Université Orsay-Paris-Saclay **Année 2024–2025**

LDD/S6 MDD354 Structures algébriques : Graphes, groupes, algèbre linéaire, topologie . . .

Responsable Pierre Lorenzon
Bureau 2I3
IMO Bat. 307 91405 Orsay cedex
Tel. : +33 1 69 15 60 26
Courriel : lorenzon@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/∼lorenzon

0 . –Introduction

On considère habituellement que le point de départ de l'étude des *graphes* est la question *des sept ponts de Königsberg* qu'EULER a résolue en 1736 (cf. la définition II.6.2.4.) On laisse le lecteur se documenter quant aux nombreuses autres applications dans lesquelles interviennent ces objets.

Dans le cadre de ce cours, l'étude des *graphes* permet d'appliquer un certain nombre de résultats d'algèbre et éventuellement même de topologie que vous avez établis ces dernièrs années.

À un graphe, on peut en effet, associer une *matrice* dite *matrice d'adjacence* . Cette dernière ayant le bon goût d'être *symétrique* , on peut lui appliquer la *théorie de la réduction des matrices symétriques* . Ce ne serait bien sûr qu'un exercice d'école si les résultats obtenus sur la *matrice d'adjacence* ne fournissaient pas à leur tour, de précieuses informations sur le *graphe* lui-même. C'est ce que nous étudierons au chapitre III.

Les *graphes* ont des *morphismes* et même des *automorphismes* . Or dès qu'on a des *automorphismes* arrivent des *groupes* . Il y aura donc matière à revenir sur l'étude de ces derniers, vus comme *groupe des automorphismes* . Ce sera l'objet du chapitre II et plus précisément du paragraphe II.5.

Dans un *graphe* on a une notion naturelle de *distance* entre deux *sommets* . Au chapitre V, nous aborderons l'étude de l'*espace métrique* ainsi défini.

Bien entendu, il est nécessaire de donner une définition précise des objets qui seront étudiés. Nous donnerons au chapitre I une définition très générale de *graphe* (cf. I.1.1 ;) mais les objets que nous étudierons de fait dans ce cours sont les *graphes finis simples non-orientés* (cf. la définition I.4.4.) Les notations présentées dans ce paragraphe (0,) seront utilisées tout au long du texte qui suit. Il n'est cependant pas nécessaire, ni peut-être même recommandé, de s'attarder d'emblée sur ce paragraphe. Il sera certainement bien plus profitable de s'y reporter chaque fois qu'il ysera fait référence dans le cours du texte.

Notation 0.1 (Diagrammes commutatifs) Il ne faut surtout pas perdre de vue que les notations introduites ici ne sont vraiment rien de plus (mais rien de moins non plus) que des conventions d'écriture. Ainsi le *diagramme* i.1 et la *formule* i.2 (respectivement le *diagramme* ii.1 et la *formule* ii.2,)
ont ils rigoureusement la même signification.

Il n'est même pas vraiment permis d'affirmer que l'une des formes soit plus lisible que l'autre ; ceici étant l'affaire de chaque lecteur. Le formalisme des *diagrammes commutatifs* est néanmoins largement utilisé ; à croire qu'un nombre significatif de mathématiciens le considère comme une représentation plus accessible que d'autres de certaines propriétés.

Il appartiendra donc à chacun de s'approprier ce formalisme ou non ; mais le texte qui suit ne l'imposera pas et proposera toujours une formulation alternative.

i) (**Triangle commutatif**)
On dit que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad 1$$

est un *triangle commutatif* si X, Y et Z sont des *ensembles* (cf. I.1.13,) $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ et $h : Y \to Z$ sont des *applications* (cf. I.1.13.12.iii,) telles que :

$$g = h \circ f . \qquad 2$$

ii) (**Carré commutatif**)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ Z & \xrightarrow{i} & T \end{array}$$ 1

est un *carré commutatif* si X, Y, Z et T sont des *ensembles* $f : X \to Y$, $g : X \to Z$, $h : Y \to T$ et $i : Z \to T$ des *applications* telles que

$$i \circ g = h \circ f \,.$$ 2

iii) (**Diagramme commutatif**)

Un *diagramme* plus élaboré sera dit *commutatif* si tous les *triangles* et *carrés* le constituant le sont. Par exemple, dire que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "i"] & \\ Z \arrow[r, "j"] & T \arrow[r, "k"] & U \end{tikzcd}$$ 1

est un *diagramme commutatif* signifie que

$$k \circ h = i \text{ et } h \circ f = j \circ g\,;$$ 2

ce qui entraîne en particulier que

$$i \circ f = k \circ j \circ g\,.$$ 3

iv) Bien entendu les *ensembles* en jeu peuvent bénéficier de structures supplémentaires auquel cas les *applications* en jeu sont des *morphismes* pour la structure considérée.

Notation 0.2 (Produit cartésien) Étant données des *applications* $f : X \to Y$ et $g : Z \to T$, on note

$$\begin{array}{rccl} f \times g : & X \times Z & \longrightarrow & Y \times T \\ & (x,z) & \longmapsto & \big(f(x), g(z)\big) \end{array}$$ (cf. le point iii de la définition I.1.13.10 ;)

(où $X \times Z$ et $Y \times T$ sont les *produits cartésiens* .)

Si

$$p : X \times Z \to X\,,\; q : X \times Z \to Z\,,\; r : Y \times T \to Y\,,\; s : Y \times T \to T$$ (cf. I.1.13.17 ;)

désigne les *projections* , $f \times g$ est l'*unique application* telle que

$$r \circ (f \times g) = f \circ p \text{ et } s \circ (f \times g) = g \circ q\,;$$ 0.2.1

c'est-à-dire, (cf. 0.1.ii.1,) telle que les *diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{f \times g} & Y \times T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{f \times g} & Y \times T \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle s}\downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$ 0.2.2

sont des *carrés commutatifs* .

Proposition 0.3 (Propriétés de $\cdot \times \cdot$) *Soient*

$$f \;:\; X \;\to\; Y \;,\; g \;:\; Y \;\to\; Z \;,\; f' \;:\; X' \;\to\; Y' \text{ et } g' \;:\; Y' \;\to\; Z'$$

des applications .

i) ***(Identité)***
$\mathrm{Id}_{X\times X} \;=\; \mathrm{Id}_X \times \mathrm{Id}_X$.

ii) ***(Composition)***
$(g \times g') \;\circ\; (f \times f') \;=\; (g \circ f) \times (g' \circ f')$.

iii) $(\mathrm{Id}_Y \times \mathrm{Id}_{Y'}) \circ (f \times f') \;=\; (f \times f') \circ (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Id}_{X'}) \;=\; (f \times f')$.

iv) ***(Bijections)***
Si $X \;=\; Z$ et $X' \;=\; Z'$; et si de plus g (resp. g',) est la bijection réciproque de f (resp. f',) $f \times f'$ est une bijection de bijection réciproque $g \times g'$.

Démonstration *: (cf. la question 1 de l'exercice I.5.1.6.)*

Notation 0.4 (Parties d'un ensemble) Soit X un *ensemble* . On constate que $\forall (x, y) \in X \times X,$, si $x \;=\; y$, la *paire* (cf. le point v de la définition I.1.13.6,) $\{x, y\}$ n'est autre que le *singleton* (cf. le point i de la définition I.1.13.10,) $\{x\}$.

i) On notera donc $\mathcal{P}_{1,2}(X)$ le *sous-ensemble* de $\mathcal{P}(X)$ constitué des *parties* à un ou deux *éléments* c'est-à-dire $\mathcal{P}_{1,2}(X) \;:=\; \big\{P \;\in\; \mathcal{P}(X) \;;\; \exists (x, y) \;\in\; X \times X,\; P \;=\; \{x, y\}\big\}$.

On note encore $\pi_{1,2}(X) \;:\; X \times X \;\to\; \mathcal{P}_{1,2}(X)$, $(x, y) \;\mapsto\; \{x, y\}$. Pour tout $(x, y) \;\in\; X \times X$, la notation correcte serait $\pi_{1,2}(X)\big((x, y)\big)$ qu'on abrègera le plus souvent abusivement en $\pi_{1,2}(X)(x, y)$.

ii) Si $f \;:\; X \;\to\; Y$ est une *application* , on notera

$$\mathcal{P}_{1,2}(f) \;:\; \mathcal{P}_{1,2}(X) \;\to\; \mathcal{P}_{1,2}(Y) \;,\; \{x, y\} \;\mapsto\; \{f(x), f(y)\} \;;$$

c'est l'*unique application* telle que $\mathcal{P}_{1,2}(f) \;\circ\; \pi_{1,2}(X) \;=\; \pi_{1,2}(Y) \;\circ\; \big(\mathcal{V}(f) \times \mathcal{V}(f)\big)$; c'est-à-dire telle qu'on ait un *carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(X) \times \mathcal{V}(X) & \xrightarrow{\mathcal{V}(f)\times\mathcal{V}(f)} & \mathcal{V}(Y) \times \mathcal{V}(Y) \\ {\scriptstyle \pi_{1,2}(X)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{1,2}(Y)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}(f)} & \mathcal{P}_{1,2}(Y) \end{array}$$

Proposition 0.5 (Propriétés de $\mathcal{P}_{1,2}(\cdot)$) *i)* ***(Identité)***
Pour X un ensemble $\mathcal{P}_{1,2}(\mathrm{Id}_X) \;=\; \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{1,2}(X)}$.

ii) ***(Composition)***
Pour $f \;:\; X \;\to\; Y$ et $g \;:\; Y \;\to\; Z$ des applications , $\mathcal{P}_{1,2}(g \circ f) \;=\; \mathcal{P}_{1,2}(g) \;\circ\; \mathcal{P}_{1,2}(f)$.

iii) ***(Bijection)***
Si $f \;:\; X \;\to\; Y$ est une bijection de X sur Y de bijection réciproque $g \;:\; Y \;\to\; X$, $\mathcal{P}_{1,2}(f)$ est une bijection de bijection réciproque $\mathcal{P}_{1,2}(g)$.

Démonstration *: (cf. l'exercice I.5.1.7.)*