \to B$,

1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est injective ;

ii) il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}A$.

On dit alors que g est une *rétraction* de f.

2) Une telle rétraction est elle unique ? Étudier le cas de $A = B = \mathbb{N},\ f(n) = 2n$.

Exercice I.5.1.2 (Surjection) Étant donnée une application $f : A \to B$,

1) démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est surjective ;

ii) il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \mathrm{Id}B$.

On dit alors que g **est une *section* de** f.

2) Une telle section est elle unique ?

3) Démontrer que si deux sections ont même image elles coïncident.

Exercice I.5.1.3 (Propriétés des applications) Soit $f : E \to F$ **une application.**

1) **a)** Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(A)) \subset A\,.$$

b) Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ A = f(f^{-1}(A))\,.$$

2) (**Injectivité (facultatif)**)

a) Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))\,.$$

b) Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))\,.$$

Exercice I.5.1.4 (Bijection réciproque) **1)** Pour des ensembles E et F, montrer que $f : E \to F$ est une bijection de E sur F si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F\,. \qquad 1$$

2) Il existe au plus une application $g : F \to E$ vérifiant 1.1.

3) Si g vérifie 1.1, g est elle-même une bijection qu'on appelle du fait de l'unicité établie à la question 2 , la *bijection réciproque* de f.

Exercice I.5.1.5 (Produit cartésien) Faire la preuve de la proposition I.1.13.15.

Exercice I.5.1.6 (Produit cartésien et applications) **1)** $(\cdot \times \cdot)$
Faire la démonstration de la proposition 0.3.
Indication : *Ce sont des vérifications essentiellement élémentaires ; même si ces énoncés ne sont pas absolument tautologiques.*

2) Soient a, b, c trois ensembles.

$$\text{Étant donnée une application } f \ : \ a \times b \ \to \ c,$$

pour tout $x \ \in \ a$, on définit $g(x) \in c^b$ une application de b dans c par

$$g(x)(y) \ := \ f\big((x,y)\big) \ .$$

Montrer que l'application

$$\phi \ : \ c^{a\times b} \ \to \ (c^b)^a \ , \ f \ \mapsto \ g$$

est une bijection,
Indication : *on pourra donner sa bijection réciproque.*

Exercice I.5.1.7 ($\mathcal{P}_{1,2}(\cdot)$) Faire la démonstration de la proposition 0.5.

I.5.2 . −Relations d'équivalence

Exercice I.5.2.1 (Classes d'équivalence) Faire la preuve du lemme I.3.11.3.2.

Exercice I.5.2.2 (Applications surjectives) Faire la preuve de la proposition I.3.11.3.6.

Exercice I.5.2.3 (Partitions) Donner la preuve de la proposition I.3.11.3.4.

I.5.3 . −Ensembles finis

Exercice I.5.3.1 (Intervalles de $\mathbb{N}$) Soient p et q deux entiers naturels.

1) Montrer qu'il existe une application injective $f \ : \ [0;p] \ \to \ [0;q]$ si et seulement si $p \leq q$.

2) En déduire qu'il existe une application bijective $f \ : \ [0;p] \ \to \ [0;q]$ si et seulement si $p \ = \ q$.

3) En déduire qu'il n'existe pas d'application injective $f \ : \ \mathbb{N} \ \to \ [0;p]$.

I.5.4 . −Graphes

Exercice I.5.4.1 (Graphes (à involution, non-orientés) isomorphes) Faire la démonstration de la proposition I.1.12, de la proposition I.2.5 et de la proposition I.2.15.

Exercice I.5.4.2 (Caractérisation alternative des graphes à involution) Pour $G \ := \ \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* on notera

$$\begin{array}{rccc} \sigma(G): & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \\ & (u,v) & \longmapsto & (v,u) \end{array}$$

et $G^{\mathbf{sym}} \ := \ \big(\ \mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \sigma(G)\circ\varepsilon(G) \ \big) \ .$

1) Soit $G \ := \ \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* .

a) Montrer que $G^{\mathbf{sym}}$ est un *graphe* .

b) $G^{\mathbf{sym}\mathbf{sym}} = G$.

2) Étant donné un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

Inv$_1$) Il existe une *application* $\mathbf{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ telle que $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ est un *graphe à involution* au sens de la définition I.2.1.

Inv$_2$) Il existe une *application* $\mathbf{inv}(G) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ telle que

i) $\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \mathbf{inv}(G)\big) : G \to G^{\mathbf{sym}}$ est un *morphisme de graphes* (cf. la définition II.1.1,) et

ii) $\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \mathbf{inv}(G)\big) \circ \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \mathbf{inv}(G)\big) = \mathrm{Id}_G$.

Exercice I.5.4.3 (Correspondance entre graphes à involution et graphes non-orientés) 1) Faire la démonstration du point i de la proposition I.2.20.

2) Faire la démonstration de la proposition II.1.6 .

3) Faire la démonstration du point iii de la proposition I.2.20.

4) Faire la démonstration du point iv de la proposition I.2.20.

5) Faire la démonstration du point v de la proposition I.2.20.

6) Faire la démonstration du point vi de la proposition I.2.20.

Exercice I.5.4.4 (Quelques propriétés du graphe à involution associé à un graphe non-orienté)
Les notations sont celles I.2.18.1 à I.2.18.4.

1) (Produit fibré)
Montrer que pour tout *ensemble* X et tout *couple* d'*applications* $\big(\alpha : X \to \mathcal{E}(G), \beta : X \to \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)\big)$ vérifiant $\varepsilon(G) \circ \alpha = \pi_{1,2}(G) \circ \beta$; *i.e.* pour tout *carré commutatif* $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varepsilon(G)} \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\pi_{1,2}(G)} & \mathcal{P}_{1,2}(G) \end{array}$; il existe une *unique application* $\gamma : X \to \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(G)$ telle que $\alpha = \theta(G) \circ \gamma$ et $\beta = \varepsilon^{\mathrm{inv}}(G) \circ \gamma$.

2) (Fibre)

a) Pour tout $x \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, déterminer $\theta(G)^{-1}\big(\{\varepsilon(G)^{-1}\big(\{x\}\big)\}\big)$ en fonction de $\varepsilon^{\mathrm{inv}}(G)^{-1}(\{(y,z)\})$ pour $(y,z) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$.

b) Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, la *restriction* $\theta(G)_{|\varepsilon^{\mathrm{inv}}(G)^{-1}(\{(u,v)\})}$ de $\theta(G)$ à $\varepsilon^{\mathrm{inv}}(G)^{-1}(\{(u,v)\})$ est une *bijection* sur $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{u,v\}\}\big)$.

3) (Voisins, prédécesseurs, successeurs)
Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8,) et** $G^{\mathbf{inv}}$ **le *graphe à involution associé* (cf. la définition I.2.19.)**

Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{V}(G)$, la *restriction* $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)|N^-_{G^{\mathrm{inv}}}(u)}$ (resp. $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)|N^+_{G^{\mathrm{inv}}}(u)}$,) de l'*identité* de $\mathcal{V}(G)$ à l'*ensemble* des *produits cartésiens* (cf. le point ii de la définition I.1.7,) (resp. à l'*ensemble* des *successeurs* ,) du *sommet* u de G^{inv}, est une *bijection* à valeurs dans l'*ensemble* $N_G(u)$ des *voisins* (cf. le point v de la définition I.2.12,) du *sommet* u dans le *graphe non-orienté* G.

I.5.5 . −Graphes finis

Exercice I.5.5.1 (Graphes associés) 1) (Quelques exemples)
Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini non-orienté* , donner, dans les cas suivants, sont *graphe à involution associé* G^{inv} au sens de la définition I.2.19 :

a) (Graphe isolé)
$G := \mathbf{I}_n$ le *graphe isolé* à n *sommets* (cf. la définition I.4.9 ;)

b) (Graphe complet)
$G := \mathbf{K}_2$ est le *graphe complet* à 2 *sommets* (cf. la définition I.4.14 ;)

c) (Boucle)
$G := \big(\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}$ est le *graphe fini non-orienté* ayant un unique *sommet* $\emptyset$ et une seule *arête* $\{\emptyset, \emptyset\}$ qui est une *boucle* (cf. le point iv de la définition I.2.12.) L'application $\varepsilon(G)$ est bien évidemment donnée par $\varepsilon(G)\big(\{\emptyset, \emptyset\}\big) = \{\emptyset, \emptyset\}$.

2) Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe fini non-orienté* et** $G^{\mathbf{inv}}$ **le *graphe à involution associé* associé (cf. la définition I.2.19.)**

a) Comparer $\#\big(\mathcal{E}(G)\big)$ et $\#\big(\mathcal{E}\big(G^{\mathrm{inv}}\big)\big)$.

b) Confronter la formule obtenue aux constructions de la question 1 .

Exercice I.5.5.2 (Propriétés des degrés) 1) a) Faire la démonstration
du point ii de la proposition I.3.7.

b) Confronter la formule obtenue ci-dessus aux exemples de *graphes à involution associés* connus et en particulier ceux construits à l'exercice I.5.5.1.

2) Faire la démonstration
du point iii de la proposition I.3.7.

I.5.6 . –Graphes finis simples non-orientés

Exercice I.5.6.1 (Nombre d'arêtes) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe fini simple non-orienté* .**

Déterminer le nombre d'*arêtes* $\#\big(\mathcal{E}(G)\big)$ de G en fonction des *degrés* des *sommets* de G.

Exercice I.5.6.2 (Graphes à n sommets) Soit $n \in \mathbb{N}$ **un *entier naturel* .**

Combien existe-t-il de *graphes finis simples non-orientés* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ tels que

— $\mathcal{V}(G) = [1;n]$;
— $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}_{1,2}([1;n])$;
— $\varepsilon(G) = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}([1;n])}{}_{|\mathcal{E}(G)}$?

Exercice I.5.6.3 (Graphes réguliers) Soit G un *graphe k-régulier* possédant n *sommets* .

Combien d'*arêtes* G possède-t-il ?

Exercice I.5.6.4 (Lemme des poignées de main) Soit G un *graphe fini simple non-orienté* .

Montrer que le nombre de sommets de degré impair dans G est pair.

Exercice I.5.6.5 (Graphe des arêtes) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **un *graphe* . On définit le *graphe des arêtes* de G $L(G)$ de la manière suivante :**

— $\mathcal{V}(L(G)) = \mathcal{E}(G)$.
— **Il y a une *arête* entre deux *sommets* e et f de $L(G)$ si les *arêtes* e et f dans G ont un *sommet* en commun :** $\forall (e,f) \in \big(\mathcal{V}(L(G)) \times \mathcal{V}(L(G))\big) = \big(\mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G)\big),\ \{e,f\} \in \mathcal{E}(L(G)) \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{V}(G),\ u \in \varepsilon(G)(e) \cap \varepsilon(G)(f)$.

1) (**Chemin de longueur** n)
Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{P}_n)$ du *chemin* $\mathbf{P}_n$ pour $n \geq 2$.

2) (**Cycle de longueur** n)
Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{C}_n)$ du *cycle* $\mathbf{C}_n$ pour $n \geq 3$.

3) (**Graphe complet**)
Déterminer le *graphe des arêtes* $L(\mathbf{K}_3)$ du *graphe complet* $\mathbf{K}_3$.

4) Étudier $L(\mathbf{K}_4)$.

5) (**Graphes k-réguliers**)
Si G est un *graphe k-régulier* , montrer que $L(G)$ est *ℓ-régulier* pour un *entier naturel* $\ell \in \mathbb{N}$ à déterminer.

Exercice I.5.6.6 (Caractérisation des *graphes* G vérifiant $L(G) = G$) 1) Montrer que

$$2\#\left(\mathcal{E}(L(G))\right) = \sum_{x \in \mathcal{V}(G)} d_G(x)(d_G(x)-1)\ .$$

2) En déduire tous les graphes G tels que $L(G) = G$.