II . −Morphismes de graphes, sous-graphes, endomorphismes, automorphismes . . .

II.1 . −Morphismes, homomorphismes, de graphes, (à involution, non-orientés)

Définition II.1.1 (Morphisme de graphes (à involution, non-orientés)) Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}($ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.))

Un *morphisme* (ou *homomorphisme* , – les deux termes étant exactement synonymes –) $\phi : G \to H$ est un *couple* $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}(\phi)\big)$ tel que

MorGph$_1$) (**Sommets**)
$\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ est une *application* (cf. le point iii de la définition I.1.13.12.)

MorGph$_2$) (**Arêtes**)
$\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ est une *application* .

MorGph$_3$) (**Extrémités**)
$\varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G)$; c'est-à-dire que le *diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd} , \text{(resp. } \begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd} ,\text{) (resp. } \begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd} \text{)}$$

est un *carré commutatif* (cf. le point 1 du point ii de la notation 0.1.)

Explicitement, pour toute *arête* $e \in \mathcal{E}(G)$ tel que

$$\varepsilon(G)(e) = (v, w) , \text{ (resp. } (v, w) , \text{) (resp. } \{v, w\} , \text{)}$$

$$\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \big(\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big) , \text{ (resp. } \big(\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big) , \text{) (resp. } \big\{\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big\} . \text{)}$$

Si G et H sont des *graphes à involution* , on a de plus :

MorGph$_4$) (**Involution**)

$$\mathbf{inv}(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}(\phi) \circ \mathbf{inv}(G) \text{ ; i.e. } \begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd} \text{ est un } \textit{carré commutatif} .$$

On parlera de *morphisme de graphes* (resp. *morphisme de graphes à involution*) (resp. *morphisme de graphes non-orientés* .) On dira en fait simplement *morphisme* si le context est clair.

Notation II.1.2 i) (**Identité**)
Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* , (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{Id}_G := \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)}\big)$, qu'on appelle l'*identité* de G.

ii) (**Composé**)

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ des *graphes* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$, $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$, $\big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I), \mathbf{inv}(I)\big)$, des *graphes à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ des *graphes non-orientés* .)

Soient
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{tikzcd}$$
des *morphismes de graphes* , (resp.
$$\frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}} \quad \text{et} \quad \frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\mathbf{inv}(I)"'] \\ \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] & \mathcal{E}(I) \end{tikzcd}}$$
des *morphismes de graphes à involution* ,) (resp.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\psi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)I] \end{tikzcd}$$
des *morphismes de graphes non-orientés* .)

On note
$$\psi \circ \phi := \big(\, \mathcal{V}(\psi) \circ \mathcal{V}(\phi) \,,\, \mathcal{E}(\psi) \circ \mathcal{E}(\phi) \,\big)$$
qu'on appelle le *composé* de ϕ et ψ.

iii) (**Hom**)

Pour G et H des *graphes* , (resp. des *graphes à involution* ,) (resp. des *graphes non-orientés* ,) on notera $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gph}}(G, H)$, (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G, H)$,) (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G, H)$,) l'*ensemble* des *morphismes de graphes* (resp. *morphismes de graphes à involution* ,) (resp. *morphismes de graphes non-orientés* ,) de G dans H.

Bien sûr, si aucune confusion ne doit en résultaer, on notera simplement $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Lemme II.1.3 *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ *des graphes , (resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$, $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$, $\big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I), \mathbf{inv}(I)\big)$, *des graphes à involution ,) (resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ *des graphes non-orientés .)*

Soient
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{tikzcd}$$
des morphismes

de graphes , (resp. $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ *et* $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(I)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(I)}\downarrow \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \end{array}}$ *des morphismes de graphes à involution* ,) (resp. $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([]G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([]\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([]H] \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(I)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([]H] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([]\psi]} & \mathcal{P}_{1,2}([]I] \end{array}$ des *morphismes de graphes non-orientés* .)

i) ***(Identité)***
L'identité de G Id_G *(cf. II.1.2.i,) est un morphisme de graphes* (resp. un *morphisme de graphes à involution* ,) (resp. un *morphisme de graphes non-orientés* .)

Démonstration *:* (cf. la question 1 de l'exercice II.7.2.1.)

ii) ***(Composé)***
$\psi \circ \phi$ (cf. II.1.2.ii,) est un *morphisme de graphes* , (resp. un *morphisme de graphes à involution* ,) (resp. un *morphisme de graphes non-orientés* .)

Démonstration *:* (cf. la question 2 de l'exercice II.7.2.1.)

iii) $\phi \circ \mathrm{Id}_G = \phi$ et $\mathrm{Id}_H \circ \phi = \phi$.

Notation II.1.4 Pour $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}$ un *morphisme de graphes* , (resp. $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ un *morphisme de graphes à involution* ,) (resp. $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([]G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([]\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([]H] \end{array}$ un *morphisme de graphes non-orientés* ,) on simplifiera les notations si cela ne doit pas prêter à confusion :

On écrira $\phi(v)$ au lieu de $\mathcal{V}(\phi)(v)$ pour tout $v \in \mathcal{V}(G)$.

De même on écrira $\phi(e)$ au lieu de $\mathcal{E}(\phi)(e)$ pour $e \in \mathcal{E}(G)$. Si $e = (v,w)$ (resp. (v,w),) (resp. $\{v,w\}$,) on écrira $\phi\big((v,w)\big)$, (resp. $\phi\big((v,w)\big)$,) (resp. $\phi\big(\{v,w\}\big)$;) voire simplement $\phi(v,w)$.

Les deux propositions qui suivent sont données dans un souci de cohérence, en particulier avec le paragraphe I.2 ; mais nous n'en aurons que peu d'usage dans la suite.

Proposition II.1.5 (Fonctorialité du graphe non-orienté associé) *i)* ***(Morphisme)***

Soit $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ \varepsilon(G)\big\downarrow & & \varepsilon(H)\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ \mathbf{inv}(G)\big\downarrow & & \mathbf{inv}(H)\big\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ *un morphisme de graphes à involution (cf. la définition II.1.1,) il* <u>existe un unique</u> *morphisme de graphes non-orientés* $\phi^{n\text{-}O} : G^{n\text{-}O} \to H^{n\text{-}O}$ *tel que*

n-O_1) $\mathcal{V}\big(\phi^{n\text{-}O}\big) = \mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$.

n-O_2) $\mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big) : \mathcal{E}^{n\text{-}O}(G) \to \mathcal{E}^{n\text{-}O}(H)$ *est l'unique application telle que* $\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big)\circ\omega(G)$; *c'est-à-dire telle que* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ \omega(G)\big\downarrow & & \omega(H)\big\downarrow \\ \mathcal{E}^{n\text{-}O}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}^{n\text{-}O}(\phi^{n\text{-}O})} & \mathcal{E}^{n\text{-}O}(H) \end{array}$ *est un carré commutatif (cf. 0.1.ii.1 ;) où* $\mathcal{E}^{n\text{-}O}(\cdot)$ *et* $\omega(\cdot)$ *sont définis comme au point i du lemme I.2.7.*

Démonstration : *Il faut montrer qu'on dispose bien d'un couple d'applications vérifiant les axiomes* MorGph$_1$ *à* MorGph$_3$ *de la définition II.1.1.*

MorGph$_1$ *est tautologiquement donné par la condition n-*O_1.

MorGph$_2$ *Rappelons que* $\big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G),\mathbf{inv}(G)\big)$ *(resp.* $\big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H),\mathbf{inv}(H)\big)$*,) étant, par hypothèse, un graphe à involution , on peut le munir de la relation d'équivalence* $\sim(G)$ *(resp.* $\sim(H)$*,) (cf. le point i du lemme I.2.7.) Alors pour tout* $(e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G)$, $e\sim(G)\ f$ *entraîne que :*

$e = f$ *et dans ce cas* $\mathcal{E}(\phi)(e) = \mathcal{E}(\phi)(f)$ *et, par conséquent* $\omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big)$.

$e = \mathbf{inv}(G)(f)$ *et dans ce cas* $\mathcal{E}(\phi)(e) = \mathcal{E}(\phi)\big(\mathbf{inv}(G)(f)\big) = \mathbf{inv}(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big)$ *(cf. l'axiome* MorGph$_4$ *de la définition II.1.1,) puisque* ϕ *est, par hypothèse, un morphisme de graphes à involution . Il en résulte que* $\mathcal{E}(\phi)(e)\sim(H)\ \mathcal{E}(\phi)(f)$.

On a donc établi que $\forall(e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G),\ e\sim(G)\ f \Rightarrow \mathcal{E}(\phi)(e)\sim(H)\ \mathcal{E}(\phi)(f)$; *ce qui entraîne que* $\forall(e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G),\ e\sim(G)\ f \Rightarrow \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big)$; *c'est-à-dire que* $\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi)$ *est constante sur les classes d'équivalence pour la relation* $\sim(G)$. *Il existe donc, en vertu de la proposition I.3.11.3.9, une unique application* $\mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big) : \mathcal{E}^{n\text{-}O}(G)\to\mathcal{E}^{n\text{-}O}(H)$ *telle que* $\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big)\circ\omega(G)$;

MorGph$_3$ *On a, en vertu de la caractérisation de* $\varepsilon^{n\text{-}O}$ *donnée au point ii du lemme I.2.7 que* $\mathcal{P}_{1,2}(\phi)\circ\varepsilon^{n\text{-}O}(G)\circ\omega(G) = \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\circ\pi_{1,2}(G)\circ\varepsilon(G)$.

Or il découle des définitions de $\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)$ *(cf. 0.2,) et* $\mathcal{P}_{1,2}(\phi)$ *(cf. 0.4.ii,) que* $\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \\ \pi_{1,2}(G)\big\downarrow & & \big\downarrow\pi_{1,2}(H) \\ \mathcal{P}_{1,2}(G) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}(\phi)} & \mathcal{P}_{1,2}(H) \end{array}$ *est un carré commutatif (cf. 0.1.ii.1.)*

Il s'ensuit que $\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{n\text{-}O}(G) \circ \omega(G) = \pi_{1,2}(H) \circ \mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G)$. Or, d'après l'axiome MorGph$_3$ de la définition II.1.1, puisque ϕ est, par hypothèse un morphisme de graphes à involution , $\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G) = \varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi)$.

Il vient alors $\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{n\text{-}O}(G) \circ \omega(G) = \pi_{1,2}(H) \circ \varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \varepsilon^{n\text{-}O}(H) \circ \omega(H) \circ \mathcal{E}(\phi)$. On a précisément prouvé ci-dessus, l'existence (et l'unicité) de $\mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big)$ satisfaisant la condition n-O$_2$, i.e. $\omega(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big) \circ \omega(G)$.

On a donc $\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{n\text{-}O}(G) \circ \omega(G) = \varepsilon^{n\text{-}O}(H) \circ \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big) \circ \omega(G)$.

Or $\omega(G)$ étant une application surjective , $\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{n\text{-}O}(G) = \varepsilon^{n\text{-}O}(H) \circ \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big)$; ce qui assure que $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}^{n\text{-}O}\big(\phi^{n\text{-}O}\big)\big)$ satisfait l'axiome MorGph$_3$.

*ii) **(Identité)***

Pour tout graphe à involution $\mathrm{Id}_G{}^{n\text{-}O} = \mathrm{Id}_{G^{n\text{-}o}}$.

***Démonstration** : Il suffit de constater que $\mathrm{Id}_{G^{n\text{-}o}}$ est bien un morphisme de graphes non-orientés vérifiant n-O$_1$ et n-O$_2$. L'énoncé d'unicité du point i assure alors le résultat.*

*iii) **(Composé)***

Pour tous morphismes de graphes à involution $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ et $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(I)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(I)\times \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathbf{inv}(I)}\downarrow \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \end{array}}$

$\psi \circ \phi^{n\text{-}O} = \psi^{n\text{-}O} \circ \phi^{n\text{-}O}$.

***Démonstration** : Il suffit, ici encore, de constater est un morphisme de graphes non-orientés vérifiant n-O$_1$ et n-O$_2$; et d'utliser l'énoncé d'unicité du point i .*

Proposition II.1.6 (Fonctorialité du graphe à involution associé à un graphe non-orienté) *i) **(Morphisme)***

Soit $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$ *un morphisme de graphes non-orientés (cf. la définition II.1.1,) il* <u>existe un unique</u> *morphisme de graphes à involution $\phi^{\mathrm{inv}} : G^{\mathrm{inv}} \to H^{\mathrm{inv}}$ tel que*

inv$_1$) $\mathcal{V}\big(\phi^{\mathrm{inv}}\big) = \mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$.

inv$_2$) $\mathcal{E}^{\mathrm{inv}}\big(\phi^{\mathrm{inv}}\big) : \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(G) \to \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(H)$ (cf. I.2.18.1,) est l'unique application telle que

$\theta(H) \circ \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}\big(\phi^{\mathrm{inv}}\big) = \mathcal{E}(\phi) \circ \theta(G)$ *; c'est-à-dire telle que* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}^{\mathrm{inv}}(\phi^{\mathrm{inv}})} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle\theta(G)}\downarrow & & {\scriptstyle\theta(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}$ *est un carré commutatif*

(cf. 0.1.ii.1.)

***Démonstration** : Il faut montrer qu'on dispose bien d'un couple d'applications vérifiant les axiomes MorGph_1 à MorGph_4 de la définition II.1.1.*

MorGph_1 est tautologiquement donné par la condition inv_1.

MorGph_2 Unicité S'il existe une application $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big) : \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G) \to \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(H)$ satisfaisant la condition inv_2, $\forall (e,u,v) \in \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G),\ \mathcal{E}(\phi)\big(\theta(G)(e,u,v)\big) = \theta(H)\big(\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)(e,u,v)\big)$; ce qui équivaut à $\theta(H)\big(\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)(e,u,v)\big) =$ $\mathcal{E}(\phi)(e)$.

Pour tout $(e,u,v) \in \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G)$ il existe donc $(x,y) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H)$ tel que $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)(e,u,v) = \big(\mathcal{E}(\phi)(e,x,y\big)$. Or si l'on impose à $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)$ d'être un morphisme de graphes à involution (cf. l'axiome MorGph_3 de la définition II.1.1,) (ou d'ailleurs même simplement un morphisme de graphes (cf. l'axiome MorGph_3 de la définition II.1.1,)) $\big(\mathcal{V}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big) \times \mathcal{V}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)\big)\big(\varepsilon^{\mathsf{inv}}(G)(e,u,v)\big) = \varepsilon^{\mathsf{inv}}(H)\big(\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)(e,u,v)\big)$; ce qui entraîne (cf. I.2.18.3,) $(x,y) = \big(\mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big)$. Ceci assure l'unicité de $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)$.

Existence L'analyse faite ci-dessus impose que si $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)$ existe, nécessairement pour tout $(e,u,v) \in \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G), \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)(e,u,v) = \big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big)$. C'est une bonne définition, pour peu que $\big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big)$ soit bien un élément de $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(H)$.

Or si $(e,u,v) \in \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(G)$, c'est que précisément $e \in \mathcal{E}(G)$ et $\varepsilon(G)(e) = \{u,v\}$.

Or ϕ est, par hypothèse, un morphisme de graphes non-orientés ; si bien que $\mathcal{P}_{1,2}(\phi)\big(\varepsilon(G)(e) = \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)$; ce qui équivaut à $\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\big(\{u,v\}\big) = \big\{\mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big\}$.

Ceci prouve que $\big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big) \in \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}(H)$; et assure donc que $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)$ est bien définie.

Morphisme Reste donc à prouver que $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)\big)$ est bien un morphisme de graphes à involution ; c'est-à-dire satisfait bien l'axiome MorGph_3 de la définition II.1.1 et l'axiome MorGph_4 de la définition II.1.1. Ce sont des vérifications faciles, dans la mesure où l'on dispose d'une expression explicite pour $\mathcal{E}^{\mathsf{inv}}\big(\phi^{\mathsf{inv}}\big)$; elles sont laissées en exercice.

ii) ***(Identité)***
Pour tout graphe non-orienté ${\mathrm{Id}_G}^{\mathsf{inv}} = \mathrm{Id}_{G^{\mathsf{inv}}}$.

iii) ***(Composé)***

Pour tous morphismes de graphes non-orientés
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\psi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)I] \end{tikzcd} ,$$
$\psi \circ \phi^{\mathsf{inv}} = \psi^{\mathsf{inv}} \circ \phi^{\mathsf{inv}}$.

II.2 . −Sous-graphes (à involution non-orientés)

Proposition II.2.1 (Sous-graphe (à involution, non-orienté)) *Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des graphes (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.))*

On suppose que $\mathcal{V}(H) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(G)$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) — $\varepsilon(H) = \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)}$,

— $\Big($*resp.* $\begin{array}{rcl} \varepsilon(H) & = & \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)} , \\ \mathbf{inv}(G)\left(\mathcal{E}(H)\right) & \subset & \mathcal{E}(H) , \\ \mathbf{inv}(G)_{|\mathcal{E}(H)} & = & \mathbf{inv}(H) \end{array} \Big)$,

— $\big($*resp.* $\varepsilon(H) = \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)}$.$\big)$

b) Le couple d'applications $\big((\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)})_{|\mathcal{V}(H)} : \mathcal{V}(H) \to \mathcal{V}(G) , (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)})_{|\mathcal{E}(H)} : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(G) \big)$ *est un morphisme de graphes (resp. morphisme de graphes à involution , (resp. morphisme de graphes non-orientés ,) (cf. la définition II.1.1.)*

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.7.3.1.)*

Définition II.2.2 (Sous-graphe (à involution, non-orienté)) Si G et H vérifient les assertions équivalentes de la proposition II.2.1, on dit que H est un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

On dira simplement *sous-graphe* si aucune confusion n'est à craindre. On notera parfois $H \subset G$; même si, au titre du *langage ensembliste* (cf. I.1.13,) cette notation est abusive.

Proposition II.2.3 (Données équivalentes à un sous-graphe) *Soit* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe (resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe à involution ,) (resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe non-orienté .)*

Soient $W \subset \mathcal{V}(G)$ *et* $F \subset \mathcal{E}(G)$ *des ensembles .*

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a) Il existe un sous-graphe $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *(resp. un sous-graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$*,) (resp. un sous-graphe non-orienté* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$*,) de* G *tel que* $\mathcal{V}(H) = W$ *et* $\mathcal{E}(H) = F$*.*

b) — $\varepsilon(G)(F) \subset W \times W$,

— $\Big($*resp.* $\begin{array}{rcl} \varepsilon(G)(F) & \subset & W \times W \\ \mathbf{inv}(G)(F) & \subset & F \end{array} ,\Big)$

— $\big($*resp.* $\varepsilon(G)(F) \subset \mathcal{P}_{1,2}(W)$.$\big)$

Lorsque H *existe il est alors unique sous les conditions du point a ; c'est alors le sous-graphe* $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$ *, (resp. sous-graphe à involution* $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}, \mathbf{inv}(G)_{|F}\big)$*,) (resp. le sous-graphe non-orienté* $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$ *.)*

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.7.3.2.)*

Définition II.2.4 (Sous-graphe induit) Un *sous-graphe* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ (resp. un *sous-graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$,) d'un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ (resp. d'un *graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$,) (resp. d'un *graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$,) est *induit* si

$$\begin{array}{c} \forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H) \\ \big(\text{resp. } \forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H) ,\ \big) \\ \big(\text{resp. } \forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{P}_{1,2}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H) .\big) \end{array} \qquad \text{II.2.4.1}$$

Autrement dit c'est un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) ayant « le plus possible d'*arêtes* ».

On dit alors que H est un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. *sous-graphe non-orienté induit* ;) mais on s'en tient à *sous-graphe induit* si aucune confusion ne doit en résulter.

Exemple II.2.5 (Sous-graphes) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,.)

a) Les inclusions $\mathcal{V}(G) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{E}(G)$ font de G un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ;) (et même un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté induit* ,)) de lui-même.

b) (**Graphe vide**)
Les inclusions $\emptyset \subset \mathcal{V}(G)$ et $\emptyset \subset \mathcal{E}(G)$ font du *graphe vide* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ (cf. le point a de l'exemple I.1.5, (resp. le point a de l'exemple I.2.2,) (resp. le point a de l'exemple I.2.10,)) un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

C'est même un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté induit* .)

c) (**Graphe isolé**)
Les inclusions $\mathcal{V}(G) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\emptyset \subset \mathcal{E}(G)$ font du *graphe isolé* $\big(\mathcal{V}(G), \emptyset, \varepsilon\big)$ (cf. le point b de l'exemple I.1.5, (resp. le point b de l'exemple I.2.2,) (resp. le point b de l'exemple I.2.10,)) un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

$\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ est donc un *sous-graphe* de $\big(\mathcal{V}(G), \emptyset, \varepsilon\big)$ (et même un *sous-graphe induit*) qui lui-même est un *sous-graphe* (et même un *sous-graphe induit*) de G.

d) (**Graphes complets**)
Pout $n \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* , l'inclusion $[1;n] \hookrightarrow [1;n+1]$ fait du *graphe complet* $\mathbf{K}_n$ (cf. la définition I.4.14,) un *sous-graphe non-orienté induit* du *graphe complet* $\mathbf{K}_{n+1}$.

Tout *graphe fini simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, tel que $\#\big(\mathcal{V}(G)\big) \leq n$, est *isomorphe* (cf. la définition I.2.14,) à un *sous-graphe non-orienté* de $\mathbf{K}_n$.

Proposition II.2.6 (Propriétés des sous-graphes) *Ici les le cas des graphes à involution n'a pas à être traité indépendamment de celui des graphes .*

Soient donc $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe non-orienté ,) et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ un sous-graphe (resp. $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ un sous-graphe non-orienté .)

i) (***Voisins***)

$$\text{Pour tout } v \in \mathcal{V}(H), \quad \begin{array}{lll} N_H^-(v) \subset N_G^-(v) & \text{(cf. le point ii de la définition I.1.7,)} \\ N_H^+(v) \subset N_G^+(v) & \text{(cf. le point iii de la définition I.1.7,)} \\ N_H(v) \subset N_G(v) & \text{(cf. le point iv de la définition I.1.7;)} \\ \big(\text{ resp. } N_H(v) \subset N_G(v) & \text{(cf. le point v de la définition I.2.12.)}\big) \end{array}$$

ii) **(relation d'adjacence)**
Les relations d'adjacence $\mathcal{R}(G)$ de G et $\mathcal{R}(H)$ de H *(cf. la définition I.1.8, et le point vi de la définition I.2.12) vérifient*

$$\forall (v,w) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H),\ v\,\mathcal{R}(H)\,w \ \Rightarrow\ v\,\mathcal{R}(G)\,w\ .$$

L'implication précédente est une équivalence si H *est induit i.e. un sous-graphe induit (resp. un sous-graphe non-orienté induit .)*

iii) **(Graphes finis)**
Si G *est fini i.e. est un graphe fini (resp. un graphe fini non-orienté ,) alors* H *est un graphe fini (resp. un graphe fini non-orienté .)*

On a alors, pour tout $v \in \mathcal{V}(H)$:

$$\begin{array}{lll} d^-_H(v) & \leq & d^-_G(v) \quad \text{(cf. le point i de la définition I.3.5,)} \\ d^+_H(v) & \leq & d^+_G(v) \quad \text{(cf. le point ii de la définition I.3.5,)} \\ d_H(v) & \leq & d_G(v) \quad \text{(cf. I.3.5 ;)} \end{array}$$
$$\big(\text{ resp. } d_H(v) \ \leq\ d_G(v) \text{ (cf. la définition I.3.6.)}\big)$$

iv) **(Graphes simples)**
Si G *est simple (cf. la définition I.4.1,) i.e. un graphe simple (resp. un graphe simple non-orienté ,) il en est de même de* H. *En particulier si* G *est un graphe fini simple non-orienté (cf. la définition I.4.4,) il en est de même de* H.

Proposition II.2.7 (Image d'un morphisme) *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes (cf. la définition I.1.1,) (resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *et* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.))*

Soit
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{tikzcd}$$
un *morphisme de graphes* , (resp.
$$\frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"] \\ \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(G) \end{tikzcd}}$$
un *morphisme de graphes à involution* ,) (resp.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
un *morphisme de graphes non-orientés* ,) (cf. la définition II.1.1.)

Alors :

$$\begin{array}{c} \Big(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)}\ \Big), \\ \Big[\ \textit{resp. } \Big(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)},\ \mathbf{inv}(G)_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)}\Big),\ \Big] \\ \Big[\ \textit{resp. } \Big(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)}\ \Big);\ \Big] \end{array} \qquad \textit{II.2.7.1}$$

est un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (reesp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

Démonstration : *On a immédiatement*

$$\mathrm{Im}\left(\mathcal{V}(\phi)\right) \subset \mathcal{V}(G) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right) \subset \mathcal{E}(G)\ .$$

Par ailleurs la condition II.2.1.a est tautologiquement satisfaite.

Définition II.2.8 (Image) Pour $\phi : H \to G$ un *morphisme de graphes* , (resp. *morphisme de graphes à involution* ,) (resp. *morphisme de graphes non-orientés* ,) le *sous-graphe* (resp. *sous-graphe à involution* ,) (resp. *sous-graphe non-orienté* ,) II.2.7.1 sera appelé *image* de ϕ et noté $\mathrm{Im}\,\phi$.

Ici encore les deux propositions qui suivent garantissent la cohérence avec le paragraphe I.2 ; mais ne seront pas vraiment utilisées dans la suite.

Proposition II.2.9 (Sous-graphes associés) *Si* $\left(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\right) \subset \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\right)$ *est un sous-graphe à involution (resp. un sous-graphe à involution et un sous-graphe induit ,) (cf. la définition II.2.2,)* $H^{\text{n-O}}$ *est un sous-graphe non-orienté (resp. un sous-graphe non-orienté induit ,) de* $G^{\text{n-O}}$ *(cf. la définition II.2.2.)*

Proposition II.2.10 (Sous-graphes associés) *Si* $H := \left(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\right) \subset G := \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\right)$ *est un sous-graphe non-orienté (resp. un sous-graphe non-orienté induit ,) (cf. la définition II.2.2,)* H^{inv} *est un sous-graphe à involution (resp. un sous-graphe à involution et un sous-graphe induit ,) de* G^{inv} *(cf. la définition II.2.2.)*

II.3 . −Isomorphismes de graphes (à involution, non-orientés)

Définition II.3.1 (Isomorphisme de graphes (à involution, non-orientés)) Soient $G := \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\right)$ et $H := \left(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\right)$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\right)$ et $\left(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\right)$ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \left(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\right)$ et $H := \left(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\right)$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.))

isomorphisme de graphes (resp. *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) (ou simplement *isomorphisme* si le contexte est clair) de G sur H est un *morphisme de graphes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}$$

, (resp. *morphisme de graphes à involution*
$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$$
,)

(*morphisme de graphes non-orientés*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$$
,) tel qu'il existe un *morphisme de gra-*

phes $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(G)} \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}$ (resp. *morphisme de graphes à involution* $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(G)} \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbf{inv}(G)} \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \end{array}}$

(*morphisme de graphes non-orientés* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(G)} \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\psi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{array}$,) tel qu'il existe un vérifiant :

$$\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G \text{ et } \phi \circ \psi = \mathrm{Id}_H \text{ (cf. II.1.2.i et II.1.2.ii.)} \qquad \text{II.3.1.1}$$

Notation II.3.2 ($\mathrm{Isom}(\cdot,\cdot)$) Soient $G := \big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H)\big)$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G),\mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H),\mathbf{inv}(H)\big)$ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G),\mathcal{E}(G),\varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H),\mathcal{E}(H),\varepsilon(H)\big)$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.))

On note $\mathrm{Isom}_{\mathbf{gph}}(G,H)$, (resp. $\mathrm{Isom}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G,H)$,) (resp. $\mathrm{Isom}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G,H)$,) l'*ensemble* des *isomorphismes de graphes* (resp. *isomorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphismes de graphes non-orientés* ,) de G sur H.

On notera simplement $\mathrm{Isom}(G,H)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Lemme II.3.3 (Inverse) *Étang donné un morphisme* $\phi : G \to H$,

i) ***(Unicité)***
il existe au plus un morphisme $\psi : H \to G$ *vérifiant II.3.1.1.*

ii) ***(Existence)***
si $\phi : G \cong H$ *est un isomorphisme , il existe un unique* $\psi : H \to G$ *vérifiant II.3.1.1 et de plus* ψ *est un isomorphisme .*

Démonstration *: (cf. l'exercice II.7.2.2.)*

Définition II.3.4 (Inverse) Si $\phi : G \cong H$ est un *isomorphisme* , l'unique *isomorphisme* $\psi : H \cong G$ vérifiant II.3.1.1 (cf. le point ii du lemme II.3.3,) sera appelé l'*isomorphisme inverse* ou simplement l'*inverse* de ϕ.

L'*isomorphisme* ϕ est alors très clairement l'*inverse* de ψ ; et l'on dira que ϕ et ψ sont *inverses l'un de l'autre*.

Même si elle ne peut pas s'en déduire, la la proposition II.3.5 qui suit a des analogues pour d'autres structures algébriques (cf. la proposition II.4.5.6, la proposition II.5.6.11.)

Proposition II.3.5 (Isomorphisme de graphes (à involution, non-orientés)) *Soit* $\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd}$$

un morphisme de graphes , (resp. *un morphisme de graphes à invo-*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}$$

lution ,) (resp. $\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd}$ *un morphisme de graphes non-orientés .)*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *Le morphisme* ϕ *est un isomorphisme .*

b) *Les applications* $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ *sont bijectives .*

Démonstration :

a ⇒ b (cf. l'exercice II.7.2.3.)

b ⇒ a Si $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ sont des *bijections* , il existe (cf. le point iii de la définition I.1.13.18,) des *applications*

$$\alpha : \mathcal{V}(H) \to \mathcal{V}(G) \text{ et } \beta : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(G) \text{ telles que } \begin{array}{rcl} \alpha \circ \mathcal{V}(\phi) &=& \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)} \\ \mathcal{V}(\phi) \circ \alpha &=& \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(H)} \\ \beta \circ \mathcal{E}(\phi) &=& \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)} \\ \mathcal{E}(\phi) \circ \beta &=& \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(H)} \ ; \end{array}$$

ce qui entraîne, (cf. 0.2,)

$$(\alpha\times\alpha) \circ \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)} \text{ et } \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ (\alpha\times a\alpha) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H)} \ . \quad \textit{II.3.5.1}$$

Il suffit désormais de montrer que (α, β) est un *morphisme de graphes* de H dans G. Puisque $\mathcal{E}(\phi) \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(H)}$, $\varepsilon(H) = \varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) \circ \beta$. Or ϕ est un *morphisme* , si bien que $\varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G)$; ce qui entraîne

$$\varepsilon(H) = \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G) \circ \beta \ .$$

Il en résulte que $(\alpha \times \alpha) \circ \varepsilon(H) = (\alpha \times \alpha) \circ \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G) \circ \beta$; ce qui entraîne, grâce à II.3.5.1,

$$(\alpha \times \alpha) \circ \varepsilon(H) = \varepsilon(G) \circ \beta \ .$$

Cette dernière identité assure précisément (cf. II.1.1.MorGph$_3$,) que $(\alpha, \beta) : H \to G$ est un *morphisme de graphes* .

On avait déjà introduit la notion de *graphes isomorphes* (cf. la définition I.1.11,) (resp. de *graphes à involution isomorphes* (cf. la définition I.2.4,)) (resp. de *graphes non-orientés isomorphes* (cf. la définition I.2.14 ;)) dont il serait pour le moins déraisonnable qu'elle n'entretienne aucun rapport avec la notion d'*isomorphisme de graphes* (resp. *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) introduite ci-dessus. Aucune ambiguïté lexicale n'est à redouter comme l'atteste le corollaire ci-dessous de la proposition II.3.5 :

Corollaire II.3.6 (Graphes (à involution, non orientés) isomorphes) *Soient* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H$ *des graphes (cf. la définition I.1.1,) (resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *et* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.))*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) G et H sont des graphes isomorphes ((cf. la définition I.1.11,)) (resp. des graphes à involution isomorphes (cf. la définition I.2.4,)) (resp. des graphes non-orientés isomorphes (cf. la définition I.2.14 ;)) c'est-à-dire qu'il existe des bijections $\alpha : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\beta : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ telles que

$$\forall (v,w,e) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = \begin{matrix} & (v,w), \\ \big(\text{resp.} & (v,w),\big) \\ \big(\text{resp.} & \{v,w\},\big) \end{matrix} \Leftrightarrow \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) = \begin{matrix} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\ , \\ \big(\text{resp.} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\ ,\big) \\ \big(\text{resp.} & \big\{\alpha(v),\alpha(w)\big\}\ .\big) \end{matrix} \quad 1$$

b) L'équivalence est affaiblie en une implication dans la condition a.1 ; plus précisément il existe des bijections $\alpha : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\beta : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ telles que

$$\forall (v,w,e) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) = \begin{matrix} & (v,w), \\ \big(\text{resp.} & (v,w),\big) \\ \big(\text{resp.} & \{v,w\},\big) \end{matrix} \Rightarrow \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) = \begin{matrix} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\ , \\ \big(\text{resp.} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\ ,\big) \\ \big(\text{resp.} & \big\{\alpha(v),\alpha(w)\big\}\ .\big) \end{matrix} \quad 1$$

c) Il existe un morphisme $\phi : G \to H$ tel que les applications $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ sont des bijections .

d) Il existe un isomorphisme $\phi : G \cong H$.

***Démonstration** :*

a ⇒ b Est immédiat.

b ⇒ c La condition b.1 signifie précisément que le couple d'applications est un morphisme de graphes ; en effet : Pour tout $e \in \mathcal{E}(G)$, si $(u,v) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ est tel que $(u,v) = \varepsilon(G)(e)$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \big(\alpha(u),\alpha(v)\big) &= \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha\times\alpha)\big((u,v)\big) &= \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha\times\alpha)\circ\varepsilon(G)(e) &= \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big)\ ; \end{aligned}$$

ce qui assure, l'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $e \in \mathcal{E}(G)$, que $(\alpha\times\alpha) \circ \varepsilon(G) = \varepsilon(H) \circ \beta$; ce qui signifie précisément que le couple (α, β) vérifie la condition définition II.1.1,axiome MorGph$_3$.

c ⇒ d établit l'équivalence c ⇔ d ; mais on peut se contenter de n'utiliser ici que l'implication ; qui est d'ailleurs la partie vraiment significative de cette proposition.

d ⇒ a *Si* $\phi\ :\ G\ \to\ H$ *est un isomorphisme de graphes* du *graphe* G sur le *graphe* H, les *applications* $\mathcal{V}(\phi)\ :\ \mathcal{V}(G)\ \to\ \mathcal{V}(H)$ et $\mathcal{E}(\phi)\ :\ \mathcal{E}(G)\ \to\ \mathcal{E}(H)$ *sont bijectives* ; ce qui résulte, par exemple, de l'*implication* ⇒ .

Alors pour tout $e\ \in\ \mathcal{E}(G)$, et tout $(u,v)\ \in\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$, $(u,v)\ =\ \varepsilon(G)(e)\ =\ (u,v)$ entraîne (cf. ,) puisque ϕ est un *morphisme de graphes* ,

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{V}(\phi)(u),\mathcal{V}(\phi)(v)\big) &= (\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big)\\ &= \big(\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)\big)\big(\varepsilon(G)(e)\big)\\ &= \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)\ ;\end{aligned}$$

ce qui donne l'implication dans a.1.

Si ϕ est un *isomorphisme de graphes* , il possède un
inverse ψ (cf. II.3.4,).
Pour tout $(e,u,v)\ \in\ \mathcal{E}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(\phi)(u),\mathcal{V}(\phi)(v)\big)\ =\ \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)$ s'écrit encore $(\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big)\ =\ \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)$; on a alors la suite d'*implication* :

$$\begin{aligned} & & (\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big) &= \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)\\ &\Rightarrow & \big(\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)\big)\big((\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big)\big) &= \big(\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)\big)\circ\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)\\ &\Rightarrow & (u,v) &= \varepsilon(G)\circ\mathcal{E}(\psi)\circ\mathcal{E}(\phi)(e)\\ &\Rightarrow & (u,v) &= \varepsilon(G)\circ\mathcal{E}(\psi\circ\phi)(e)\\ &\Rightarrow & (u,v) &= \varepsilon(G)(e)\ ;\end{aligned}$$

ce qui prouve l'*implication réciproque* dans a.1.

Ici encore les deux propositions qui suivent garantissent la cohérence avec le paragraphe I.2 ; mais ne seront pas vraiment utilisées dans la suite.

Proposition II.3.7 (Graphes associés) $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(H)}\big\downarrow\\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H)\end{array}}{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\big\downarrow\\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\end{array}}$ *est un isomorphisme de graphes à involution* si et seulement si $\phi^{\text{n-O}}\ :\ G^{\text{n-O}}\ \to\ H^{\text{n-O}}$ est un *isomorphisme de graphes non-orientés* .

Démonstration : Si ϕ est un *isomorphisme de graphes à involution* il possède un *inverse* ; c'est-à-dire qu'il *existe un morphisme de graphes à involution* $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow\\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\end{array}}{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathbf{inv}(G)}\downarrow\\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\end{array}}$ *tel que* $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_H$. *Alors* $(\psi \circ \phi)^{\textit{n-O}} = \mathrm{Id}_G{}^{\textit{n-O}}$ et $(\phi \circ \psi)^{\textit{n-O}} = \mathrm{Id}_H{}^{\textit{n-O}}$; *ce qui entraîne, en vertu du point ii de la proposition II.1.5, et du point iii de la proposition II.1.5, que* $\psi^{\textit{n-O}} \circ \phi^{\textit{n-O}} = \mathrm{Id}_{G^{\text{n-o}}}$ et $\phi^{\textit{n-O}} \circ \psi^{\textit{n-O}} = \mathrm{Id}_{H^{\text{n-o}}}$; *ce qui assure que* $\phi^{\textit{n-O}}$ *est un isomorphisme de graphes non-orientés de* $G^{\textit{n-O}}$ *sur* $H^{\textit{n-O}}$.

Proposition II.3.8 (Graphes associés) $\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow\\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H]\end{array}$ *est un isomorphisme de graphes non-orientés si et seulement si* $\phi^{\textit{inv}} : G^{\textit{inv}} \to H^{\textit{inv}}$ *est un isomorphisme de graphes à involution* .

II.4 . −Endomorphismes de graphes (à involution non-orientés)

Définition II.4.1 (Endomorphisme) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.))

Un *endomorphisme de graphes* (resp. *endomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *endomorphisme de graphes non-orientés* ,) de G est un *morphisme* (de *graphes* (resp. de *graphes à involution*) (resp. de *graphes non-orientés* ,)) au sens de la définition II.1.1, $\phi : G \to G$ de G dans lui-même.

On dira simplement *endomorphisme* si cela ne prête pas à confusion.

Notation II.4.2 ($\mathrm{End}(\cdot)$) Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}}(G)$, (resp. $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}^{\text{inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{End}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G)$,) l'*ensemble* des *endomorphismes de graphes* (resp. *endomorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *endomorphismes de graphes non-orientés* ,) de G.

On notera simplement $\mathrm{End}(G)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Exemple II.4.3 (Identité) Pour G un *graphe* , (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) l'*identité* Id_G de G (cf. II.1.2.i,) est un *endomorphisme* de G.

Remarque II.4.4 ($\big(\mathrm{End}(G), \circ\big)$) Soit G un *graphe* (resp. *graphe à involution* ,) (resp. *graphe non-orienté* .)

i) (**Composition**)
$\forall(\phi, \psi) \in \mathrm{End}(G) \times \mathrm{End}(G),\ \phi \circ \psi \in \mathrm{End}(G)$. La *composition* $\circ$ (cf. II.1.2.ii,) est donc une *loi interne* (cf. la définition II.4.5.1,) sur $\mathrm{End}(G)$.

ii) (**Élément neutre**)
Il résulte alors du point iii du lemme II.1.3 que Id_G est un *élément neutre* pour $\circ$ (cf. le point i de la définition II.4.5.11.)

iii) Le *couple* $\big(\mathrm{End}(G), \circ\big)$ est donc un *magma associatif* (cf. la définition II.4.5.9.)

II.4.5 . –Loi de composition, (magma,) morphisme

Définition II.4.5.1 (Loi de composition) Pour un ensemble M on appelle *loi de composition* (ou *loi de composition interne* ou *loi interne*) $*$ sur M une application (cf. I.1.13.12.iii,)

$$* \,:\, M \times M \;\to\; M\ .$$

Évidemment à la notation $((x, y), z) \in *$ qui découle de l'axiomatique présentée précédemment on préférera toujours celle $x * y \;=\; z$.

Le couple $(M, *)$ est appelé *magma*.

Définition II.4.5.2 (Morphisme homomorphisme) Étant donnés deux magmas

$$(M, *) \text{ et } (N, \cdot)$$

on dit qu'une application $f \;:\; M \;\to\; N$ est un *morphisme* ou *homomorphisme* de $(M, *)$ dans $(N, \cdot)$ si

$$\forall x \in M,\ \forall y \in M,\ \left(f(x * y) \;=\; f(x) \;\cdot\; f(y)\right)\ .$$

Lemme II.4.5.3 *i) Pour tout magma $(M, *)$ l'identité Id_M est un morphisme du magma M dans lui-même.*

ii) Pour $(M, *_M)$, $(N, *_N)$ et $(P, *_P)$ des magmas, $f \;:\; M \;\to\; N$ et $g \;:\; N \;\to\; P$ des morphismes, le composé $g \circ f$ est un morphisme.

Définition II.4.5.4 Étant donnés deux magmas $(M, *)$ et $(N, \cdot)$, un morphisme $f \;:\; M \;\to\; N$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g \;:\; N \;\to\; M$ tel que

$$g \;\circ\; f \;=\; \mathrm{Id}_M \text{ et } f \;\circ\; g \;=\; \mathrm{Id}_N\ .$$

On notera $\mathrm{Isom}(M, N)$ l'ensemble des iso*morphisme* s de $(M, *)$ dans $(N, \cdot)$.

Lemme II.4.5.5 *Étant donné un morphisme $f \;:\; M \;\to\; N$, si f possède une application réciproque i.e. une application $g \;:\; N \;\to\; M$ telle que*

$$f \;\circ\; g \;=\; \mathrm{Id}_N \text{ et } g \;\circ\; f \;=\; \mathrm{Id}_M,$$

alors g et également un morphisme.

Démonstration *:*

$$\begin{array}{rcl} \forall (u, v) \in N \times N, \quad g(u \cdot v) & = & g\big[f[g(u)] \cdot f[g(v)]\big] \\ & = & g\big[f[g(u) * g(v)]\big] \\ & = & g(u) * g(v)\ . \end{array}$$

Proposition II.4.5.6 *Étant donnés deux magmas $(M, *)$ et $(N, \cdot)$, une application $f \;:\; M \;\to\; N$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme bijectif.*

Démonstration *: Si f est un isomorphisme, c'est par définition un morphisme qui est bijectif puisque possédant une application réciproque.*

Réciproquement si $f \;:\; M \;\to\; N$ est une application bijective, il existe (cf. l'exercice I.5.1.4,) une application

$$g \;:\; N \;\to\; M \text{ telle que } g \;\circ\; f \;=\; \mathrm{Id}_M \text{ et } f \;\circ\; g \;=\; \mathrm{Id}_N\ .$$

Alors : Le résultat découle immédiatement du lemme II.4.5.5.

Définition II.4.5.7 Soit $(M,*)$ un magma.

i) **(Enndo*morphisme* s)**
Un morphisme $f : M \to M$ de M dans lui-même est appelé *endomorphisme*. On note $\mathrm{End}(M)$ l'ensemble des endo*morphisme* s de M.

ii) **(Automorphisme)**
Un morphisme $f : M \to M$ est un *automorphisme* si c'est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme. Il revient au même, grâce à la proposition II.4.5.6, de dire que f est un endomorphisme bijectif. On note $\mathrm{Aut}(M)$ l'ensemble des auto*morphisme* s de M.

Exemple II.4.5.8 Pour un magma M, l'identité Id_M est un automorphisme de M.

Définition II.4.5.9 (Associativité) On dit qu'une *loi de composition* $*$ sur un ensemble M est *associative* si

$$\forall x \in M,\ \forall y \in M,\ \forall z \in M,\ ((x*y)*z \ = \ x*(y*z))\ .$$

On peut alors parler pour $(M,*)$ de *magma associatif* .

Définition II.4.5.10 (Commutativité) On dit qu'une *loi de composition* $*$ sur un ensemble M est *commutative* si

$$\forall x \in M,\ \forall y \in M,\ (x*y \ = \ y*x)\ .$$

Définition II.4.5.11 (Éléments particuliers) Soit $(M,*)$ un ensemble muni d'une *loi de composition* associative (magma associatif)

i) **(Élément neutre)**
Un *élément neutre* pour $(M,*)$ est un élément $\epsilon \in M$ tel que

$$\forall x \in M,\ (x*\epsilon \ = \ \epsilon*x \ = \ x)\ .$$

ii) **(Symétrique)**
Si M possède un *élément neutre* ϵ on dit qu'un élément $x \in M$ possède un symétrique pour la loi $*$ s'il existe $y \in M$ tel que

$$x*y \ = \ y*x \ = \ \epsilon\ .$$

Remarque II.4.5.12 Dans la suite on ne considérera que des *magmas associatifs* dans la mesure où ce seront les seuls que nous rencontrerons. Il se peut que certains énoncés puissent être formulés sans cette hypothèse mais nous ne cherchons pas le plus grand degré de généralité possible mais une présentation que nous espérons la plus claire et la plus lisible ainsi que la moins répétitive.

Exemple II.4.5.13 Si X est un ensemble l'ensemble M des applications de X dans lui-même est un magma associatif pour la loi $\circ$ de composition des applications. Il possède un *élément neutre* Id_X. En revanche un élément $f : X \to X$ de M n'a pas de symétrique en général puisque f n'est pas bijective en général. La loi $\circ$ n'est en général pas commutative non plus.

Proposition II.4.5.14 (Propriétés) *Soient $(M,*)$ un magma associatif.*

i) Si ϵ et ϵ' sont des élément neutre s de $(M,*)$ alors $\epsilon \ = \ \epsilon'$.

ii) Si $(M,*)$ possède un élément neutre et si y et z éléments de M sont des symétriques pour $x \in M$, $y = z$.

Remarque II.4.5.15 On pourra donc parler de L'*élément neutre* d'un magma lorsqu'il en possède un et du symétrique d'un élément lorsqu'il en possède un.

Pour un magma $(M,*)$ et une partie N de M, $N \times N$ est une partie de $M \times M$. La restriction $*_{|N\times N}$ de $*$ à $N \times N$ est une application $*_{|N\times N} : N \times N \to N$. Il se peut cependant que :

Définition II.4.5.16 (Sous-magma) Que $*_{|N\times N}$ soit à valeurs dans N. On dit dans se cas que la loi $*$ se restreint en une loi interne (usuellement encore notée $*$) sur N.

On pourra alors dire que $(N,*)$ est un sous-magma de $(M,*)$

La définition ci-dessus ne présente pas un grand intérêt en soi, hormis celui de pouvoir énoncer confortablement la proposition II.4.5.17. Cette dernière n'étant d'ailleurs elle-même qu'un moyen commode de ne pas réécrire de nombreuses fois le même argument.

Proposition II.4.5.17 (Propriétés des sous-magmas) *Soit $(M,*)$ un magma.*

i) Le magma $(M,*)$ est toujours un sous-magma de lui-même. Si M possède un élément neutre ϵ, $(\{\epsilon\},*)$ est un sous-magma de $(M,*)$.

ii) Soit $(N,*)$ un sous-magma de $(M,*)$. Si $(M,*)$ est associatif (resp. commutatif) $(N,*)$ l'est aussi.

Soit $f : (M,*) \to (N,\cdot)$ un morphisme de magmas.

iii) Pour tout sous-magma M' de M, $f(M')$ est un sous-magma de N.

iv) Pour tout sous-magma N' de N, $f^{-1}(N')$ est un sous-magma de M.

Définition II.4.5.18 (RElation d'équivalence compatible)

Étant donné un magma associatif $(M,*)$,

on dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble M est *compatible à la loi* $*$ ou simplement compatible si

$$\forall (x,y,z,t) \in M \times M \times M \times M,\ \big(x \sim z \text{ et } y \sim t\big) \Rightarrow\ x * y \ \sim\ z * t\ .$$

Lemme II.4.5.19 *Si $(M,*)$ est un magma associatif, et $\sim$ une relation d'équivalence compatible,*

i) il existe une unique structure de magma sur l'ensemble quotient $M/\sim$ (ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$, (cf. la définition I.3.11.3.1,)) telle que la surjection canonique (cf. le point ii de la définition I.3.11.3.7,) $\pi : M \to M/\sim$ soit un morphisme .

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.13.)*

ii) Le magma $M/\sim$ est alors associatif (resp. commutatif) (resp. possède un élément neutre) s'il en est ainsi pour $(M,*)$.

***Démonstration** : (cf. la question 2 de l'exercice II.7.1.13.)*

Définition II.4.5.20 (Magma quotient) Avec les notations du lemme II.4.5.19, le magma $M/\sim$ est appelé *magma quotient* ou bien on dit que l'ensemble $M/\sim$ est muni de la *structure quotient*.

Proposition II.4.5.21 *Soient $(M,*)$ un magma, E un ensemble et M^E l'ensemble des applications de E dans M. Pour tout $(f,g) \in M^E \times M^E$, on définit $f *_{M^E} g \in M^E$ de la manière suivante : Pour tout $x \in E$,*

$$f *_{M^E} g(x) := f(x) * g(x) .$$

i) $(M^E, *_{M^E})$ *est un magma c'est-à-dire que $*_{M^E}$ est une loi de composition interne sur M^E.*

ii) *La loi $*_{M^E}$ est la seule loi sur l'ensemble M^E telle que, pour tout $x \in E$, l'application*

$$M^E \to M \ , \ f \mapsto f(x)$$

soit un morphisme.

iii) *Le magma $(M^E, *_{M^E})$ est associatif dès que $(M,*)$ l'est.*

iv) *Le magma $(M^E, *_{M^E})$ est commutatif dès que $(M,*)$ l'est.*

v) *Si $(M,*)$ possède un élément neutre ϵ, l'application*

$$\epsilon_{M^E} : E \to M \ , \ x \mapsto \epsilon$$

est l'élément neutre de M^E.

Définition II.4.5.22 Étant donnés un magma $(M,*)$ et un ensemble E, on appellera *loi induite* par celle de M sur M^E, la loi $*_{M^E}$ construite à la proposition II.4.5.21. On la notera bien sûr simplement $*$ en général.

Exemple II.4.5.23 On est habitué depuis longtemps à écrire $f+g$ pour f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même par exemple, ainsi que $f * g$ en utilisant les lois de compositions $+$ et $*$ dont on dispose sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Proposition II.4.5.24 *Étant donnés deux magmas $(M,*)$ et $(N,\cdot)$,*

i) *la loi $\dagger$ définie sur le produit cartésien $M \times N$ par*

$$(x,y) \dagger (z,t) := (x * z, y \cdot t)$$

est l'unique loi telle que les projections

$$p : M \times N \to M \ , \ (x,y) \mapsto x \text{ et } q : M \times N \to N \ , \ (x,y) \mapsto y$$

(cf. I.1.13.17,) soient des morphismes ;

ii) *Pour tout magma $(P,\sharp)$, et tout couple de morphismes*

$$\big(f : (P,\sharp) \to (M,*) \ , \ g : (P,\sharp) \to (N,\cdot)\big)$$

il existe un unique morphisme

$$h : (P,\sharp) \to (M \times N, \dagger) \text{ tel que } p \circ h = f \text{ et } q \circ h = g \ .$$

Démonstration : *(cf. l'exercice II.7.1.6.)*

la proposition qui suit (proposition II.4.5.25) généralise la proposition I.1.13.15 qui en est un cas particulier pour $n = 2$, mais doit cependant être établie préalablement pour pouvoir raisonner par récurrence.

Proposition II.4.5.25 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(E_k)_{1 \le k \le n}$, des ensembles.*

i) On définit par récurrence le produit cartésien des ensembles $(E_k)_{1 \le k \le n}$ par

$$\prod_{k=1}^{n+1} E_k := \prod_{k=1}^{n} E_k \times E_{n+1}$$

sachant que le produit cartésien de deux ensembles a été défini au point iii de la définition I.1.13.10.

ii) On définit également des projections

$$p_k : P := \prod_{i=1}^{n+1} E_k \to E_k \,,_{1 \le k \le n+1}$$

en supposant construites $(p_k)_{1 \le k \le n}$, on définit p_{n+1} par

$$p_{n+1} : \big(\prod_{k=1}^{n} E_k\big) \times E_{n+1} \to (x, y) \,,\, y \mapsto .$$

Ce qu'on peut écrire

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k .$$

iii) ***(Propriété universelle)***

Pour tout ensemble F et tout n-uplet d'applications $f_k : F \to E_k \,,_{1 \le k \le n}$, il existe une unique application

$$f : F \to P := \prod_{k=1}^{n} E_k \text{ telle que } \forall 1 \le k \le n,\ f_k = p_k \circ f .$$

iv) Dans le cas où il existe un ensemble E tel que $\forall 1 \le k \le n,\ E_k = E$, on rappelle que $E^{[1;n]}$ désigne l'ensemble des applications de $[1;n]$ à valeurs dans E (cf. I.1.13.13.) Pour tout $1 \le k \le n$, on définit

$$q_k : E^{[1;n]} \to E \,,\, f \mapsto f(k) .$$

En vertu du point iii , il existe une unique application

$$\phi : E^{[1;n]} \to \prod_{k=1}^{n} E \text{ telle que } \forall 1 \le k \le n,\ q_k = p_k \circ \phi .$$

L'application ϕ est alors une bijection ;

Démonstration : *Pour tout $y \in \prod_{k=1}^{n} E$, l'application $f : [1;n] \to E$ définie par*

$$\forall 1 \le k \le n,\ f(k) := p_k(y)$$

vérifie évidemment $\phi(f) = y$ ce qui assure que ϕ est surjective ;

Pour tout $(f, g) \in E^{[1;n]} \times E^{[1;n]}$, $\phi(f) = \phi(g)$ entraîne que pour tout $1 \le k \le n$, $p_k[\phi(f)] = p_k[\phi(g)]$ c'est-à-dire $q_k(f) = q_k(g)$ ou encore $f(k) = g(k)$ ce qui entraîne $f = g$, et assure donc finalement que ϕ est injective.

Remarque II.4.5.26 La construction faite au point iv de la proposition II.4.5.25 consiste en fait à considérer une application de $[1;n]$ dans E à travers son graphe qui est un n-uplet de couples $((1, f(1), \ldots, (n, f(n))$ qu'on identifie à $(f(1), \ldots, f(n))$ qui est un élément de $\prod_{k=1}^{n} E$.

Notation II.4.5.27 Dans le cas du point iv de la proposition II.4.5.25 ou de la remarque II.4.5.26, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout ensemble E, on notera

$$E^n = \prod_{k=1}^{n} E \cong E^{[1;n]} .$$

La proposition quie suit (proposition II.4.5.28) généralise la proposition II.4.5.25 au cas des magmas ou bien encore la proposition II.4.5.24 au cas de plus de deux facteurs :

Proposition II.4.5.28 *Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(M_k, *_k)_{,1 \le k \le n}$ des magmas (cf. la définition II.4.5.1,) notons*

$$\forall 1 \le k \le n,\ p_k \ : \ \prod_{i=1}^{n} M_i \ \to \ M_k \text{ les projections } .$$

Alors :

i) Il existe une unique loi de composition $*$ sur $\prod_{k=1}^{n} M_k$ telle que pour tout $1 \le k \le n$ p_k soit un morphisme ; la loi $*$ est donnée par

$$\forall\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, x_n)\big) \in \prod_{k=1}^{n} M_k \times \prod_{k=1}^{n} M_K,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \ * \ (y_1, \ldots, y_n) \ = \ (x_1 *_1 y_1, \ldots, x_n *_n y_n) .$$

ii) La loi $*$ étant définie sur $\prod_{k=1}^{n} M_k$ comme ci-dessus, si

a) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ est associative, $*$ l'est aussi ;

b) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ est commutative, $*$ l'est aussi ;

c) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ possède un élément neutre e_k, $(e_1, \ldots, e_n)$ est un élément neutre pour $*$;

d) $x \in \prod_{k=1}^{n} M_k$ est tel que pour tout $1 \le k \le n$ $p_k(x)$ possède un symétrique y_k dans M_k, alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est un symétrique pour x dans $\prod_{k=1}^{n} M_k$.

iii) Pour tout n-uplet de morphismes

$$f_k \ : \ N \ \to \ M_{k\ ,1 \le k \le n} ,$$

il existe un unique morphisme

$$f \ : \ N \ \to \ \prod_{k=1}^{n} M_k \text{ tel que } \forall 1 \le k \le n,\ f_k \ = \ p_k \ \circ \ f .$$

iv) Dans le cas où il existe M tel que $\forall 1 \leq k \leq n,\ M_k = M$, la bijection $\phi : M^{[1;n]} \cong \prod_{k=1}^{n} M$ définie par le point iv de la proposition II.4.5.25 est un isomorphisme, pour peu que $M^{[1;n]}$ soit muni de la structure définie par la proposition II.4.5.21.

Définition II.4.5.29 (Structure produit) Avec les notations de la proposition II.4.5.28 la loi $*$ définie sur $\prod_{k=1}^{n} M_k$ comme au point i de la proposition II.4.5.28 est appelée *structure produit* ou *loi produit*.

II.5 . −Automorphismes de graphes (à involution, non-orientés)

Définition II.5.1 (Automorphisme) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.))

Un *automorphisme de graphes* (resp. *automorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *automorphisme de graphes non-orientés* ,) de G *isomorphisme* $\phi : G \cong G$; autrement dit un *morphisme* $\phi : G \to G$ qui est simultanément un *isomorphisme* et un *endomorphisme* .

On dira simplement *automorphisme* si cela ne prête pas à confusion.

Notation II.5.2 ($\mathrm{Aut}(\cdot)$) Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)$, (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G)$,) l'*ensemble* des *automorphismes de graphes* (resp. *automorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *automorphismes de graphes non-orientés* ,) de G.

On notera simplement $\mathrm{Aut}(G)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Proposition II.5.3 (Caractérisation des automorphismes) *Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un graphe à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.))*

Un automorphisme de G est un endomorphisme $\phi : G \to G$ de G tel que $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ sont des bijections .

***Démonstration** : C'est une conséquence immédiate de la proposition II.3.5.*

Exemple II.5.4 (Automorphismes) i) (**Identité**)

Pour G un *graphe* , (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) l'*identité* Id_G de G (cf. II.1.2.i,) est un *automorphisme* de G.

ii) (**D'autres exemples**)

(cf. l'exercice II.7.4.2 et l'exercice II.7.4.3.)

Proposition II.5.5 (Groupe des automorphismes) *Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe (cf. la définition I.1.1,) (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un graphe à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.))*

i) ($\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$)

Le couple $\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G), \circ\big)$ est un groupe (cf. la définition II.5.6.1.)

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.7.2.4.)*

ii) ***(Permutation des sommets)***

L'application $\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G), \circ\big) \to \big(\mathcal{S}(\mathcal{V}(G)), \circ\big)$, $\phi \mapsto \mathcal{V}(\phi)$ *est un morphisme de groupes (cf. la définition II.5.6.6 ;) et où* $\mathcal{S}(\cdot)$ *est comme au point c de l'exemple II.5.6.5.*

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice II.7.2.4.)*

iii) ***(Fonctorialité)***

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes (cf. la définition I.1.1,) (resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *et* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)) (resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *et* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.))*

Soit $\phi : G \cong H$ *un isomorphisme et* $\psi : H \cong G$ *son isomorphisme inverse (cf. la définition II.3.4.) Pour tout* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$*, on définit* $\mathrm{Aut}(\phi)(\alpha) := \psi \circ \alpha \circ \phi$ *.*

Alors $\mathrm{Aut}(\phi)$ *est un isomorphisme de groupes (cf. la définition II.5.6.10.)*

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice II.7.2.4.)*

II.5.6 . – Groupes, morphismes, sous-groupes ...

Dans la proposition II.5.5 on fait largement référence aux notions de *groupe* , de *morphisme de groupes* ... Les *groupes des automorphismes* apparaîssent naturellement pour nombre de structures ; c'est pourquoi il nous a semblé opportun de rappeler ici un certain nombre de définitions et de propriétés à propos des *groupes* .

Définition II.5.6.1 (Groupe) Un *groupe* est un *couple* $(G, *)$ (le plus souvent simplement noté G,) où G est un *ensemble* et $* : G \times G \to G$ est une *application* appelée *loi de composition* vérifiant :

Gr_1) Pour tout *triplet* (x, y, z) d'*éléments* de G,

$$(x * y) * z = x * (y * z) ,$$

on dit que la *loi interne* $*$ est *associative* .

Gr_2) Il existe un *élément* $e \in G$ appelé *élément neutre* de G tel que, pour tout $x \in G$, $x * e = e * x = x$.

Gr_3) Pour tout *élément* $x \in G$, il existe un *élément* $x' \in G$ appelé *symétrique* de x et tel que $x * x' = x' * x = e$.

Il revient au même de dire que $(G, *)$ est un *magma associatif* (cf. la définition II.4.5.9,) possédant un *élément neutre* (cf. le point i de la définition II.4.5.11,) et dans lequel tout *élément* possède un *symétrique* (cf. le point ii de la définition II.4.5.11.)

Les formulations « $(G, *)$ est un *groupe* » ou « $*$ munit G d'une *structure de groupe* » sont synonymes.

Un *groupe* n'étant rien de plus (ni de moins d'ailleurs) qu'un *magma associatif* possédant un *élément neutre* et dans lequel tout *élément* possède un *symétrique* ; la proposition II.4.5.14 vaut encore ici mutatis mutandis.

Proposition II.5.6.2 (Propriétés) *Soient* $(G, *)$ *un groupe .*

i) Si ϵ et ϵ' *sont des éléments neutres de* $(G, *)$ alors $\epsilon = \epsilon'$.

ii) Si y et z éléments de E sont des symétriques pour $x \in E$, $y = z$.

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.7.1.7.)*

Définition II.5.6.3 (Groupe abélien) Étant donné un *groupe* $(G, *)$, si pour tout *couple* (x, y) d'*éléments* de G, $x * y = y * x$, on dira que G est *abélien* ou *commutatif* .

Dans ce cas on notera usuellement $+$ la *loi interne* et 0 l'*élément neutre* en référence au *groupe abélien* $(\mathbb{Z}, +)$

Remarque II.5.6.4 On pourra donc parler de L'*élément neutre* d'un *groupe* et du *symétrique* d'un *élément* dans un *groupe* .

L'*élément neutre* est souvent noté 1 et même 0 dans le cas des *groupes abéliens* par analogie avec le *groupe* $(\mathbb{Z}, +)$. Le *symétrique* d'un *élément* x est usuellement noté x^{-1} et appelé *inverse* de x, voire $-x$ dans le cas d'un *groupe abélien* et appelé alors *opposé* de x.

Exemple II.5.6.5 i) Il n'existe pas de *loi de composition* $*$ sur $\emptyset$ fasse de $(\emptyset, *)$ un *groupe* . L'axiome Gr_2 de la définition II.5.6.1 entraîne, en effet, qu'un *groupe* possède toujours au moins un *élément* c'est-à-dire n'est jamais vide.

b) On peut définir une unique loi de composition qui donne à l'ensemble $\{\emptyset\}$ à un *élément* une structure de *groupe* :

$$\emptyset * \emptyset := \emptyset .$$

c) (**Le *groupe*** $\mathcal{S}(X)$)

Un des premiers groupes qu'on peut introduire, au sens où sa définition ne nécessite guère plus que les premiers axiomes de la théorie des ensembles(cf. I.1.13,) est le *groupe* $\mathcal{S}(E)$ des *bijections* d'un ensemble E muni de la loi $\circ$(cf. l'exercice II.7.1.9.) C'est une partie du magma considéré dans l'exemple II.4.5.13, et précisément celle constituée des *éléments* qui ont un symétrique. Pour ne nécessiter que très peu de matériel pour être défini, ce *groupe* n'est cependant pas le plus aisé à étudier

d) (**Entiers modulo** n)

Pour tout entier $n > 1$, $\sim_n$ est la relation de *congruence modulo n sur* $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la *relation d'équivalence* définie par $a \sim_n b$ si $n|b - a$ pour a et b dans $\mathbb{Z}$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo n. La relation $\sim_n$ vérifie la propriété fondamentale suivante : si $a \sim_n a'$ et $b \sim_n b'$, alors $a + a' \sim_n b + b'$, (cf. la définition II.4.5.18.) Ceci permet de définir une *loi de composition interne* $+$ sur l'*ensemble* $\mathbb{Z}/n$ des classes modulo $\sim_n$, par $\overline{a} +_{\mathbb{Z}/n} \overline{b} = \overline{a + b}$.

Le *couple* $(\mathbb{Z}/n, +_{\mathbb{Z}/n})$ le plus souvent noté $(\mathbb{Z}/n, +)$ où même $\mathbb{Z}/n$ est un *groupe abélien* .

Définition II.5.6.6 (Morphisme de groupes) Étant donnés des *groupes*

$$(G, *) \text{ et } (H, \cdot),$$

un *morphisme de groupes* (ou *homomorphisme de groupes*) est une *application* $f : G \to H$ telle que pour tout *couple* (x, y) d'*éléments* de G,

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) .$$

On notera $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(G, H)$ si le contexte ne prête pas à confusion) l'*ensemble* des *morphismes* de G dans H.

Remarque II.5.6.7 On constate que dans la définition ci-dessus aucune condition supplémentaire n'est exigée par rapport à un *morphisme de magmas* (cf. II.4.5.2.)

On a l'exact analogue du lemme II.4.5.3 :

Lemme II.5.6.8 *i) Pour tout groupe $(G, *)$ l'identité (cf. le point a de l'exemple I.1.13.14,)* Id_G *est un morphisme du groupe G dans lui-même.*

ii) Pour $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ et $(K, *_K)$ des groupes , $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des morphismes le composé $g \circ f$ est un morphisme de groupes .

De même la proposition II.4.5.21 a son pendant pour les *groupes* :

Proposition II.5.6.9 *Étant donnés un groupe $(G, *)$ et un ensemble E, l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi induite (cf. II.4.5.21,) est un groupe (abélien si G l'est.)*

C'est la seule loi sur G^E telle que pour tout $x \in E$, l'évaluation en x, $G^E \to G$, $f \mapsto f(x)$ soit un morphisme de groupes .

On peut donc donner une définition analogue à la définition II.4.5.4 dont on constate qu'elle correspond d'ailleurs formellement à la définition II.3.1 :

Définition II.5.6.10 Étant donnés deux *groupes* $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, un *morphisme* $f : G \to H$ est un *isomorphisme* s'il existe un *morphisme* $g : H \to G$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_G \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_H .$$

On notera $\mathrm{Isom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ (ou simplement $\mathrm{Isom}(G, h)$ si le contexte est clair) l'*ensemble de isomorphisme de groupes* de $(G, *)$ dans $(H, \cdot)$.

On a encore, san surprise puisqu'en fait l'axiomatique n'est pas vraiment différente, un analogue de la proposition II.4.5.6 :

Proposition II.5.6.11 *Étant donnés deux groupes $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, une application $f : G \to H$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme bijectif .*

***Démonstration** : Il n'y a rien de plus à montrer que dans la démonstration de la proposition II.4.5.6.*

Exemple II.5.6.12 (Le morphisme $\mathcal{S}(u)$) Soit E et F deux ensembles. On rappelle (cf. le point c de l'exemple II.5.6.5 et l'exercice II.7.1.9,) que

$$(\mathcal{S}(E), \circ) \text{ (resp. } (\mathcal{S}(F), \circ) \text{)}$$

est le groupe des bijections de E (resp. F,) dans lui-même.

Soit $u : E \to F$ une bijection de E dans F. L'application

$$\mathcal{S}(u) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F) , \ f \mapsto u \circ f \circ u^{-1}$$

est un *isomorphisme de groupes* (cf. l'exercice II.7.1.10.)

Des définitions analogues à la définition II.4.5.7 peuvent donc être données :

Définition II.5.6.13 Soit $(G, *)$ un *groupe* .

i) (**Endomorphisme**)
Un *morphisme* $f : G \to G$ de G dans lui-même est appelé *endomorphisme de groupes* ou simplement *endomorphisme* . On note $\mathrm{End}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{End}(G)$,) l'*ensemble de endomorphisme de groupes* de G.

ii) (**Automorphisme**)
Un *morphisme* $f : G \to G$ est un *automorphisme de groupes* (ou simplement *automorphisme*) si c'est à la fois un *isomorphisme de groupes* et un *endomorphisme de groupes* . Il revient au même, grâce à la proposition II.5.6.11, de dire que f est un *bijectif* . On note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{Aut}(G)$) l'*ensemble de automorphisme de groupes* de G.

Exemple II.5.6.14 Pour un *groupe* G, l'*identité* Id_G est un *automorphisme* .

Proposition II.5.6.15 (Propriétés des morphismes) *Étant donné un morphisme de groupes*

$$f : (G, *) \to (H, \cdot) \text{ avec } e_G (\text{resp. } e_H) \text{ l'élément neutre de } G (\text{resp. } H :)$$

i) $f(e_G) = e_H$;

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.8.)*

ii) pour tout $x \in G$, *si* $y \in G$ *est son symétrique* , $f(y)$ *est le symétrique de* $f(x)$ *dans* H.

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice II.7.1.8.)*

Définition II.5.6.16 (Sous-groupe) Une partie H d'un *groupe* $(G, *)$ est un *sous-groupe* si la restriction de $*$ à $H \times H$ donne à H une structure de *groupe* .

Exemple II.5.6.17 Étant donné un *groupe* $(G, *)$ d'*élément neutre* ϵ, les *ensembles* $\{\epsilon\}$ et G lui-même sont des *sous-groupes* de G.

Remarque II.5.6.18 i) Il ne suffit pas pour que H soit un *sous-groupe* de G que H soit un sous-magma de G comme le montre la question 2 de l'exercice II.7.1.4. Il faut en effet exiger en plus que H possède un *élément neutre* (cf. II.5.6.1.Gr_2e)t que tout *élément* de H possède un *symétrique* (cf. II.5.6.1.Gr_3.)

ii) La définition de *sous-groupe* donnée ci-dessus n'est peut-être pas celle qu'on a été habitué à rencontrer qui est parfois plutôt la caractérisation donnée à la proposition II.5.6.20. On ne peut cependant se contenter de cette dernière en l'état puisqu'aux termes stricts de cet énoncé on ne saurait même pas qu'un *sous-groupe* est lui-même un *groupe* , ce qui avouons-le devra à tout le moins être établi, si l'on veut bénéficier d'une théorie utilisable. L'énoncé clef est en fait l'*équivalence* entre le point a et le point b.

Le lemme technique suivant est un ingrédient permettant d'établir l'*équivalence* entre les diverses caractérisations des *sous-groupes* .

Lemme II.5.6.19 *Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e et H un sous-groupe de G au sens de la définition II.5.6.16.*

i) Si f est l'élément neutre de H, $f = e$.

***Démonstration** : Puisque f est l'élément neutre de H,*

$$\forall x \in H,\ f * x = x$$

et, en particulier $f * f = f$. Mais f est toujours un élément de G dont l'élément neutre est e ; si bien que $f * e = f$; d'où il résulte $f * f = f * e$. En tant qu'élément de G, qui est un groupe , f possède un inverse g vérifiant $g * f = e$. Il s'ensuit que :

$$\begin{array}{rrcl} & f * f & = & f \\ \Rightarrow & f * f & = & f * e \\ \Rightarrow & g * f * f & = & g * f * e \\ \Rightarrow & (g * f) * f & = & (g * f) * e \\ \Rightarrow & e * f & = & e * e \\ \Rightarrow & f & = & e\ . \end{array}$$

L'argument donné ici est à rapprocher de celui donné dans la démonstration du point i de la proposition II.5.6.15 à la question 1 de l'exercice II.7.1.8. Il n'y a là rien de fortuit ni de mystérieux si on considère la caractérisation II.5.6.20.d des sous-groupes.

ii) Pour tout $x \in H$, l'inverse ${x^{-1}}_H$ de x dans H est aussi son inverse dans G.

***Démonstration** : Tout $x \in H$ possède un inverse ${x^{-1}}_H$ tel que*

$$x *_H {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H *_H x = f = e$$

en utilisant le point i . Or x et ${x^{-1}}_H$ étant en particulier des éléments de G, on peut encore écrire,

$$x * {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H * x = e$$

c'est-à-dire que ${x^{-1}}_H$ est l'inverse x^{-1} de x dans G puisque ce dernier est unique (cf. le point i de la proposition II.5.6.2.)

Ici encore on peut rapprocher l'argument du point ii de la proposition II.5.6.15 et de la question 2 de l'exercice II.7.1.8 à la lumière du point d de la proposition II.5.6.20.

Proposition II.5.6.20 (Sous-Groupe) *Étant donnés un groupe $(G, *)$ et $H \subset G$ une partie de G, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H est un sous-groupe au sens de la définition II.5.6.16.

b) H est non vide et pour tout couple (x, y) d'éléments de H, $x * y^{-1} \in H$.

c) H est non vide, pour tout couple (x, y) d'éléments de H, $x * y \in H$ et pour tout $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

d) La restriction

$$\mathrm{Id}_{G|H} \; : \; H \; \to \; G$$

de l'identité Id_G *à* H *est un morphisme de groupes . Ceci signifie implicitement que* H *possède une structure de groupe .*

Démonstration :

a $\Rightarrow$ b *Si* H *est un sous-groupe de* G, *en particulier* H *est un groupe et il est donc non vide (cf. II.5.6.5.i.)*

Pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H, x *et* y^{-1} *sont encore des éléments de* H *(cf. II.5.6.19.ii.)* *Dire que la restriction* $*_H$ *de* $*$ *à* $H \times H$ *donne à* H *une structure de groupe signifie, en particulier, qu'elle est à valeurs dans* H, *ce qui prouve que*

$$x * y^{-1} \; = \; x *_H y^{-1} \; \in \; H \; .$$

b $\Rightarrow$ a *] Réciproquement, supposons donnée une partie non vide* H *de* G *telle que pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H, $x * y^{-1} \; \in \; H$.

Si H *est non vide il existe en particulier un élément* $x \; \in \; H$, *et, dès lors,* $\epsilon_G \; = \; x * x^{-1} \; \in \; H$. *Il est clair que* ϵ_G *est alors un élément neutre pour* H.

De plus, pour tout $x \; \in \; H$, *puisque* $\epsilon_G \; \in \; H$, $\epsilon_G * x^{-1} \; = \; x^{-1} \; \in \; H$ *c'est-à-dire que tout élément de* H *possède un inverse dans* H.

Enfin, pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H, $y^{-1} \; \in \; H$ *et*

$$x * y \; = \; x * (y^{-1})^{-1} \; \in \; H$$

c'est-à-dire que la restriction de $*$ *à* $H \times H$ *est bien à valeurs dans* H.

La partie H *de* G *est donc bien un sous-groupe.*

Exemple II.5.6.21 (Automorphismes) Pour un *ensemble* E, on a introduit (cf. II.5.6.5.c,) le *groupe* $\big(\mathcal{S}(E), \circ\big)$ des *bijections* de E dans lui-même. Dans le cas où G, est un *groupe* $\big(\mathcal{S}(G), \circ\big)$ reste bien évidemment un *groupe* ; mais on dispose alors de la notion d'*automorphisme* (cf. le point ii de la définition II.5.6.13,) qui sont des *bijections* particulières ; c'est-à-dire que $\mathrm{Aut}(G) \; \subset \; \mathcal{S}(G)$. C'est un bon exercice pour s'approprier la notion de *sous-groupe* que de montrer que $\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$ est un *sous-groupe* de $\big(\mathcal{S}(G), \circ\big)$ (cf. l'exercice II.7.1.12.)

Proposition II.5.6.22 *Soient* G *un groupe ,* H *et* K *des sous-groupes de* G.

i) $H \; \cap \; K$ *est un sous-groupe de* G.

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.11.)*

ii) Plus généralement, pour $\mathcal{H}$ *un ensemble non vide de sous-groupes de* G, $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ *est un sous-groupe de* G.

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice II.7.1.11.)*

iii) $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si*

$$H \subset K \text{ ou } K \subset H .$$

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice II.7.1.11.)*

iv) Si $\left(H_n\right)_{,n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de sous-groupes de* G *telle que*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{N},\ H_p \subset H_r \text{ et } H_q \subset H_r,$$

alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H$ *est un sous-groupe de* G.

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice II.7.1.11.)*

Proposition II.5.6.23 (Image directe/réciproque) *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes .*

i) ***(Image directe)***
Pour tout sous-groupe G' *de* G, *l'image directe de* G'

$$f(G') = \{y \in H \,;\, \exists x \in G', \ , y = f(x)\}$$

est un sous-groupe de H.

ii) ***(Image réciproque)***
Pour tout sous-groupe H' *de* H, *l'image d'réciproque*

$$f^{-1}(H') = \{x \in G \,;\, f(x) \in H'\}$$

est un sous-groupe de G.

Définition II.5.6.24 (Noyau/image) Étant donné un *morphisme de groupes* $f : G \to H$, ϵ_H étant l'*élément neutre* de H, on appelle

i) (**Noyau**)
noyau de f le sous-*ensemble*

$$\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{\epsilon\}_H) = \{x \in G \,;\, f(x) = \epsilon_H\} ,$$

ii) (**Image**)
image de f l'*ensemble*

$$\operatorname{Im} f := f(G) = \{y \in H \,;\, \exists x \in G, \ , y = f(x)\} .$$

Corollaire II.5.6.25 *Pour un morphisme de groupes* $f : G \to H$, *le noyau (resp. l'image) de* f *est un sous-groupe de* G *(resp.* H.*)*

Proposition II.5.6.26 *Un morphisme de groupes* $f : G \to H$ *est injectif (cf. le point i de la définition I.1.13.18,) (resp. surjectif (cf. le point ii de la définition I.1.13.18,)) si et seulement si*

$$\operatorname{Ker} f = \{e\}\,, \ \big(\text{resp. } \operatorname{Im} f = H\,.\big)$$

Définition II.5.6.27 Si $i : H \to G$ est un *morphisme de groupes* injectif, il induit un isomorphisme $H \cong \operatorname{Im} i$; si bien que H est isomorphe à un *sous-groupe* de G. On dira parfois même par abus de langage que H est lui-même un *sous-groupe* de G.

Définition II.5.6.28 (Relation d'équivalence compatible) Si $\sim$ est une *relation d'équivalence* (cf. le point v de la définition I.1.13.11,) sur un *groupe* $(G, *)$, on dit que $\sim$ est *compatible* à la *structure de groupe* si pour tout quadruplet (x, x', y, y') d'*éléments* de G,

$$x \sim y \text{ et } x' \sim y' \Rightarrow xx' \sim yy'.$$

II.6 . −Le cas des graphes simples non-orientés

Dans le cas des *graphes simples non-orientés* (cf. la définition I.4.1,) non nécessairement *finis* , la notion de *morphisme* doncuit à un certain nombre de définitions usuelles que nous donnons ici ; et que nous serons amenés à utiliser dans la suite. Dans ce paragraphe (II.6,) $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **sera donc toujours un *graphe simple non-orienté* .**

II.6.1 . −Morphismes de source G

Proposition II.6.1.1 (Bipartition) *Soit* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe fini simple non-orienté . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

Bip$_1$*) Il existe un morphisme de graphes non-orientés*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\beta)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{K}_2)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{tikzcd}$$
(cf. la définition I.4.14.)

Bip$_2$*) Il existe des sous-ensembles* $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}(G)$ *et* $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}(G)$ *tels que :*

i) $\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$.

ii) pour tout $\{x, y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, *si* $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{x, y\}\}\big) \neq \emptyset$, *il existe* $k \in \{1, 2\}$ *tel que* $x \in \mathcal{V}_k$ *et* $y \in \mathcal{V}_{3-k}$.

Démonstration : *On rappelle que* $\mathbf{K}_2$ *est le graphe complet à 2 sommets (cf. la définition I.4.14 ;) et qu'on a alors* $\mathcal{V}(\mathbf{K}_2) = \{1,2\}$ *et* $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \big\{\{1,2\}\big\}$ *.*

Bip$_1 \Rightarrow$ *Bip*$_2$ *Étant donné un morphisme de graphes non-orientés*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\beta)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{K}_2)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{tikzcd}$$

, notons $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}(\beta)^{-1}(\{k\})$ *pour* $k \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) = \{1,2\}$ *. Le point i est alors évidemment satisfait. Le point ii résulte de ce que pour tout* $\{x,y\} \in \mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(\beta)(\{x,y\}) = \{1,2\}$ *; si bien que si* $\mathcal{V}(\beta)(x) = 1$, $\mathcal{V}(\beta)(y) = 2$ *et vice versa.*

Bip$_2 \Rightarrow$ *Bip*$_1$ *Définissons*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\beta)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{K}_2)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{tikzcd}$$

par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}(\beta) : & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \\ & x \in \mathcal{V}_k & \longmapsto & k\,. \end{array}$$

Puisque $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \big\{\{1,2\}\big\}$ *est un singleton , on a nécessairement* $\forall e \in \mathcal{E}(G),\ \mathcal{E}(\beta)(e) = \{1,2\}$ *. Le point ii assure alors qu'on définit bien ainsi un morphisme de graphes non-orientés .*

Définition II.6.1.2 (Graphe biparti) Si un *graphe fini simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ vérifie l'une des conditions équivalentes Bip$_1$ ou Bip$_2$, on dit que G est un *graphe biparti* . On dira que $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ satisfaisant i et ii. est une *bipartition* de G.

Définition II.6.1.3 (Graphe k-coloriable) Un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est *k-coloriable* , pour un *entier naturel* $k \in \mathbb{N}$ s'il existe un *morphisme de graphes non-orientés* (cf. la définition II.1.1,) $\gamma : G \to \mathbf{K}_k$ (cf. la définition I.4.14.)

En particulier, G est *biparti* si et seulement si G est 2-*coloriable* .

II.6.2 . −Morphismes de but G

Définition II.6.2.1 (Parcours, circuit) Éttant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour $\ell \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* ,

i) **(Parcours)**

un *parcours de longueur* ℓ dans G est un *morphisme de graphes non-orientés*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$

(cf. la définition I.4.10.)

Il revient au même de se donner l'*ensemble* $\{, \ldots, v_\ell := \mathcal{V}(\pi)(\ell)\} \subset \mathcal{V}(G)$ de sorte que $\forall 0 \leq i \leq \ell - 1,\ \{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}(G)$ soit une *arête* de G.

Noter qu'on ne demande absolument pas que $\mathcal{V}(\pi)$ soit *injective* ; autrement dit le *parcours* π « peut repasser plusieurs fois par un même *sommet* » ; $\mathcal{E}(\pi)$ n'a pas plus de bonne raison d'être alors *injective* .

ii) (**Circuit**)
Le *parcours* π est un *circuit* si $\pi(0) = \pi(\ell)$.

Notation II.6.2.2 (Parcours) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]G] \end{tikzcd}$$

tout $(v, w, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, on note $P(G)_{v,w,\ell}$ l'*ensemble des parcours de longueur* ℓ dans G tels que $\mathcal{V}(\pi)(0) = v$ et $\mathcal{V}(\pi)(\ell) = w$.

Définition II.6.2.3 (Parcours, circuit eulérien) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$,

i) (**Parcours**)
un *parcours eulérien de longueur* ℓ est un *parcours de longueur* ℓ $\pi : \mathbf{P}_\ell \to G$ tel que l'*application* $\mathcal{E}(\pi) : \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \to \mathcal{E}(G)$ est *bijective* ; autrement dit le parcours passe une fois et une seule par chaque *arête* de G.

ii) (**Circuit**)
Un *circuit eulérien* est un *parcours eulérien* $\pi : \mathbf{P}_\ell \to G$ tel que $\pi(0) = \pi(\ell)$. Cette dénomination se rapporte évidemment à la question *des sept ponts de Königsberg* formulée par EULER.

Définition II.6.2.4 (Chemin et cycle dans un graphe) Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe simple non-orienté* . un *chemin* (resp. un *cycle* ,) de *longueur* ℓ dans G, est un *morphisme de graphes non-orientés*

$$\gamma : \mathbf{P}_\ell \text{ (resp. } \mathbf{C}_\ell \text{ ,) } \to G \text{ (cf. la définition I.4.10, (resp. la définition I.4.12 ,)}$$

tel que $\mathcal{V}(\gamma)$ soit *injective* .

De manière équivalente, en considérant l'*image* de γ (cf. la définition II.2.8,) un *chemin* (resp. un *cycle* ,) dans G est un *sous-graphe non-orienté* *isomorphe* (cf. la définition I.2.14,) à $\mathbf{P}_\ell$, (resp. à $\mathbf{C}_\ell$.)

Exemple II.6.2.5 (Chemins et cycles) (cf. l'exercice II.7.4.1.)

Définition II.6.2.6 (Chemin, cycle, graphe Hamiltonien) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$,

i) un *chemin* (resp. *cycle* ,)

$$\gamma : \mathbf{P}_\ell \text{ (resp. } \mathbf{C}_\ell \text{ ,) } \to G$$

est *hamiltonien* si $\mathcal{V}(\gamma)$ est *bijective* . On parle alors de *chemin hamiltonien* (resp. *cycle hamiltonien* ou *cycle couvrant* .)

ii) (**Graphe Hamiltonien**)
On dit que G est un *graphe hamiltonien* s'il possède un *cycle hamiltonien* .

II.6.3 . −Sous-graphe

Lemme II.6.3.1 (Sous-graphe induit par une partie) *Étant donné un graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$*, et* $W \subset \mathcal{V}(G)$*, il existe un unique sous-graphe non-orienté induit (cf. la définition II.2.4,)* $H \subset G$*, tel que* $\mathcal{V}(H) = W$ *.*

Démonstration *: Si* H *existe alors nécessairement*

$$\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(G)_W := \mathcal{E}(G) \times_{\mathcal{V}(G)} W := \big\{ \in \mathcal{E}(G) \, ; \, \varepsilon(G)(e) \in W \times W \big\} \, ; \qquad \textit{II.6.3.1.1}$$

ce qui définit complètement et uniquement H*.*

Définition II.6.3.2 (Sous-graphe induit par une partie) Dans la situation le lemme II.6.3.1, on dit que H est *le sous-graphe non-orienté induit* par *W*. On pourrait le noter $G_{|W} := \big(W \, , \, \mathcal{E}(G)_W \, , \, \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(G)_W} \big)$.

i) (**Stable**)
Si $G_{|W}$ est un *graphe isolé* (cf. la définition I.4.9,) on dit que $G_{|W}$ (ou même simplement *W*,) est un *stable* .

ii) (**Clique**)
Si $G_{|W}$ est un *graphe complet* (cf. la définition I.4.14,) on dit que $G_{|W}$ (ou même simplement *W*,) est une *clique* .

II.6.4 . −Automorphismes

Proposition II.6.4.1 ($\mathrm{Aut}(\cdot) \subset \mathcal{S}$.**)** *Sit* G *est un graphe simple non-orienté (pas nécessairement fini .) Alors le morphisme de groupes du point ii de la proposition II.5.5 est injectif .*

Démonstration *: Les arguments sont essentiellement ceux donnés au point c de la question 2 de l'exercice II.7.4.3.*

II.7 . −Exercices

II.7.1 . −Magmas, groupes

Exercice II.7.1.1 Faire les détails de la preuve de la proposition II.4.5.14.

Exercice II.7.1.2 Étant doné un morphisme $f : M \to N$, (de *magmas associatifs* ,) montrer que :

1) si ϵ est l'*élément neutre* de M son image $f(\epsilon)$ n'est pas nécessairement l'*élément neutre* de N ;

2) si y est le symétrique de x dans M, $f(y)$ n'est pas nécessairement le symétrique de $f(x)$ dans N.

Exercice II.7.1.3 Donner la preuve de la proposition II.4.5.21.

Exercice II.7.1.4 **1)** Compléter la preuve de la proposition II.4.5.17.

2) **a)** Si ϵ est un *élément neutre* de M est-il encore un *élément neutre* d'un sous-magma N ?

b) Si N possède un *élément neutre* η celui-ci est-il nécessairement celui de M ?

c) Si $x \in N$ possède un symétrique dans M celui-ci est-il aussi son symétrique dans N ?

d) Si $x \in N$ possède un symétrique dans N est-il aussi son symétrique dans M ?

Exercice II.7.1.5 Soit $(M, *)$ un magma associatif, d'*élément neutre* ϵ et N un sous-magma tel que $\epsilon \in N$. Montrer que :

1) ϵ est l'*élément neutre* de N.

2) si $x \in N$ a un inverse y dans N, c'est aussi son inverse dans M.

Exercice II.7.1.6 Faire la preuve de la proposition II.4.5.24.

Exercice II.7.1.7 (Unicité des éléments remarquables) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi associative.

1) (**Élément neutre**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ celui-ci est unique.

2) (**Symétrique**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ, tout élément $x \in E$ possède au plus un symétrique.

Exercice II.7.1.8 (Morphismes de groupes) Soit

$$f : (G, *, \epsilon_G) \to (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un *morphisme de groupes* .

1) (**Élément neutre**)
Montrer que $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$.

2) (**Symétrique**)
Montrer que pour tout $x \in G$, si y est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$.

3) (**Image**)
Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $(H, \cdot)$.

4) (**Noyau**)
Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

5) (**Isomorphisme**)
Montrer que si f est bijective et que g est son applications réciproque, alors g est un morphisme de groupe.

Exercice II.7.1.9 (Le groupe $\big(\mathcal{S}(E), \circ\big)$) Soit E un ensemble.

1) Vérifier que $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{S}(E)$.

2) Montrer qu'il existe un *élément neutre* pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$ et le caractériser.

3) Montrer finalement que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

Exercice II.7.1.10 (La bijection $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$) Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une bijection de E dans F dont on notera v la bijection réciproque *i.e.*

$$v : F \to E : v \circ u = \mathrm{Id}_E \, , \; u \circ v = \mathrm{Id}_F \, .$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \to (\mathcal{S}(F), \circ) \, , \; f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice II.7.1.11 (Sous-groupes) 1) (Intersection de deux sous-groupes)
Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

2) (Union de deux sous-groupes)
Étant donnés des sous-groupes H et K d'un groupe commutatif $(G, +)$, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Indication : *Montrer qu'il revient au même de démontrer que [$H \not\subset K$ et $H \cup K$ sous-groupe entraîne $K \subset H$] puis prouver cette dernière assertion.*

3) (Famille filtrante)
Faire la preuve du point iv de la proposition II.5.6.22.

Exercice II.7.1.12 (Groupe des automorphismes) Complétez la construction de l'exemple II.5.6.21.

Exercice II.7.1.13 On suppose que E est munie d'une relation d'équivalence $\sim$ et d'une loi

$$\cdot : E \times E \to E \, .$$

On suppose que $\cdot$ et $\sim$ sont *compatibles* c'est-à-dire que

$$\forall (x, y, z, t) \in E \times E \times E, \; \big(x \sim y \wedge z \sim t \Rightarrow x \cdot z \sim y \cdot t\big) \, .$$

On note $\pi : E \to E/\sim$ la *surjection canonique* .

1) Montrer qu'il existe une unique loi $\dagger : E/\sim \times E/\sim \to E/\sim$ tel que π soit un morphisme c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \; \big(\pi(x \cdot y) = \pi(x) \dagger \pi(y)\big) \, .$$

On parle alors de *structure quotient*.

2) Montrer que si $\cdot$ est associative, (resp. possède un *élément neutre*) (resp. est commutative) il en est de même de $\dagger$. Montrer que si $x \in E$ possède un symétrique y pour $\cdot$ alors $\pi(y)$ est le symétrique de $\pi(x)$ pour $\dagger$.

3) Donner des exemples déjà connus des constructions précédentes.

II.7.2 . – Morphismes

Exercice II.7.2.1 (Morphismes) 1) (Identité)
Faire la démonstration du point i du lemme II.1.3.

2) **(Composé)**
Faire la démonstration du point ii du lemme II.1.3.

Exercice II.7.2.2 (Inverse) Faire la démonstration du lemme II.3.3.

Exercice II.7.2.3 (Isomorphismes) Compléter la démonstration de la proposition II.3.5.

Exercice II.7.2.4 (Groupe des automorphismes) Soit G un *graphe* (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* .)

1) Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G)$,) est un *groupe* pour la *loi de composition* $\circ$.

2) Montrer que l'*application*
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)\big(\text{resp. } \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G),\big)\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G),\big) & = & \mathcal{S}(\mathcal{V}(G)) \\ \phi & \mapsto & \mathcal{V}(\phi) \end{array}$$
est un *morphisme de groupes* .

3) Étant donné un *graphe* (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) H et $\phi\ :\ G\ \cong\ H$ un *isomorphisme de graphes* (resp. un *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. un *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) construire un *isomorphisme de groupes*
$$\begin{array}{ll} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(G)\ \cong\ \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}}(H)\ , \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(G)\ \cong\ \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\mathrm{inv}}}(H)\ ,\ \big) \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(G)\ \cong\ \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(H)\ .\ \big) \end{array}$$

II.7.3 . – Sous-graphes

Exercice II.7.3.1 (Sous-graphes) Faire la démonstration de la proposition II.2.1.

Exercice II.7.3.2 (Sous-graphe) Faire la démonstration de la proposition II.2.3.

II.7.4 . –

Graphes finis simples non-orientés

Exercice II.7.4.1 (Chemins et cycles dans un graphe) Soit $G\ :=\ \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini* (non vide.) On note $\delta(G)\ :=\ \min_{u\ \in\ \mathcal{V}(G)}\big(d_G(u)\big)$.

1) Montrer que G contient un *chemin* de *longueur* $\delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{P}_{\delta(G)}$.

2) Si $\delta(G)\ \geq\ 2$, montrer que G contient un *cycle* de *longueur* $> \delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{C}_\ell$, $\ell > \delta(G)$.

Exercice II.7.4.2 (Exemples de groupes d'automorphismes) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{I}_n)$ du *graphe isolé* à n *sommet* s.

2) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{K}_n)$ du *graphe complet à* n *sommets* .

Exercice II.7.4.3 (Automorphismes) 1) Déterminer le *groupe des automorphismes* du *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ pour $n \geq 2$.

2) (**Automorphismes de** $\mathbf{C}_4$)
On note $\Gamma := \mathrm{Aut}_{\mathbf{gph}^{\text{n-o}}}(\mathbf{C}_4)$ **le** ***groupe des automorphismes*** **du** ***cycle*** $\mathbf{C}_4$.

a) Montrer que l'*application* $\mathcal{V}$ qui à tout $\alpha = \big(\mathcal{V}(\alpha), \mathcal{E}(\alpha)\big) \in \Gamma$ associe $\mathcal{V}(\alpha)$ est un *morphisme de groupes* (cf. la définition II.5.6.6,) de Γ dans le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_4$.

b) Le *morphisme* $\mathcal{V}$ est-il *surjectif* ?

c) Est-il *injectif* ?

d) Déterminer Γ.