II . −Morphismes de graphes, sous-graphes, endomorphismes, automorphismes ...

II.1 . −Morphismes, homomorphismes, de graphes, (à involution, non-orientés)

Définition II.1.1 (Morphisme de graphes (à involution, non-orientés))

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,)

$\big($resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,) $\big)$

$\big($resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.) $\big)$

Un *morphisme* (ou *homomorphisme* , – les deux termes étant exactement synonymes –) $\phi : G \to H$ est un *couple* $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}(\phi)\big)$ tel que

MorGph$_1$) **(Sommets)**
$\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ est une *application* (cf. le point iii de la définition I.1.13.12.)

MorGph$_2$) **(Arêtes)**
$\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ est une *application* .

MorGph$_3$) **(Extrémités)**
$\varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G)$; c'est-à-dire que le *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{array} ,$$

$$\Big(\text{resp. } \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{array} , \Big)$$

$$\Big(\text{resp. } \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array} , \Big)$$

est un *carré commutatif* (cf. le point 1 du point ii de la notation 0.1.)

Explicitement, pour toute *arête* $e \in \mathcal{E}(G)$ tel que

$$\varepsilon(G)(e) = (v, w) , \big(\text{resp. } (v, w) , \big) \big(\text{resp. } \{v, w\} , \big)$$

$$\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \big(\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big) , \Big(\text{resp. } \big(\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big) , \Big) \Big(\text{resp. } \big\{\mathcal{V}(\phi)(v), \mathcal{V}(\phi)(w)\big\} . \Big)$$

Si G et H sont des *graphes à involution* , on a de plus :

MorGph$_4$) (**Involution**)

$\mathbf{inv}(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}(\phi) \circ \mathbf{inv}(G)$; *i.e.*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}$$
est un *carré commutatif* .

On parlera de *morphisme de graphes* (resp. *morphisme de graphes à involution*) (resp. *morphisme de graphes non-orientés* .) On dira en fait simplement *morphisme* si le context est clair.

Notation II.1.2 i) (**Identité**)
Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* , (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{Id}_G := \big(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)}, \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)}\big)$, qu'on appelle l'*identité* de G.

ii) (**Composé**)
Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ des *graphes* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$, $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$, $\big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I), \mathbf{inv}(I)\big)$, des *graphes à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$, $I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)$ des *graphes non-orientés* .)

Soient
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{tikzcd}$$
des *morphismes de graphes* , (resp.
$$\frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}} \quad \text{et} \quad \frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\mathbf{inv}(I)"'] \\ \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] & \mathcal{E}(I) \end{tikzcd}}$$
des *morphismes de graphes à involution* ,) (resp.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]H] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\psi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]I] \end{tikzcd}$$
des *morphismes de graphes non-orientés* .)

On note
$$\psi \circ \phi := \big(\, \mathcal{V}(\psi) \circ \mathcal{V}(\phi) \,,\, \mathcal{E}(\psi) \circ \mathcal{E}(\phi) \,\big)$$
qu'on appelle le *composé* de ϕ et ψ.

iii) (**Hom**)

Pour G et H des *graphes* , (resp. des *graphes à involution* ,) (resp. des *graphes non-orientés* ,) on notera $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Gph}}(G, H)$, (resp. $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G, H)$,) (resp. $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G, H)$,) l'*ensemble* des *morphismes de graphes* (resp. *morphismes de graphes à involution* ,) (resp. *morphismes de graphes non-orientés* ,) de G dans H.

Bien sûr, si aucune confusion ne doit en résultaer, on notera simplement $\operatorname{Hom}(G, H)$.

Lemme II.1.3

Soient $\underbrace{G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big), H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big), I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)}_{\text{des graphes}}$,
(resp. $\underbrace{\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big), \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big), \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I), \mathbf{inv}(I)\big)}_{\text{des graphes à involution}}$,)
(resp. $\underbrace{G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big), H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big), I := \big(\mathcal{V}(I), \mathcal{E}(I), \varepsilon(I)\big)}_{\text{des graphes non-orientés}}$.)

Soient
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I) \times \mathcal{V}(I) \end{tikzcd}$$
des morphismes de graphes , *(resp.*
$$\dfrac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}} \quad \text{et} \quad \dfrac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \arrow[r, "\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)"] & \mathcal{V}(I) \times \mathcal{V}(I) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\mathbf{inv}(I)"'] \\ \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] & \mathcal{E}(I) \end{tikzcd}}$$
des morphismes de graphes à involution ,) *(resp.*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]H] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E}(H) \arrow[r, "\mathcal{E}(\psi)"] \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] & \mathcal{E}(I) \arrow[d, "\varepsilon(I)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([]H] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([]\psi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([]I] \end{tikzcd}$$
des morphismes de graphes non-orientés .)

i) ***(Identité)***

L'identité de G Id_G *(cf. II.1.2.i,) est un morphisme de graphes (resp. un morphisme de graphes à involution ,) (resp. un morphisme de graphes non-orientés .)*

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.9.3.1.)*

ii) ***(Composé)***

$\psi \circ \phi$ *(cf. II.1.2.ii,) est un morphisme de graphes , (resp. un morphisme de graphes à involution ,) (resp. un morphisme de graphes non-orientés .)*

***Démonstration** : (cf. la question 2 de l'exercice II.9.3.1.)*

iii) $\phi \circ \mathrm{Id}_G = \phi$ et $\mathrm{Id}_H \circ \phi = \phi$.

Notation II.1.4

Pour
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd}$$
un *morphisme de graphes* ,

(resp.
$$\frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}}$$
un *morphisme de graphes à involution* ,)

(resp.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd}$$
un *morphisme de graphes non-orientés* ,)

on simplifiera les notations si cela ne doit pas prêter à confusion :

On écrira $\phi(v)$ au lieu de $\mathcal{V}(\phi)(v)$ pour tout $v \in \mathcal{V}(G)$.

De même on écrira $\phi(e)$ au lieu de $\mathcal{E}(\phi)(e)$ pour $e \in \mathcal{E}(G)$. Si $e = (v, w)$ (resp. (v, w),) (resp. $\{v, w\}$,) on écrira $\phi\big((v, w)\big)$, (resp. $\phi\big((v, w)\big)$,) (resp. $\phi\big(\{v, w\}\big)$;) voire simplement $\phi(v, w)$.

Les deux propositions qui suivent sont données dans un souci de cohérence, en particulier avec le paragraphe I.2 ; mais nous n'en aurons que peu d'usage dans la suite.

Proposition II.1.5 (Fonctorialité du graphe non-orienté associé) *i)* ***(Morphisme)***

Soit
$$\frac{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \arrow[r, "\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)"] & \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\mathbf{inv}(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\mathbf{inv}(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}}$$
un morphisme de graphes à involution (cf. la définition II.1.1,) il <u>*existe un unique*</u>

morphisme de graphes non-orientés $\phi^{N-O} : G^{N-O} \to H^{N-O}$ *tel que* :

$N - O_1)$ $\mathcal{V}\big(\phi^{N-O}\big) = \mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$.

$N-O_2$) $\mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big) \,:\, \mathcal{E}^{N-O}(G) \to \mathcal{E}^{N-O}(H)$ est l'*unique application* telle que $\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big)\circ\omega(G)$; c'est-à-dire telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \omega(G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega(H)} \\ \mathcal{E}^{N-O}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}^{N-O}(\phi^{N-O})} & \mathcal{E}^{N-O}(H) \end{array}$$

est un *carré commutatif* (cf. 0.1.ii.1 ;) où $\mathcal{E}^{N-O}(\cdot)$ et $\omega(\cdot)$ sont définis comme au point i du lemme I.2.7.

Démonstration : Il faut montrer qu'on dispose bien d'un *couple* d'*applications* vérifiant les *axiomes* MorGph$_1$ à MorGph$_3$ de la définition II.1.1.

MorGph$_1$ est tautologiquement donné par la condition $N-O_1$.

MorGph$_2$ Rappelons que

$$\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)\ \big(\text{resp. } \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big),\big)$$

étant, par hypothèse, un *graphe à involution*, on peut le munir de la *relation d'équivalence* $\sim(G)$ (resp. $\sim(H)$,) (cf. le point i du lemme I.2.7.) Alors pour tout $(e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G)$, $e\sim(G)\ f$ entraîne que :

$e = f$ et dans ce cas $\mathcal{E}(\phi)(e) = \mathcal{E}(\phi)(f)$ et, par conséquent

$$\omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big)\ .$$

$e = \mathbf{inv}(G)(f)$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi)(e) &= \mathcal{E}(\phi)\big(\mathbf{inv}(G)(f)\big) \\ &= \mathbf{inv}(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big) \text{ (cf. l'axiome MorGph}_4\text{ de la définition II.1.1,)} \end{aligned}$$

puisque ϕ est, par hypothèse, un *morphisme de graphes à involution*. Il en résulte que

$$\mathcal{E}(\phi)(e) \sim (H)\ \mathcal{E}(\phi)(f)\ .$$

On a donc établi que

$$\begin{array}{lrll} \forall (e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G), & e & \sim(G) & f \\ \Rightarrow & \mathcal{E}(\phi)(e) & \sim(H) & \mathcal{E}(\phi)(f)\ ; \end{array}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{array}{lrll} \forall (e,f)\in\mathcal{E}(G)\times\mathcal{E}(G), & e & \sim(G) & f \\ \Rightarrow & \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) & = & \omega(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(f)\big)\ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que $\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi)$ est constante sur les *classes d'équivalence* pour la *relation* $\sim(G)$. Il existe donc, en vertu de la proposition I.3.11.3.9, une *unique application*

$$\mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big) \,:\, \mathcal{E}^{N-O}(G) \to \mathcal{E}^{N-O}(H) \text{ telle que } \omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big)\circ\omega(G)\ ;$$

MorGph$_3$ On a, en vertu de la caractérisation de ε^{N-O} donnée au point ii du lemme I.2.7 que

$$\mathcal{P}_{1,2}(\phi)\circ\varepsilon^{N-O}(G)\circ\omega(G) = \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\circ\pi_{1,2}(G)\circ\varepsilon(G)\ .$$

Or il découle des définitions de

$$\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi) \text{ (cf. 0.2,) et } \mathcal{P}_{1,2}(\phi) \text{ (cf. 0.4.ii,)}$$

que $\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \\ {\scriptstyle \pi_{1,2}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{1,2}(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}(G) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}(\phi)} & \mathcal{P}_{1,2}(H) \end{array}$ *est un carré commutatif (cf. 0.1.ii.1.)*

Il s'ensuit que

$$\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{N-O}(G) \circ \omega(G) = \pi_{1,2}(H) \circ \mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G) .$$

Or, d'après l'axiome MorGph$_3$ *de la définition II.1.1, puisque* ϕ *est, par hypothèse un morphisme de graphes à involution ,*

$$\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi) \circ \varepsilon(G) = \varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) .$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\circ\varepsilon^{N-O}(G)\circ\omega(G) &= \pi_{1,2}(H)\circ\varepsilon(H)\circ\mathcal{E}(\phi) \\ &= \varepsilon^{N-O}(H)\circ\omega(H)\circ\mathcal{E}(\phi) . \end{aligned}$$

On a précisément prouvé ci-dessus, l'existence (et l'unicité) de $\mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big)$ *satisfaisant la condition* $N-O_2$*, i.e.*

$$\omega(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big) \circ \omega(G) .$$

On a donc

$$\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{N-O}(G) \circ \omega(G) = \varepsilon^{N-O}(H) \circ \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big) \circ \omega(G) .$$

Or $\omega(G)$ *étant une application surjective ,*

$$\mathcal{P}_{1,2}(\phi) \circ \varepsilon^{N-O}(G) = \varepsilon^{N-O}(H) \circ \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big) ;$$

ce qui assure que $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}^{N-O}\big(\phi^{N-O}\big)\big)$ *satisfait l'axiome MorGph*$_3$.

*ii) (**Identité**)*
Pour tout graphe à involution

$$\mathrm{Id}_G{}^{N-O} = \mathrm{Id}_{G^{N-O}} .$$

***Démonstration** : Il suffit de constater que* $\mathrm{Id}_{G^{N-O}}$ *est bien un morphisme de graphes non-orientés vérifiant* $N-O_1$ *et* $N-O_2$*. L'énoncé d'unicité du point i assure alors le résultat.*

*iii) (**Composé**)*
Pour tous

morphismes de graphes à involution $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ et $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(I)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(I) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(I)}\downarrow \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \end{array}}$,

$$\psi\circ\phi^{N-O} = \psi^{N-O} \circ \phi^{N-O} .$$

Proposition II.1.6 (Fonctorialité du graphe à involution associé à un graphe non-orienté) *i) Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\varepsilon(H)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{tikzcd}$$

un *morphisme de graphes non-orientés* *(cf. la définition II.1.1,)*

il existe un unique *morphisme de graphes à involution*

$$\phi^{Inv} \ : \ G^{Inv} \ \to \ H^{Inv}$$

tel que

Inv_1) $\mathcal{V}(\phi^{Inv}) \ = \ \mathcal{V}(\phi) \ : \ \mathcal{V}(G) \ \to \ \mathcal{V}(H)$.

Inv_2) $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv}) \ : \ \mathcal{E}^{Inv}(G) \ \to \ \mathcal{E}^{Inv}(H)$ *(cf. I.2.17.1,)* est l'unique *application* telle que

$\theta(H) \circ \mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv}) \ = \ \mathcal{E}(\phi) \circ \theta(G)$; c'est-à-dire telle que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^{Inv}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})"] \arrow[d, "\theta(G)"'] & \mathcal{E}(H) \arrow[d, "\theta(H)"'] \\ \mathcal{E}(G) \arrow[r, "\mathcal{E}(\phi)"] & \mathcal{E}(H) \end{tikzcd}$$

est un *carré commutatif*

(cf. 0.1.ii.1.)

Démonstration *: Il faut montrer qu'on dispose bien d'un* couple *d'*applications
vérifiant les *axiomes* MorGph$_1$ à MorGph$_4$ de la définition *II.1.1.*

MorGph$_1$ est tautologiquement donné par la condition Inv_1.

MorGph$_2$ Unicité *S'il existe une* application

$$\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv}) \ : \ \mathcal{E}^{Inv}(G) \ \to \ \mathcal{E}^{Inv}(H)$$

satisfaisant la condition Inv_2,

$$\forall (e,u,v) \in \mathcal{E}^{Inv}(G), \ \mathcal{E}(\phi)\big(\theta(G)(e,u,v)\big) \ = \ \theta(H)\big(\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})(e,u,v)\big) \ ;$$

ce qui équivaut à

$$\theta(H)\big(\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})(e,u,v)\big) \ = \ \mathcal{E}(\phi)(e) \ .$$

Pour tout $(e,u,v) \ \in \ \mathcal{E}^{Inv}(G)$ il existe donc

$$(x,y) \ \in \ \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \ \text{ tel que } \ \mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})(e,u,v) \ = \ \big(\mathcal{E}(\phi)(e,x,y\big) \ .$$

Or si l'on impose à $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})$ d'être un
morphisme de graphes à involution *(cf. l'axiome* MorGph$_3$ de la définition *II.1.1,)* *(ou d'ailleurs* même simplement un *morphisme de graphes* *(cf. l'axiome* MorGph$_3$ de la définition *II.1.1,))*

$$\big(\mathcal{V}(\phi^{Inv}) \times \mathcal{V}(\phi^{Inv})\big)\big(\varepsilon^{Inv}(G)(e,u,v)\big) \ = \ \varepsilon^{Inv}(H)\big(\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})(e,u,v)\big) \ ;$$

ce qui entraîne *(cf. I.2.17.3,)*

$$(x,y) \ = \ \big(\mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big) \ .$$

Ceci assure l'unicité de $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})$.

Existence L'analyse faite ci-dessus impose que si $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})$ existe, nécessairement pour tout $(e,u,v) \in \mathcal{E}^{Inv}(G)$,

$$\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})(e,u,v) = \big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big) .$$

C'est une bonne définition, pour peu que

$$\big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big)$$

soit bien un *élément* de $\mathcal{E}^{Inv}(H)$.

Or si $(e,u,v) \in \mathcal{E}^{Inv}(G)$, c'est que précisément $e \in \mathcal{E}(G)$ et $\varepsilon(G)(e) = \{u,v\}$.

Or ϕ est, par hypothèse, un *morphisme de graphes non-orientés* ; si bien que

$$\mathcal{P}_{1,2}(\phi)\big(\varepsilon(G)(e) = \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) ;$$

ce qui équivaut à

$$\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) = \mathcal{P}_{1,2}(\phi)\big(\{u,v\}\big) = \big\{\mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big\} .$$

Ceci prouve que

$$\big(\mathcal{E}(\phi)(e), \mathcal{V}(\phi)(u), \mathcal{V}(\phi)(v)\big) \in \mathcal{E}^{Inv}(H) ;$$

et assure donc que $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})$ est bien définie.

Morphisme Reste donc à prouver que $\big(\mathcal{V}(\phi), \mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})\big)$ est bien un *morphisme de graphes à involution* ; c'est-à-dire satisfait bien l'axiome MorGph_3 de la définition II.1.1 et l'axiome MorGph_4 de la définition II.1.1. Ce sont des vérifications faciles, dans la mesure où l'on dispose d'une expression explicite pour $\mathcal{E}^{Inv}(\phi^{Inv})$; elles sont laissées en exercice.

ii) ***(Identité)***
Pour tout graphe non-orienté ${\mathrm{Id}_G}^{Inv} = \mathrm{Id}_{G^{Inv}}$.

iii) ***(Composé)***
Pour tous morphismes de graphes non-orientés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(H)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(I) \\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varepsilon(I)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\psi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)I] \end{array} \quad , \ \psi \circ \phi^{Inv} = \psi^{Inv} \circ \phi^{Inv} .$$

II.2 . −Sous-graphes (à involution non-orientés)

Proposition II.2.1 (Sous-graphe (à involution, non-orienté))

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes* *(cf. la définition I.1.1,)*

$\big($*resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution* *(cf. la définition I.2.1,)* $\big)$

$\big($*resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés* *(cf. la définition I.2.8.)* $\big)$

On suppose que $\mathcal{V}(H) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(G)$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) — $\varepsilon(H) = \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)}$,

— $\Big($*resp.* $\begin{array}{rcl} \varepsilon(H) & = & \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)} , \\ \mathbf{inv}(G)\,(\mathcal{E}(H)) & \subset & \mathcal{E}(H) , \\ \mathbf{inv}(G)_{|\mathcal{E}(H)} & = & \mathbf{inv}(H) \end{array} \Big)$,

— $\big($*resp.* $\varepsilon(H) = \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(H)}$.$\big)$

b) Le couple d'applications $\big((\mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)})_{|\mathcal{V}(H)} : \mathcal{V}(H) \to \mathcal{V}(G) , (\mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)})_{|\mathcal{E}(H)} : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(G) \big)$ *est un morphisme de graphes (resp. morphisme de graphes à involution , (resp. morphisme de graphes non-orientés ,) (cf. la définition II.1.1.)*

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.4.1.)*

Définition II.2.2 (Sous-graphe (à involution, non-orienté)) Si G et H vérifient les assertions équivalentes de la proposition II.2.1, on dit que H est un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

On dira simplement *sous-graphe* si aucune confusion n'est à craindre. On notera parfois $H \subset G$; même si, au titre du *langage ensembliste* (cf. I.1.13,) cette notation est abusive.

Proposition II.2.3 (Données équivalentes à un sous-graphe)

$$\begin{array}{llll} \textit{Soit} & G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big) & \textit{un graphe (cf. la définition I.1.1,)} & \\ \big(\textit{resp.} & \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big) & \textit{un graphe à involution (cf. la définition I.2.1,)} & \big) \\ \big(\textit{resp.} & G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big) & \textit{un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.)} & \big) \end{array}$$

Soient $W \subset \mathcal{V}(G)$ et $F \subset \mathcal{E}(G)$ des ensembles .

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a)

$$\begin{array}{rll} \textit{Il existe un sous-graphe} & H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big) & , \\ \big(\textit{resp. un sous-graphe à involution} & \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big) & ,\big) \\ \big(\textit{resp. un sous-graphe non-orienté} & H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big) & ,\big) \end{array}$$

de G tel que $\mathcal{V}(H) = W$ et $\mathcal{E}(H) = F$.

b) — $\varepsilon(G)(F) \subset W \times W$,

— $\Big($*resp.* $\begin{array}{rcl} \varepsilon(G)(F) & \subset & W \times W \\ \mathbf{inv}(G)(F) & \subset & F \end{array}$,$\Big)$

— $\big($*resp.* $\varepsilon(G)(F) \subset \mathcal{P}_{1,2}(W)$.$\big)$

Lorsque H existe il est alors unique sous les conditions du point a; c'est alors le sous-graphe $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$, *(resp. sous-graphe à involution* $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}, \mathbf{inv}(G)_{|F}\big)$*,) (resp. le sous-graphe non-orienté* $H = \big(W, F, \varepsilon(G)_{|F}\big)$ *.)*

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.4.2.)*

Définition II.2.4 (Sous-graphe induit)

Un *sous-graphe* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$
$\big($resp. un *sous-graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$,$\big)$
$\big($resp. un *sous-graphe non-orienté* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$,$\big)$
d'un *graphe* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$
$\big($resp. d'un *graphe à involution* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$,$\big)$
$\big($resp. d'un *graphe non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$,$\big)$

est *induit* si

$$\begin{gathered}\forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H) \\ \big(\text{resp. } \forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H)\ ,\ \big) \\ \big(\text{resp. } \forall e \in \mathcal{E}(G),\ \varepsilon(G)(e) \in \mathcal{P}_{1,2}(H) \Rightarrow e \in \mathcal{E}(H)\ .\big)\end{gathered} \tag{II.2.4.1}$$

Autrement dit c'est un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) ayant « le plus possible d'*arêtes* ».

On dit alors que H est un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. *sous-graphe non-orienté induit* ;) mais on s'en tient à *sous-graphe induit* si aucune confusion ne doit en résulter.

Exemple II.2.5 (Sous-graphes)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,)
$\big($resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,) $\big)$
$\big($resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.) $\big)$

a) Les inclusions $\mathcal{V}(G) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{E}(G)$ font de G un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ;) (et même un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté induit* ,)) de lui-même.

b) (**Graphe vide**)
Les inclusions $\emptyset \subset \mathcal{V}(G)$ et $\emptyset \subset \mathcal{E}(G)$ font du *graphe vide* $\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ (cf. le point a de l'exemple I.1.5, (resp. le point a de l'exemple I.2.2,) (resp. le point a de l'exemple I.2.10,)) un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

C'est même un *sous-graphe induit* (resp. un *sous-graphe à involution induit* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté induit* .)

c) (**Graphe isolé**)
Les inclusions $\mathcal{V}(G) \subset \mathcal{V}(G)$ et $\emptyset \subset \mathcal{E}(G)$ font du *graphe isolé* $\big(\mathcal{V}(G), \emptyset, \varepsilon\big)$ (cf. le point b de l'exemple I.1.5, (resp. le point b de l'exemple I.2.2,) (resp. le point b de l'exemple I.2.10,)) un *sous-graphe* (resp. un *sous-graphe à involution* ,) (resp. un *sous-graphe non-orienté* ,) de G.

$\big(\emptyset, \emptyset, \mathrm{Id}_\emptyset\big)$ est donc un *sous-graphe* de $\big(\mathcal{V}(G), \emptyset, \varepsilon\big)$ (et même un *sous-graphe induit*) qui lui-même est un *sous-graphe* (et même un *sous-graphe induit*) de G.

d) (**Graphes complets**)
Pout $n \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* , l'inclusion $[1; n] \hookrightarrow [1; n+1]$ fait du *graphe complet* $\mathbf{K}_n$ (cf. la définition I.4.14,) un *sous-graphe non-orienté induit* du *graphe complet* $\mathbf{K}_{n+1}$.

Tout *graphe fini simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, tel que $\#\big(\mathcal{V}(G)\big) \leq n$, est *isomorphe* (cf. la définition I.2.13,) à un *sous-graphe non-orienté* de $\mathbf{K}_n$.

Proposition II.2.6 (Propriétés des sous-graphes) *Ici les le cas des graphes à involution n'a pas à être traité indépendamment de celui des graphes .*

Soient donc $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un graphe non-orienté ,) et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ un sous-graphe (resp. $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ un sous-graphe non-orienté .)

*i) (**Voisins**)*

$$\text{Pour tout } v \in \mathcal{V}(H), \quad \begin{array}{rcll} N_H^-(v) & \subset & N_G^-(v) & \text{(cf. le point ii de la définition I.1.7,)} \\ N_H^+(v) & \subset & N_G^+(v) & \text{(cf. le point iii de la définition I.1.7,)} \\ N_H(v) & \subset & N_G(v) & \text{(cf. le point iv de la définition I.1.7 ;)} \\ \multicolumn{4}{c}{\big(\text{ resp. } N_H(v) \subset N_G(v) \text{ (cf. le point v de la définition I.2.12.)}\big)} \end{array}$$

*ii) (**relation d'adjacence**)*

Les relations d'adjacence $\mathcal{R}(G)$ de G et $\mathcal{R}(H)$ de H (cf. la définition I.1.8, et le point vi de la définition I.2.12) vérifient

$$\forall (v, w) \in \mathcal{V}(H) \times \mathcal{V}(H),\ v\, \mathcal{R}(H)\, w \ \Rightarrow\ v\, \mathcal{R}(G)\, w\ .$$

L'implication précédente est une équivalence si H est induit i.e. un sous-graphe induit (resp. un sous-graphe non-orienté induit .)

*iii) (**Graphes finis**)*

Si G est fini i.e. est un graphe fini (resp. un graphe fini non-orienté ,) alors H est un graphe fini (resp. un graphe fini non-orienté .)

$$\text{On a alors, pour tout } v \in \mathcal{V}(H)\ : \quad \begin{array}{rcll} d_H^-(v) & \leq & d_G^-(v) & \text{(cf. le point i de la définition I.3.5,)} \\ d_H^+(v) & \leq & d_G^+(v) & \text{(cf. le point ii de la définition I.3.5,)} \\ d_H(v) & \leq & d_G(v) & \text{(cf. I.3.5 ;)} \\ \multicolumn{4}{c}{\big(\text{ resp. } d_H(v) \leq d_G(v) \text{ (cf. la définition I.3.6.)}\big)} \end{array}$$

*iv) (**Graphes simples**)*

Si G est simple (cf. la définition I.4.1,) i.e. un graphe simple (resp. un graphe simple non-orienté ,) il en est de même de H. En particulier si G est un graphe fini simple non-orienté (cf. la définition I.4.4,) il en est de même de H.

Proposition II.2.7 (Image d'un morphisme)

$$\begin{array}{lcr} \textit{Soient} & \begin{array}{c} G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big) \text{ et } H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big) \\ \textit{des graphes} \\ \textit{(cf. la définition I.1.1,)} \end{array} & \\ \big(\textit{resp.} & \begin{array}{c} \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big) \text{ et } \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big) \\ \textit{des graphes à involution} \\ \textit{(cf. la définition I.2.1,)} \end{array} & \big) \\ \big(\textit{resp.} & \begin{array}{c} G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big) \text{ et } H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big) \\ \textit{des graphes non-orientés} \\ \textit{(cf. la définition I.2.8.)} \end{array} & \big) \end{array}$$

Soit $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}$ un *morphisme de graphes* ,

(*resp.* $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(G) \end{array}}$ un *morphisme de graphes à involution* ,)

(*resp.* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{array}$ un *morphisme de graphes non-orientés* ,)

(cf. la définition II.1.1.)

Alors :

$$\begin{gathered} \left(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)} \right), \\ \left[\textit{resp.}\ \left(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)},\ \mathbf{inv}(G)_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)} \right), \right] \\ \left[\textit{resp.}\ \left(\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big), \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big),\ (\varepsilon(G))_{|\operatorname{Im}\left(\mathcal{E}(\phi)\right)} \right); \right] \end{gathered} \tag{II.2.7.1}$$

est un sous-graphe (resp. un sous-graphe à involution ,) (reesp. un sous-graphe non-orienté ,) de G.

Démonstration : *On a immédiatement*

$$\operatorname{Im}\big(\mathcal{V}(\phi)\big) \subset \mathcal{V}(G) \text{ et } \operatorname{Im}\big(\mathcal{E}(\phi)\big) \subset \mathcal{E}(G)\ .$$

Par ailleurs la condition II.2.1.a est tautologiquement satisfaite.

Définition II.2.8 (Image) Pour $\phi : H \to G$ un *morphisme de graphes* , (resp. *morphisme de graphes à involution* ,) (resp. *morphisme de graphes non-orientés* ,) le *sous-graphe* (resp. *sous-graphe à involution* ,) (resp. *sous-graphe non-orienté* ,) II.2.7.1 sera appelé *image* de ϕ et noté $\operatorname{Im}\phi$.

Ici encore les deux propositions qui suivent garantissent la cohérence avec le paragraphe I.2 ; mais ne seront pas vraiment utilisées dans la suite.

Proposition II.2.9 (Sous-graphes associés) *Si*

$$\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big) \subset \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$$

est un sous-graphe à involution (resp. un sous-graphe à involution et un sous-graphe induit ,) (cf. la définition II.2.2,) H^{N-O} *est un sous-graphe non-orienté (resp. un sous-graphe non-orienté induit ,) de* G^{N-O} *(cf. la définition II.2.2.)*

Proposition II.2.10 (Sous-graphes associés) *Si* $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big) \subset G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *est un sous-graphe non-orienté (resp. un sous-graphe non-orienté induit ,) (cf. la définition II.2.2,)* H^{Inv} *est un sous-graphe à involution (resp. un sous-graphe à involution et un sous-graphe induit ,) de* G^{Inv} *(cf. la définition II.2.2.)*

II.3 . –Isomorphismes de graphes (à involution, non-orientés)

Définition II.3.1 (Isomorphisme de graphes (à involution, non-orientés))

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,)
(resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,))
(resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.))

isomorphisme de graphes (resp. *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) (ou simplement *isomorphisme* si le contexte est clair) de G sur H

est un *morphisme de graphes*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array},$$

(resp. un *morphisme de graphes à involution*
$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}},)$$

(resp. un *morphisme de graphes non-orientés*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array},)$$

tel qu'il existe

un *morphisme de graphes*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon(G)} \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array},$$

(resp. un *morphisme de graphes à involution*
$$\frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon(G)} \\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{inv}(G)} \\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \end{array}},)$$

(resp. un *morphisme de graphes non-orientés*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G) \\ {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon(G)} \\ \mathcal{P}_{1,2}([)H] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\psi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{array},)$$

vérifiant :
$$\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G \text{ et } \phi \circ \psi = \mathrm{Id}_H \text{ (cf. II.1.2.i et II.1.2.ii.)} \qquad \text{II.3.1.1}$$

Notation II.3.2 ($\mathrm{Isom}(\cdot,\cdot)$)

Soient $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ et $H := (\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H))$ des *graphes* (cf. la définition I.1.1,)

(resp. $(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G))$ et $(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H))$ des *graphes à involution* (cf. la définition I.2.1,))

(resp. $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$ et $H := (\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H))$ des *graphes non-orientés* (cf. la définition I.2.8.))

On note $\mathrm{Isom}([,)Gph]GH,$ (resp. $\mathrm{Isom}([,)Gph^{Inv}]GH,$) (resp. $\mathrm{Isom}([,)Gph^{N-O}]GH,$) l'*ensemble* des *isomorphismes de graphes* (resp. *isomorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphismes de graphes non-orientés* ,) de G sur H.

On notera simplement $\mathrm{Isom}(G, H)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Lemme II.3.3 (Inverse) *Étang donné un morphisme* $\phi : G \to H$,

i) ***(Unicité)***
il existe au plus un morphisme $\psi : H \to G$ *vérifiant II.3.1.1.*

ii) ***(Existence)***
si $\phi : G \cong H$ *est un isomorphisme , il existe un unique* $\psi : H \to G$ *vérifiant II.3.1.1 et de plus* ψ *est un isomorphisme .*

Démonstration : *(cf. l'exercice II.9.3.2.)*

Définition II.3.4 (Inverse) Si $\phi : G \cong H$ est un *isomorphisme* , l'unique *isomorphisme* $\psi : H \cong G$ vérifiant II.3.1.1 (cf. le point ii du lemme II.3.3,) sera appelé l'*isomorphisme inverse* ou simplement l'*inverse* de ϕ.

L'*isomorphisme* ϕ est alors très clairement l'*inverse* de ψ ; et l'on dira que ϕ et ψ sont *inverses l'un de l'autre*.

Même si elle ne peut pas s'en déduire, la la proposition II.3.5 qui suit a des analogues pour d'autres structures algébriques (cf. la proposition II.7.6, la proposition II.8.2.5.)

Proposition II.3.5 (Isomorphisme de graphes (à involution, non-orientés))

Soit $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}$ un *morphisme de graphes* ,

$\Big($*resp.* $\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) \end{array}}{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \mathbf{inv}(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{inv}(H)}\downarrow \\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \end{array}}$ un *morphisme de graphes à involution* , $\Big)$

$\Big($*resp.* $\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(H)}\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H] \end{array}$ un *morphisme de graphes non-orientés* . $\Big)$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *Le morphisme* ϕ *est un isomorphisme .*

b) *Les applications* $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ *et* $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ *sont bijectives .*

Démonstration :

a ⇒ b *(cf. l'exercice II.9.3.3.)*

b ⇒ a *Si*

$$\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H) \text{ et } \mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$$

sont des bijections , il existe (cf. le point iii de la définition I.1.13.18,) des applications

$$\alpha : \mathcal{V}(H) \to \mathcal{V}(G) \text{ et } \beta : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(G) \text{ telles que } \begin{array}{rcl} \alpha \circ \mathcal{V}(\phi) & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)} \\ \mathcal{V}(\phi) \circ \alpha & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(H)} \\ \beta \circ \mathcal{E}(\phi) & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(G)} \\ \mathcal{E}(\phi) \circ \beta & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(H)} \, ; \end{array}$$

ce qui entraîne, (cf. 0.2,)

$$(\alpha\times\alpha) \circ \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)} \text{ et } \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ (\alpha\times a\alpha) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H)} \,. \quad \textit{II.3.5.1}$$

Il suffit désormais de montrer que (α,β) est un morphisme de graphes de H dans G. Puisque $\mathcal{E}(\phi) \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}(H)}$, $\varepsilon(H) = \varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) \circ \beta$. Or ϕ est un morphisme , si bien que $\varepsilon(H) \circ \mathcal{E}(\phi) = \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G)$; ce qui entraîne

$$\varepsilon(H) = \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G) \circ \beta \,.$$

Il en résulte que $(\alpha \times \alpha) \circ \varepsilon(H) = (\alpha \times \alpha) \circ \big(\mathcal{V}(\phi) \times \mathcal{V}(\phi)\big) \circ \varepsilon(G) \circ \beta$; ce qui entraîne, grâce à II.3.5.1,

$$(\alpha \times \alpha) \circ \varepsilon(H) = \varepsilon(G) \circ \beta \,.$$

Cette dernière identité assure précisément (cf. II.1.1.MorGph$_3$,) que $(\alpha,\beta) : H \to G$ est un morphisme de graphes .

On avait déjà introduit la notion de *graphes isomorphes* (cf. la définition I.1.11,) (resp. de *graphes à involution isomorphes* (cf. la définition I.2.4,)) (resp. de *graphes non-orientés isomorphes* (cf. la définition I.2.13 ;)) dont il serait pour le moins déraisonnable qu'elle n'entretienne aucun rapport avec la notion d'*isomorphisme de graphes* (resp. *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) introduite ci-dessus. Aucune ambiguïté lexicale n'est à redouter comme l'atteste le corollaire ci-dessous de la proposition II.3.5 :

Corollaire II.3.6 (Graphes (à involution, non orientés) isomorphes)

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes (cf. la définition I.1.1,)*

$\big($*resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)* $\big)$

$\big($*resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.)* $\big)$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) G et H sont des graphes isomorphes ((cf. la définition I.1.11,)) (resp. des graphes à involution isomorphes (cf. la définition I.2.4,)) (resp. des graphes non-orientés isomorphes (cf. la définition I.2.13 ;)) c'est-à-dire qu'il existe des bijections $\alpha : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ et $\beta : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ telles que

$$\begin{array}{lrcl} \forall (v,w,e) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{E}(G), & \varepsilon(G)(e) & = & \begin{array}{l} (v,w), \\ \big(\textit{resp. } (v,w),\big) \\ \big(\textit{resp. } \{v,w\},\big) \end{array} \\ \Leftrightarrow & \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) & = & \begin{array}{l} \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\,, \\ \big(\textit{resp. } \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\,,\big) \\ \big(\textit{resp. } \big\{\alpha(v),\alpha(w)\big\}\,.\big) \end{array} \end{array} \qquad \mathit{1}$$

b) L'équivalence est affaiblie en une implication dans la condition a.1 ; plus précisément il existe des bijections

$$\alpha \;:\; \mathcal{V}(G) \;\to\; \mathcal{V}(H) \text{ et } \beta \;:\; \mathcal{E}(G) \;\to\; \mathcal{E}(H) \text{ telles que } :$$

$$\begin{array}{lcrcl} \forall(v,w,e)\in\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{E}(G), & & \varepsilon(G)(e) & = & \begin{array}{ll} & (v,w), \\ \big(\textit{resp.} & (v,w),\big) \\ \big(\textit{resp.} & \{v,w\},\big) \end{array} \\ \Rightarrow & & \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) & = & \begin{array}{ll} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\;, \\ \big(\textit{resp.} & \big(\alpha(v),\alpha(w)\big)\;,\big) \\ \big(\textit{resp.} & \big\{\alpha(v),\alpha(w)\big\}\;.\big) \end{array} \end{array} \qquad 1$$

c) Il existe un morphisme $\phi \;:\; G \;\to\; H$ tel que les applications

$$\mathcal{V}(\phi) \;:\; \mathcal{V}(G) \;\to\; \mathcal{V}(H) \text{ et } \mathcal{E}(\phi) \;:\; \mathcal{E}(G) \;\to\; \mathcal{E}(H)$$

sont des bijections .

d) Il existe un isomorphisme $\phi \;:\; G \;\cong\; H$.

***Démonstration** :*

a ⇒ b Est immédiat.

b ⇒ c La condition b.1 signifie précisément que le couple d'applications est un morphisme de graphes ; en effet : Pour tout $e \in \mathcal{E}(G)$, si $(u,v) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$ est tel que $(u,v) = \varepsilon(G)(e)$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & \big(\alpha(u),\alpha(v)\big) & = & \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) \\ \Leftrightarrow & (\alpha\times\alpha)\big((u,v)\big) & = & \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big) \\ \Leftrightarrow & (\alpha\times\alpha)\circ\varepsilon(G)(e) & = & \varepsilon(H)\big(\beta(e)\big)\;; \end{array}$$

ce qui assure, l'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $e \in \mathcal{E}(G)$, que $(\alpha\times\alpha) \circ \varepsilon(G) = \varepsilon(H) \circ \beta$; ce qui signifie précisément que le couple (α,β) vérifie la condition définition II.1.1,axiome MorGph$_3$.

c ⇒ d La proposition II.3.5 établit l'équivalence c ⇔ d ; mais on peut se contenter de n'utiliser ici que l'implication ; qui est d'ailleurs la partie vraiment significative de cette proposition.

d ⇒ a Si $\phi \;:\; G \;\to\; H$ est un isomorphisme de graphes du graphe G sur le graphe H, les applications $\mathcal{V}(\phi) \;:\; \mathcal{V}(G) \;\to\; \mathcal{V}(H)$ et $\mathcal{E}(\phi) \;:\; \mathcal{E}(G) \;\to\; \mathcal{E}(H)$ sont bijectives ; ce qui résulte, par exemple, de l'implication II.3.5.a ⇒ II.3.5.b.

Alors pour tout $e \in \mathcal{E}(G)$, et tout $(u,v) \in \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$, $(u,v) = \varepsilon(G)(e) = (u,v)$ entraîne puisque ϕ est un morphisme de graphes ,

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathcal{V}(\phi)(u),\mathcal{V}(\phi)(v)\big) & = & (\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big) \\ & = & \big(\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)\big)\big(\varepsilon(G)(e)\big) \\ & = & \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)\;; \end{array}$$

ce qui donne l'implication dans a.1.

Si ϕ est un isomorphisme de graphes , il possède un inverse ψ (cf. II.3.4,).

Pour tout $(e,u,v) \in \mathcal{E}(G)\times\mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)$, $\big(\mathcal{V}(\phi)(u),\mathcal{V}(\phi)(v)\big) = \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)$ *s'écrit encore* $\big(\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)\big)\big((u,v)\big) = \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big)$; *on a alors la suite d'implication :*

$$\begin{array}{rrcl} & \big(\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)\big)\big((u,v)\big) & = & \varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) \\ \Rightarrow & \big(\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)\big)\big((\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi))\big((u,v)\big)\big) & = & \big(\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)\big)\circ\varepsilon(H)\big(\mathcal{E}(\phi)(e)\big) \\ \Rightarrow & (u,v) & = & \varepsilon(G)\circ\mathcal{E}(\psi)\circ\mathcal{E}(\phi)(e) \\ \Rightarrow & (u,v) & = & \varepsilon(G)\circ\mathcal{E}(\psi\circ\phi)(e) \\ \Rightarrow & (u,v) & = & \varepsilon(G)(e)\ ; \end{array}$$

ce qui prouve l'implication réciproque dans a.1.

Ici encore les deux propositions qui suivent garantissent la cohérence avec le paragraphe I.2 ; mais ne seront pas vraiment utilisées dans la suite.

Proposition II.3.7 (Graphes associés) $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(H)}\\ \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)\times\mathcal{V}(\phi)} & \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H)\end{array}}{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\\ \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\end{array}}$ *est un isomorphisme de graphes à involution si et seulement si* $\phi^{N-O} : G^{N-O} \to H^{N-O}$ *est un isomorphisme de graphes non-orientés .*

***Démonstration** : Si* ϕ *est un isomorphisme de graphes à involution il possède un inverse ; c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de graphes à involution* $\dfrac{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\\ {\scriptstyle\varepsilon(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(G)}\\ \mathcal{V}(H)\times\mathcal{V}(H) & \xrightarrow{\mathcal{V}(\psi)\times\mathcal{V}(\psi)} & \mathcal{V}(G)\times\mathcal{V}(G)\end{array}}{\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\\ {\scriptstyle\mathbf{inv}(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathbf{inv}(G)}\\ \mathcal{E}(H) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\psi)} & \mathcal{E}(G)\end{array}}$ *tel que* $\psi\circ\phi = \mathrm{Id}_G$ et $\phi\circ\psi = \mathrm{Id}_H$.

Alors $(\psi\circ\phi)^{N-O} = {\mathrm{Id}_G}^{N-O}$ et $(\phi\circ\psi)^{N-O} = {\mathrm{Id}_H}^{N-O}$; *ce qui entraîne, en vertu du point ii de la proposition II.1.5, et du point iii de la proposition II.1.5, que* $\psi^{N-O}\circ\phi^{N-O} = \mathrm{Id}_{G^{N-O}}$ et $\phi^{N-O}\circ\psi^{N-O} = \mathrm{Id}_{H^{N-O}}$; *ce qui assure que* ϕ^{N-O} *est un isomorphisme de graphes non-orientés de* G^{N-O} *sur* H^{N-O}.

Proposition II.3.8 (Graphes associés) $\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\phi)} & \mathcal{E}(H)\\ {\scriptstyle\varepsilon(G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon(H)}\\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\phi]} & \mathcal{P}_{1,2}([)H]\end{array}$ *est un isomorphisme de graphes non-orientés si et seulement si* $\phi^{Inv} : G^{Inv} \to H^{Inv}$ *est un isomorphisme de graphes à involution .*

II.4 . −Endomorphismes de graphes (à involution non-orientés)

Définition II.4.1 (Endomorphisme)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,)
$\big($resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,) $\big)$
$\big($resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.) $\big)$

Un *endomorphisme de graphes* (resp. *endomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *endomorphisme de graphes non-orientés* ,) de G est un *morphisme* (de *graphes* (resp. de *graphes à involution*) (resp. de *graphes non-orientés* ,)) au sens de la définition II.1.1, $\phi : G \to G$ de G dans lui-même.

On dira simplement *endomorphisme* si cela ne prête pas à confusion.

Notation II.4.2 ($\mathrm{End}(\cdot)$) Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{End}_{\mathbf{Gph}}(G)$, (resp. $\mathrm{End}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{End}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G)$,) l'*ensemble* des *endomorphismes de graphes* (resp. *endomorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *endomorphismes de graphes non-orientés* ,) de G.

On notera simplement $\mathrm{End}(G)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Exemple II.4.3 (Identité) Pour G un *graphe* , (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) l'*identité* Id_G de G (cf. II.1.2.i,) est un *endomorphisme* de G.

Remarque II.4.4 ($\big(\mathrm{End}(G), \circ\big)$) Soit G un *graphe* (resp. *graphe à involution* ,) (resp. *graphe non-orienté* .)

i) (**Composition**)
$\forall(\phi, \psi) \in \mathrm{End}(G) \times \mathrm{End}(G),\ \phi \circ \psi \in \mathrm{End}(G)$. La *composition* $\circ$ (cf. II.1.2.ii,) est donc une *loi interne* (cf. la définition II.7.1,) sur $\mathrm{End}(G)$.

ii) (**Élément neutre**)
Il résulte alors du point iii du lemme II.1.3 que Id_G est un *élément neutre* pour $\circ$ (cf. le point i de la définition II.7.11.)

iii) Le *couple* $\big(\mathrm{End}(G), \circ\big)$ est donc un *magma associatif* (cf. la définition II.7.9.)

II.5 . −Automorphismes de graphes (à involution, non-orientés)

Définition II.5.1 (Automorphisme)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,)
$\big($resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,) $\big)$
$\big($resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.) $\big)$

Un *automorphisme de graphes* (resp. *automorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *automorphisme de graphes non-orientés* ,) de G *isomorphisme* $\phi : G \cong G$; autrement dit un *morphisme* $\phi : G \to G$ qui est simultanément un *isomorphisme* et un *endomorphisme* .

On dira simplement *automorphisme* si cela ne prête pas à confusion.

Notation II.5.2 ($\mathrm{Aut}(\cdot)$) Pour $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* ,) (resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* ,) on note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G)$, (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G)$,) l'*ensemble* des *automorphismes de graphes* (resp. *automorphismes de graphes à involution* ,) (resp. *automorphismes de graphes non-orientés* ,) de G.

On notera simplement $\mathrm{Aut}(G)$ si aucune confusion ne doit en résulter.

Proposition II.5.3 (Caractérisation des automorphismes)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe (cf. la définition I.1.1,)*
(resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe à involution (cf. la définition I.2.1,))*
(resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.))*

Un automorphisme de G est un endomorphisme $\phi : G \to G$ de G tel que $\mathcal{V}(\phi) : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(G)$ et $\mathcal{E}(\phi) : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ sont des bijections .

***Démonstration** : C'est une conséquence immédiate de la proposition II.3.5.*

Exemple II.5.4 (Automorphismes) i) (**Identité**)
Pour G un *graphe* , (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) l'*identité* Id_G de G (cf. II.1.2.i,) est un *automorphisme* de G.

ii) (**D'autres exemples**)
(cf. l'exercice II.9.5.2 et l'exercice II.9.5.3.)

Proposition II.5.5 (Groupe des automorphismes)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe (cf. la définition I.1.1,)*
(resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ *un graphe à involution (cf. la définition I.2.1,))*
(resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe non-orienté (cf. la définition I.2.8.))*

i) ($\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$)
Le couple $\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G), \circ\big)$ est un groupe (cf. la définition II.8.1.1.)

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.9.3.4.)*

*ii) (**Permutation des sommets**)*
L'application $\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G), \circ\big) \to \big(\mathcal{S}(\mathcal{V}(G)), \circ\big)$, $\phi \mapsto \mathcal{V}(\phi)$ est un morphisme de groupes (cf. la définition II.8.2.1 ;) et où $\mathcal{S}(\cdot)$ est comme au point c de l'exemple II.8.1.2.

***Démonstration** : (cf. la question 2 de l'exercice II.9.3.4.)*

*iii) (**Fonctorialité**)*

Soient $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes (cf. la définition I.1.1,)*

$\big($*resp.* $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ et $\big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H), \mathbf{inv}(H)\big)$ *des graphes à involution (cf. la définition I.2.1,)* $\big)$

$\big($*resp.* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ et $H := \big(\mathcal{V}(H), \mathcal{E}(H), \varepsilon(H)\big)$ *des graphes non-orientés (cf. la définition I.2.8.)* $\big)$

Soit $\phi : G \cong H$ *un isomorphisme et* $\psi : H \cong G$ *son isomorphisme inverse (cf. la définition II.3.4.) Pour tout* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, *on définit* $\mathrm{Aut}(\phi)(\alpha) := \psi \circ \alpha \circ \phi$.

Alors $\mathrm{Aut}(\phi)$ *est un isomorphisme de groupes (cf. la définition II.8.2.4.)*

***Démonstration** : (cf. la question 3 de l'exercice II.9.3.4.)*

Définition II.5.6 (Graphe sommet-transitif)

Soit $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe* (cf. la définition I.1.1,)
$\big($resp. $\big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G), \mathbf{inv}(G)\big)$ un *graphe à involution* (cf. la définition I.2.1,) $\big)$
$\big($resp. $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe non-orienté* (cf. la définition I.2.8.) $\big)$

On dit que G est *sommet-transitif* si pour tout $(v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, il existe un *automorphisme de graphes* (resp. *automorphisme de graphes à involution* ,) (resp. *automorphisme de graphes non-orientés* ,) τ tel que $\tau(v) = w$.

II.6 . −Le cas des graphes simples non-orientés

Dans le cas des *graphes simples non-orientés* (cf. la définition I.4.1,) non nécessairement *finis* , la notion de *morphisme* doncuit à un certain nombre de définitions usuelles que nous donnons ici ; et que nous serons amenés à utiliser dans la suite. Dans ce paragraphe (II.6,) $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ **sera donc toujours un *graphe simple non-orienté* .**

II.6.1 . −Morphismes de source G

Proposition II.6.1.1 (Bipartition) *Soit* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ *un graphe fini simple non-orienté . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

Bip$_1$*) Il existe un morphisme de graphes non-orientés*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\beta)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)}\big\downarrow \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$$

(cf. la définition I.4.14.)

Bip$_2$) Il existe des sous-ensembles $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}(G)$ *et* $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}(G)$ *tels que :*

i) $\mathcal{V}(G) = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$.

ii) pour tout $\{x,y\} \in \mathcal{P}_{1,2}(G)$, *si* $\varepsilon(G)^{-1}\big(\{\{x,y\}\}\big) \neq \emptyset$, *il existe* $k \in \{1,2\}$ *tel que* $x \in \mathcal{V}_k$ *et* $y \in \mathcal{V}_{3-k}$.

***Démonstration** : On rappelle que* $\mathbf{K}_2$ *est le graphe complet à 2 sommets (cf. la définition I.4.14 ;) et qu'on a alors* $\mathcal{V}(\mathbf{K}_2) = \{1,2\}$ *et* $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \big\{\{1,2\}\big\}$.

Bip$_1$ ⇒ Bip$_2$ Étant donné un morphisme de graphes non-orientés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\beta)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)} \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$$

, notons $\mathcal{V}_k := \mathcal{V}(\beta)^{-1}(\{k\})$ *pour* $k \in \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) = \{1,2\}$ *. Le point i est alors évidemment satisfait. Le point ii résulte de ce que pour tout* $\{x,y\} \in \mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(\beta)(\{x,y\}) = \{1,2\}$ *; si bien que si* $\mathcal{V}(\beta)(x) = 1$, $\mathcal{V}(\beta)(y) = 2$ *et vice versa.*

Bip$_2$ ⇒ Bip$_1$ Définissons

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(G) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\beta)} & \mathcal{E}(\mathbf{K}_2) \\ {\scriptstyle \varepsilon(G)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon(\mathbf{K}_2)} \\ \mathcal{P}_{1,2}([)G] & \xrightarrow{\mathcal{P}_{1,2}([)\beta]} & \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{K}_2] \end{array}$$

par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}(\beta) : & \mathcal{V}(G) & \longrightarrow & \mathcal{V}(\mathbf{K}_2) \\ & x \in \mathcal{V}_k & \longmapsto & k\,. \end{array}$$

Puisque $\mathcal{E}(\mathbf{K}_2) = \big\{\{1,2\}\big\}$ *est un singleton , on a nécessairement* $\forall e \in \mathcal{E}(G),\ \mathcal{E}(\beta)(e) = \{1,2\}$ *. Le point ii assure alors qu'on définit bien ainsi un morphisme de graphes non-orientés .*

Définition II.6.1.2 (Graphe biparti) Si un *graphe fini simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ vérifie l'une des conditions équivalentes Bip$_1$ ou Bip$_2$, on dit que G est un *graphe biparti* . On dira que $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ satisfaisant i et ii. est une *bipartition* de G.

Définition II.6.1.3 (Graphe k-coloriable) Un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ est *k-coloriable* , pour un *entier naturel* $k \in \mathbb{N}$ s'il existe un *morphisme de graphes non-orientés* (cf. la définition II.1.1,) $\gamma : G \to \mathbf{K}_k$ (cf. la définition I.4.14.)

En particulier, G est *biparti* si et seulement si G est 2-*coloriable* .

II.6.2 . −Morphismes de but G

Définition II.6.2.1 (Parcours, circuit) Éttant donné un

$$\textit{graphe simple non-orienté} \quad G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)\,,$$

pour $\ell \in \mathbb{N}$ un *entier naturel* ,

i) **(Parcours)**
un *parcours de longueur* ℓ dans G est un

morphisme de graphes non-orientés
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
(cf. la définition I.4.10.)

Il revient au même de se donner l'*ensemble* $\{, \ldots, v_\ell := \mathcal{V}(\pi)(\ell)\} \subset \mathcal{V}(G)$ de sorte que $\forall 0 \leq i \leq \ell - 1,\ \{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}(G)$ soit une *arête* de G.

Noter qu'on ne demande absolument pas que $\mathcal{V}(\pi)$ soit *injective* ; autrement dit le *parcours* π « peut repasser plusieurs fois par un même *sommet* » ; $\mathcal{E}(\pi)$ n'a pas plus de bonne raison d'être alors *injective* .

ii) **(Circuit)**
Le *parcours* π est un *circuit* si $\pi(0) = \pi(\ell)$.

Notation II.6.2.2 (Parcours) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$, pour tout $(v, w, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N}$, on note $P_{v,w,\ell}(G)$

l'*ensemble des parcours de longueur* ℓ
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \arrow[r, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[d, "\varepsilon(\mathbf{P}_\ell)"'] & \mathcal{E}(G) \arrow[d, "\varepsilon(G)"'] \\ \mathcal{P}_{1,2}([)\mathbf{P}_\ell] \arrow[r, "\mathcal{P}_{1,2}([)\pi]"] & \mathcal{P}_{1,2}([)G] \end{tikzcd}$$
dans G tels que

$$\mathcal{V}(\pi)(0) = v \text{ et } \mathcal{V}(\pi)(\ell) = w\ .$$

Proposition II.6.2.3 (Le cas des graphes sommet-transitifs) *Si G est sommet-transitif (cf. la définition II.5.6,)*

$$\forall (v, w, \ell) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \times \mathbb{N},\ \#\big(P_{v,v,\ell}(G)\big) = \#\big(P_{w,w,\ell}(G)\big)\ .$$

***Démonstration** : Pour $(v, w) \in \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$, soit $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph^{N\text{-}O}}}(G)$ tel que $\tau(v) = w$. Alors l'application*

$$P_{v,v,\ell}(G) \to P_{w,w,\ell}(G)\ ,\ \pi \mapsto \tau \circ \pi$$

est une bijection de bijection réciproque

$$P_{w,w,\ell}(G) \to P_{v,v,\ell}(G)\ ,\ \pi \mapsto \tau^{-1} \circ \pi\ .$$

Définition II.6.2.4 (Parcours, circuit eulérien) Étant donné un

$$\textit{graphe simple non-orienté} \qquad G := \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)\ ,$$

i) **(Parcours)**
un *parcours eulérien de longueur* ℓ est un *parcours de longueur* ℓ $\pi : \mathbf{P}_\ell \to G$ tel que l'*application* $\mathcal{E}(\pi) : \mathcal{E}(\mathbf{P}_\ell) \to \mathcal{E}(G)$ est *bijective* ; autrement dit le parcours passe une fois et une seule par chaque *arête* de G.

ii) (**Circuit**)
Un *circuit eulérien* est un *parcours eulérien* $\pi : \mathbf{P}_\ell \to G$ tel que $\pi(0) = \pi(\ell)$. Cette dénomination se rapporte évidemment à la question *des sept ponts de Königsberg* formulée par EULER.

Définition II.6.2.5 (Chemin et cycle dans un graphe) Soit

$$G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)) \text{ un } \textit{graphe simple non-orienté} \quad .$$

un *chemin* (resp. un *cycle* ,) de *longueur* ℓ dans G, est un *morphisme de graphes non-orientés*

$$\gamma : \mathbf{P}_\ell \text{ (resp. } \mathbf{C}_\ell \text{ ,) } \to G \text{ (cf. la définition I.4.10, (resp. la définition I.4.12 ,)}$$

tel que $\mathcal{V}(\gamma)$ soit *injective* .

De manière équivalente, en considérant l'*image* de γ (cf. la définition II.2.8,) un *chemin* (resp. un *cycle* ,) dans G est un *sous-graphe non-orienté* *isomorphe* (cf. la définition I.2.13,) à $\mathbf{P}_\ell$, (resp. à $\mathbf{C}_\ell$.)

Exemple II.6.2.6 (Chemins et cycles) (cf. l'exercice II.9.5.1.)

Définition II.6.2.7 (Chemin, cycle, graphe Hamiltonien) Étant donné un *graphe simple non-orienté* $G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G))$,

i) un *chemin* (resp. *cycle* ,)

$$\gamma : \mathbf{P}_\ell \text{ (resp. } \mathbf{C}_\ell \text{ ,) } \to G$$

est *hamiltonien* si $\mathcal{V}(\gamma)$ est *bijective* . On parle alors de *chemin hamiltonien* (resp. *cycle hamiltonien* ou *cycle couvrant* .)

ii) (**Graphe Hamiltonien**)
On dit que G est un *graphe hamiltonien* s'il possède un *cycle hamiltonien* .

II.6.3 . −Sous-graphe

Lemme II.6.3.1 (Sous-graphe induit par une partie) *Étant donné un*

$$\textit{graphe simple non-orienté} \quad G := (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)) \text{ et } W \subset \mathcal{V}(G) ,$$

il existe un unique sous-graphe non-orienté induit (cf. la définition II.2.4,) $H \subset G$, tel que $\mathcal{V}(H) = W$.

Démonstration *: Si H existe alors nécessairement*

$$\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(G)_W := \mathcal{E}(G) \times_{\mathcal{V}(G)} W := \{ \in \mathcal{E}(G) ; \varepsilon(G)(e) \in W \times W \} ; \qquad \textit{II.6.3.1.1}$$

ce qui définit complètement et uniquement H.

Définition II.6.3.2 (Sous-graphe induit par une partie) Dans la situation le lemme II.6.3.1, on dit que H est *le sous-graphe non-orienté induit* par W. On pourrait le noter $G_{|W} := (W , \mathcal{E}(G)_W , \varepsilon(G)_{|\mathcal{E}(G)_W})$.

i) (**Stable**)
Si $G_{|W}$ est un *graphe isolé* (cf. la définition I.4.9,) on dit que $G_{|W}$ (ou même simplement W,) est un *stable* .

ii) (**Clique**)
Si $G_{|W}$ est un *graphe complet* (cf. la définition I.4.14,) on dit que $G_{|W}$ (ou même simplement W,) est une *clique* .

II.6.4 . –Automorphismes

Proposition II.6.4.1 ($\mathrm{Aut}(\cdot) \subset \mathcal{S}$.**)** *Sit G est un graphe simple non-orienté (pas nécessairement fini .) Alors le morphisme de groupes du point ii de la proposition II.5.5 est injectif .*

Démonstration : *Les arguments sont essentiellement ceux donnés au point c de la question 2 de l'exercice II.9.5.3.*

II.7 . –Loi de composition, (magma,) morphisme

Définition II.7.1 (Loi de composition) Pour un ensemble M on appelle *loi de composition* (ou *loi de composition interne* ou *loi interne*) $*$ sur M une application (cf. I.1.13.12.iii,)

$$* \ : \ M \times M \ \to \ M \ .$$

Évidemment à la notation $((x,y),z) \in *$ qui découle de l'axiomatique présentée précédemment on préférera toujours celle $x * y \ = \ z$.

Le couple $(M,*)$ est appelé *magma*.

Définition II.7.2 (Morphisme homomorphisme) Étant donnés deux *magmas*

$$(M,*) \text{ et } (N,\cdot)$$

on dit qu'une application $f \ : \ M \ \to \ N$ est un *morphisme* ou *homomorphisme* de $(M,*)$ dans $(N,\cdot)$ si

$$\forall x \in M, \ \forall y \in M, \ (f(x*y) \ = \ f(x) \ \cdot \ f(y)) \ .$$

Lemme II.7.3 *i) Pour tout magma $(M,*)$ l'identité Id_M est un morphisme du magma M dans lui-même.*

ii) Pour $(M,*_M)$, $(N,*_N)$ et $(P,*_P)$ des magmas , $f \ : \ M \ \to \ N$ et $g \ : \ N \ \to \ P$ des morphismes, le composé $g \circ f$ est un morphisme.

Définition II.7.4 Étant donnés deux *magmas* $(M,*)$ et $(N,\cdot)$, un morphisme $f \ : \ M \ \to \ N$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g \ : \ N \ \to \ M$ tel que

$$g \ \circ \ f \ = \ \mathrm{Id}_M \text{ et } f \ \circ \ g \ = \ \mathrm{Id}_N \ .$$

On notera $\mathrm{Isom}(M,N)$ l'ensemble des iso*morphisme* s de $(M,*)$ dans $(N,\cdot)$.

Lemme II.7.5 *Étant donné un morphisme $f \ : \ M \ \to \ N$, si f possède une application réciproque i.e. une application $g \ : \ N \ \to \ M$ telle que*

$$f \ \circ \ g \ = \ \mathrm{Id}_N \text{ et } g \ \circ \ f \ = \ \mathrm{Id}_M,$$

alors g et également un morphisme.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in N \times N, \quad g(u \cdot v) &= g\big[f[g(u)] \cdot f[g(v)]\big] \\ &= g\big[f[g(u) * g(v)]\big] \\ &= g(u) * g(v) \ .\end{aligned}$$

Proposition II.7.6 *Étant donnés deux magmas* $(M, *)$ *et* $(N, \cdot)$*, une application* $f : M \to N$ *est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme bijectif.*

Démonstration *: Si f est un isomorphisme, c'est par définition un morphisme qui est bijectif puisque possédant une application réciproque.*

Réciproquement si $f : M \to N$ est une application bijective, il existe (cf. l'exercice I.5.1.4,) une application

$$g : N \to M \text{ telle que } g \circ f = \mathrm{Id}_M \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_N .$$

Alors : Le résultat découle immédiatement du lemme II.7.5.

Définition II.7.7 Soit $(M, *)$ un magma.

i) **(Enndo*morphisme* s)**
Un morphisme $f : M \to M$ de M dans lui-même est appelé *endomorphisme*. On note $\mathrm{End}(M)$ l'ensemble des endo*morphisme* s de M.

ii) **(Automorphisme)**
Un morphisme $f : M \to M$ est un *automorphisme* si c'est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme. Il revient au même, grâce à la proposition II.7.6, de dire que f est un endomorphisme bijectif. On note $\mathrm{Aut}(M)$ l'ensemble des auto*morphisme* s de M.

Exemple II.7.8 Pour un magma M, l'identité Id_M est un automorphisme de M.

Définition II.7.9 (Associativité) On dit qu'une *loi de composition* $*$ sur un ensemble M est *associative* si

$$\forall x \in M,\ \forall y \in M,\ \forall z \in M,\ ((x * y) * z = x * (y * z)) .$$

On peut alors parler pour $(M, *)$ de *magma associatif* .

Définition II.7.10 (Commutativité) On dit qu'une *loi de composition* $*$ sur un ensemble M est *commutative* si

$$\forall x \in M,\ \forall y \in M,\ (x * y = y * x) .$$

Définition II.7.11 (Éléments particuliers) Soit $(M, *)$ un ensemble muni d'une *loi de composition* associative (magma associatif)

i) **(Élément neutre)**
Un *élément neutre* pour $(M, *)$ est un élément $\epsilon \in M$ tel que

$$\forall x \in M,\ (x * \epsilon = \epsilon * x = x) .$$

ii) **(Symétrique)**
Si M possède un *élément neutre* ϵ on dit qu'un élément $x \in M$ possède un *symétrique* pour la loi $*$ s'il existe $y \in M$ tel que

$$x * y = y * x = \epsilon .$$

Remarque II.7.12 Dans la suite on ne considérera que des *magmas associatifs* dans la mesure où ce seront les seuls que nous rencontrerons. Il se peut que certains énoncés puissent être formulés sans cette hypothèse mais nous ne cherchons pas le plus grand degré de généralité possible mais une présentation que nous espérons la plus claire et la plus lisible ainsi que la moins répétitive.

Exemple II.7.13 Si X est un ensemble l'ensemble M des applications de X dans lui-même est un magma associatif pour la loi $\circ$ de composition des applications. Il possède un *élément neutre* Id_X. En revanche un élément $f : X \to X$ de M n'a pas de *symétrique* en général puisque f n'est pas bijective en général. La loi $\circ$ n'est en général pas commutative non plus.

Proposition II.7.14 (Propriétés) *Soient $(M, *)$ un magma associatif.*

i) Si ϵ et ϵ' sont des élément neutre s de $(M, *)$ alors $\epsilon = \epsilon'$.

ii) Si $(M, *)$ possède un élément neutre et si y et z éléments de M sont des symétriques pour $x \in M$, $y = z$.

Remarque II.7.15 On pourra donc parler de L'*élément neutre* d'un magma lorsqu'il en possède un et du *symétrique* d'un élément lorsqu'il en possède un.

Pour un magma $(M, *)$ et une partie N de M, $N \times N$ est une partie de $M \times M$. La restriction $*_{|N\times N}$ de $*$ à $N \times N$ est une application $*_{|N\times N} : N \times N \to N$. Il se peut cependant que :

Définition II.7.16 (Sous-magma) Que $*_{|N\times N}$ soit à valeurs dans N. On dit dans se cas que la loi $*$ se restreint en une loi interne (usuellement encore notée $*$) sur N.

On pourra alors dire que $(N, *)$ est un sous-magma de $(M, *)$

La définition ci-dessus ne présente pas un grand intérêt en soi, hormis celui de pouvoir énoncer confortablement la proposition II.7.17. Cette dernière n'étant d'ailleurs elle-même qu'un moyen commode de ne pas réécrire de nombreuses fois le même argument.

Proposition II.7.17 (Propriétés des sous-*magmas*) *Soit $(M, *)$ un magma.*

i) Le magma $(M, *)$ est toujours un sous-magma de lui-même. Si M possède un élément neutre ϵ, $(\{\epsilon\}, *)$ est un sous-magma de $(M, *)$.

ii) Soit $(N, *)$ un sous-magma de $(M, *)$. Si $(M, *)$ est associatif (resp. commutatif) $(N, *)$ l'est aussi.

Soit $f : (M, *) \to (N, \cdot)$ un morphisme de magmas .

iii) Pour tout sous-magma M' de M, $f(M')$ est un sous-magma de N.

iv) Pour tout sous-magma N' de N, $f^{-1}(N')$ est un sous-magma de M.

Définition II.7.18 (REIation d'équivalence compatible)

Étant donné un magma associatif $(M, *)$,

on dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble M est *compatible à la loi* $*$ ou simplement compatible si

$$\forall (x, y, z, t) \in M \times M \times M \times M,\ \big(x \sim z \text{ et } y \sim t\big) \ \Rightarrow\ x * y \ \sim\ z * t\ .$$

Lemme II.7.19 *Si $(M, *)$ est un magma associatif, et $\sim$ une relation d'équivalence compatible,*

i) il existe une unique structure de magma sur l'ensemble quotient $M/\sim$ (ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$, (cf. la définition I.3.11.3.1,)) telle que la surjection canonique (cf. le point ii de la définition I.3.11.3.7,) $\pi\ :\ M\ \to\ M/\sim$ soit un morphisme .

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.9.1.20.)*

ii) Le magma $M/\sim$ est alors associatif (resp. commutatif) (resp. possède un élément neutre) s'il en est ainsi pour $(M, *)$.

***Démonstration** : (cf. la question 2 de l'exercice II.9.1.20.)*

Définition II.7.20 (Magma quotient) Avec les notations du lemme II.7.19, le magma $M/\sim$ est appelé *magma quotient* ou bien on dit que l'ensemble $M/\sim$ est muni de la *structure quotient*.

Proposition II.7.21 *Soient $(M, *)$ un magma, E un ensemble et M^E l'ensemble des applications de E dans M. Pour tout $(f, g)\ \in\ M^E\ \times\ M^E$, on définit $f\ *_{M^E}\ g\ \in\ M^E$ de la manière suivante : Pour tout $x\ \in\ E$,*

$$f *_{M^E} g(x)\ :=\ f(x) * g(x)\ .$$

i) $(M^E, *_{M^E})$ est un magma c'est-à-dire que $*_{M^E}$ est une loi de composition interne sur M^E.

ii) La loi $*_{M^E}$ est la seule loi sur l'ensemble M^E telle que, pour tout $x\ \in\ E$, l'application

$$M^E\ \to\ M\ ,\ f\ \mapsto\ f(x)$$

soit un morphisme.

iii) Le magma $(M^E, *_{M^E})$ est associatif dès que $(M, *)$ l'est.

iv) Le magma $(M^E, *_{M^E})$ est commutatif dès que $(M, *)$ l'est.

v) Si $(M, *)$ possède un élément neutre ϵ, l'application

$$\epsilon_{M^E}\ :\ E\ \to\ M\ ,\ x\ \mapsto\ \epsilon$$

est l'élément neutre de M^E.

Définition II.7.22 Étant donnés un magma $(M, *)$ et un ensemble E, on appellera *loi induite* par celle de M sur M^E, la loi $*_{M^E}$ construite à la proposition II.7.21. On la notera bien sûr simplement $*$ en général.

Exemple II.7.23 On est habitué depuis longtemps à écrire $f + g$ pour f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même par exemple, ainsi que $f * g$ en utilisant les lois de compositions $+$ et $*$ dont on dispose sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Proposition II.7.24 *Étant donnés deux magmas $(M, *)$ et $(N, \cdot)$,*

i) la loi $\dagger$ définie sur le produit cartésien $M \times N$ par

$$(x, y) \ \dagger \ (z, t) \ := \ (x * z, y \cdot t)$$

est l'unique loi telle que les projections

$$p \ : \ M \times N \ \to \ M \ , \ (x, y) \ \mapsto \ x \text{ et } q \ : \ M \times N \ \to \ N \ , \ (x, y) \ \mapsto \ y$$

(cf. I.1.13.17,) soient des morphismes ;

ii) Pour tout magma $(P, \sharp)$, et tout couple de morphismes

$$\big(f \ : \ (P, \sharp) \ \to \ (M, *) \ , \ g \ : \ (P, \sharp) \ \to \ (N, \cdot)\big)$$

il existe un unique morphisme

$$h \ : \ (P, \sharp) \ \to \ (M \times N, \dagger) \text{ tel que } p \ \circ \ h \ = \ f \text{ et } q \ \circ \ h \ = \ g \ .$$

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.1.6.)*

la proposition qui suit (proposition II.7.25) généralise la proposition I.1.13.15 qui en est un cas particulier pour $n = 2$, mais doit cependant être établie préalablement pour pouvoir raisonner par récurrence.

Proposition II.7.25 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$, des ensembles.*

i) On définit par récurrence le produit cartésien des ensembles $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ par

$$\prod_{k=1}^{n+1} E_k \ := \ \prod_{k=1}^{n} E_k \ \times \ E_{n+1}$$

sachant que le produit cartésien de deux ensembles a été défini au point iii de la définition I.1.13.10.

ii) On définit également des projections

$$p_k \ : \ P \ := \ \prod_{i=1}^{n+1} E_k \ \to \ E_k \ ,_{1 \leq k \leq n+1}$$

en supposant construites $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$, on définit p_{n+1} par

$$p_{n+1} \ : \ \Big(\prod_{k=1}^{n} E_k\Big) \times E_{n+1} \ \to \ (x, y) \ , \ y \ \mapsto \ .$$

Ce qu'on peut écrire

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) \ = \ x_k \ .$$

*iii) (**Propriété universelle**)*

Pour tout ensemble F et tout n-uplet d'applications $f_k\ :\ F\ \to\ E_k\ ,_{1\ \leq\ k\ \leq\ n}$, il existe une unique application

$$f\ :\ F\ \to\ P\ :=\ \prod_{k=1}^{n} E_k \text{ telle que } \forall 1 \leq k \leq n,\ f_k\ =\ p_k\ \circ\ f\ .$$

iv) Dans le cas où il existe un ensemble E tel que $\forall 1\ \leq\ k\ \leq\ n,\ E_k\ =\ E$, on rappelle que $E^{[1;n]}$ désigne l'ensemble des applications de $[1; n]$ à valeurs dans E (cf. I.1.13.13.) Pour tout $1\ \leq\ k\ \leq\ n$, on définit

$$q_k\ :\ E^{[1;n]}\ \to\ E\ ,\ f\ \mapsto\ f(k)\ .$$

En vertu du point iii , il existe une unique application

$$\phi\ :\ E^{[1;n]}\ \to\ \prod_{k=1}^{n} E \text{ telle que } \forall 1 \leq k \leq n,\ q_k\ =\ p_k\ \circ\ \phi\ .$$

L'application ϕ est alors une bijection ;

***Démonstration** : Pour tout $y\ \in\ \prod_{k=1}^{n} E$, l'application $f\ :\ [1; n]\ \to\ E$ définie par*

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ f(k)\ :=\ p_k(y)$$

vérifie évidemment $\phi(f)\ =\ y$ ce qui assure que ϕ est surjective ;

Pour tout $(f, g)\ \in\ E^{[1;n]} \times E^{[1;n]}$, $\phi(f)\ =\ \phi(g)$ entraîne que pour tout $1\ \leq\ k\ \leq\ n$, $p_k[\phi(f)]\ =\ p_k[\phi(g)]$ c'est-à-dire $q_k(f)\ =\ q_k(g)$ ou encore $f(k)\ =\ g(k)$ ce qui entraîne $f\ =\ g$, et assure donc finalement que ϕ est injective.

Remarque II.7.26 La construction faite au point iv de la proposition II.7.25 consiste en fait à considérer une application de $[1; n]$ dans E à travers son graphe qui est un n-uplet de couples $((1, f(1), \ldots, (n, f(n))$ qu'on identifie à $(f(1), \ldots, f(n))$ qui est un élément de $\prod_{k=1}^{n} E$.

Notation II.7.27 Dans le cas du point iv de la proposition II.7.25 ou de la remarque II.7.26, pour tout $n\ \in\ \mathbb{N}^*$, et tout ensemble E, on notera

$$E^n\ =\ \prod_{k=1}^{n} E\ \cong\ E^{[1;n]}\ .$$

La proposition quie suit (proposition II.7.28) généralise la proposition II.7.25 au cas des *magmas* ou bien encore la proposition II.7.24 au cas de plus de deux facteurs :

Proposition II.7.28 *Étant donnés un entier naturel $n\ \in\ \mathbb{N}^*$, $(M_k, *_k)\ ,_{1\ \leq\ k\ \leq\ n}$ des magmas (cf. la définition II.7.1,) notons*

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ p_k\ :\ \prod_{i=1}^{n} M_i\ \to\ M_k \text{ les projections }\ .$$

Alors :

i) Il existe une unique loi de composition $*$ *sur* $\prod_{k=1}^{n} M_k$ *telle que pour tout* $1 \le k \le n$ p_k *soit un morphisme ; la loi* $*$ *est donnée par*

$$\forall\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,x_n)\big) \in \prod_{k=1}^{n} M_k \times \prod_{k=1}^{n} M_K,$$
$$(x_1,\dots,x_n) \; * \; (y_1,\dots,y_n) \; = \; (x_1 *_1 y_1,\dots,x_n *_n y_n) \; .$$

ii) La loi $*$ *étant définie sur* $\prod_{k=1}^{n} M_k$ *comme ci-dessus, si*

a) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ *est associative,* $*$ *l'est aussi ;*

b) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ *est commutative,* $*$ *l'est aussi ;*

c) pour tout $1 \le k \le n$ $*_k$ *possède un élément neutre* e_k, $(e_1,\dots,e_n)$ *est un élément neutre pour* $*$;

d) $x \in \prod_{k=1}^{n} M_k$ *est tel que pour tout* $1 \le k \le n$ $p_k(x)$ *possède un symétrique* y_k *dans* M_k*, alors* $(y_1,\dots,y_n)$ *est un symétrique pour* x *dans* $\prod_{k=1}^{n} M_k$.

iii) Pour tout n*-uplet de morphismes*

$$f_k \; : \; N \; \to \; M_k \,_{,1 \,\le\, k \,\le\, n} \, ,$$

il existe un unique morphisme

$$f \; : \; N \; \to \; \prod_{k=1}^{n} M_k \text{ tel que } \forall 1 \le k \le n, \; f_k \; = \; p_k \; \circ \; f \; .$$

iv) Dans le cas où il existe M *tel que* $\forall 1 \le k \le n, \; M_k \; = \; M$*, la bijection* $\phi \; : \; M^{[1;n]} \; \cong \; \prod_{k=1}^{n} M$ *définie par le point iv de la proposition II.7.25 est un isomorphisme, pour peu que* $M^{[1;n]}$ *soit muni de la structure définie par la proposition II.7.21.*

Définition II.7.29 (Structure produit) Avec les notations de la proposition II.7.28 la loi $*$ définie sur $\prod_{k=1}^{n} M_k$ comme au point i de la proposition II.7.28 est appelée *structure produit* ou *loi produit*.

II.8 . −Groupes, morphismes …

II.8.1 . −Groupe

Définition II.8.1.1 (Groupe) Un *groupe* est un *couple* $(G,*)$ (le plus souvent simplement noté G,) où G est un *ensemble* et $* \; : \; G \times G \; \to \; G$ est une *application* appelée *loi de composition* vérifiant :

Gr_1) Pour tout *triplet* (x,y,z) d'*éléments* de G,

$$(x * y) * z \; = \; x * (y * z) \; ,$$

on dit que la *loi interne* $*$ est *associative* .

Gr$_2$) Il existe un *élément* $e \in G$ appelé *élément neutre* de G tel que, pour tout $x \in G, x * e = e * x = x$.

Gr$_3$) Pour tout *élément* $x \in G$, il existe un *élément* $x' \in G$ appelé *symétrique* de x et tel que $x * x' = x' * x = e$.

Il revient au même de dire que $(G, *)$ est un *magma associatif* (cf. la définition II.7.9,) possédant un *élément neutre* (cf. le point i de la définition II.7.11,) et dans lequel tout *élément* possède un *symétrique* (cf. le point ii de la définition II.7.11.)

Les formulations « $(G, *)$ est un *groupe* » ou « $*$ munit G d'une *structure de groupe* » sont synonymes.

Exemple II.8.1.2 i) Il n'existe pas de *loi de composition* $*$ sur $\emptyset$ fasse de $(\emptyset, *)$ un *groupe* . L'axiome Gr$_2$ de la définition II.8.1.1 entraîne, en effet, qu'un *groupe* possède toujours au moins un *élément* c'est-à-dire n'est jamais vide.

b) On peut définir une unique loi de composition qui donne à l'ensemble $\{\emptyset\}$ à un *élément* une structure de *groupe* :

$$\emptyset * \emptyset := \emptyset .$$

c) **(Le *groupe* $\mathcal{S}(X)$)**
Un des premiers groupes qu'on peut introduire, au sens où sa définition ne nécessite guère plus que les premiers axiomes de la théorie des ensembles(cf. I.1.13,) est le *groupe* $\mathcal{S}(E)$ des *bijections* d'un ensemble E muni de la loi $\circ$(cf. l'exercice II.9.1.11.) C'est une partie du magma considéré dans l'exemple II.7.13, et précisément celle constituée des *éléments* qui ont un symétrique. Pour ne nécessiter que très peu de matériel pour être défini, ce *groupe* n'est cependant pas le plus aisé à étudier

d) **(Entiers modulo n)**
Pour tout entier $n > 1$, $\sim_n$ est la relation de *congruence modulo n sur* $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la *relation d'équivalence* définie par $a \sim_n b$ si $n|b-a$ pour a et b dans $\mathbb{Z}$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo n. La relation $\sim_n$ vérifie la propriété fondamentale suivante : si $a \sim_n a'$ et $b \sim_n b'$, alors $a + a' \sim_n b + b'$, (cf. la définition II.7.18.) Ceci permet de définir une *loi de composition interne* $+$ sur l'*ensemble* $\mathbb{Z}/n$ des classes modulo $\sim_n$, par $\overline{a} +_{\mathbb{Z}/n} \overline{b} = \overline{a+b}$.

Le *couple* $(\mathbb{Z}/n, +_{\mathbb{Z}/n})$ le plus souvent noté $(\mathbb{Z}/n, +)$ où même $\mathbb{Z}/n$ est un *groupe abélien* .

Remarque II.8.1.3 On pourrait même affaiblir les axiomes de la définition II.8.1.1, comme le montre l'exercice II.9.1.8.

Définition II.8.1.4 (Groupe abélien) Étant donné un *groupe* $(G, *)$, si pour tout *couple* (x, y) d'*éléments* de $G, x * y = y * x,$ on dira que G est *abélien* ou *commutatif* .

Dans ce cas on notera usuellement $+$ la *loi interne* et 0 l'*élément neutre* en référence au *groupe abélien* $(\mathbb{Z}, +)$

Un *groupe* n'étant rien de plus (ni de moins d'ailleurs) qu'un *magma associatif* possédant un *élément neutre* et dans lequel tout *élément* possède un *symétrique* ; la proposition II.7.14 vaut encore ici mutatis mutandis.

Proposition II.8.1.5 (Propriétés) *Soient* $(G, *)$ *un groupe* .

i) Si ϵ *et* ϵ' *sont des éléments neutres de* $(G, *)$ *alors* $\epsilon = \epsilon'$.

ii) Si y et z éléments de E sont des symétriques pour $x \in E$, $y = z$.

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.1.9.)*

Remarque II.8.1.6 On pourra donc parler de <u>L</u>'*élément neutre* d'un *groupe* et <u>du</u> *symétrique* d'un *élément* dans un *groupe* .

L'*élément neutre* est souvent noté 1 et même 0 dans le cas des *groupes abéliens* par analogie avec le *groupe* $(\mathbb{Z}, +)$. Le *symétrique* d'un *élément* x est usuellement noté x^{-1} et appelé *inverse* de x, voire $-x$ dans le cas d'un *groupe abélien* et appelé alors *opposé* de x.

De même la proposition II.7.21 a son pendant pour les *groupes* :

Proposition II.8.1.7 *Étant donnés un groupe $(G, *)$ et un ensemble E, l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi induite (cf. II.7.21,) est un groupe (abélien si G l'est.)*

C'est la seule loi sur G^E telle que pour tout $x \in E$, l'évaluation en x, $G^E \to G$, $f \mapsto f(x)$ soit un morphisme de groupes .

II.8.2 . −Morphisme

Définition II.8.2.1 (Morphisme de groupes) Étant donnés des *groupes*

$$(G, *) \text{ et } (H, \cdot),$$

un *morphisme de groupes* (ou *homomorphisme de groupes*) est une *application* $f : G \to H$ telle que pour tout *couple* (x, y) d'*éléments* de G,

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) .$$

On notera $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(G, H)$ si le contexte ne prête pas à confusion) l'*ensemble* des *morphismes* de G dans H.

Remarque II.8.2.2 On constate que dans la définition ci-dessus aucune condition supplémentaire n'est exigée par rapport à un *morphisme de magmas* (cf. II.7.2.)

On a l'exact analogue du lemme II.7.3 :

Lemme II.8.2.3 *i) Pour tout groupe $(G, *)$ l'identité (cf. le point a de l'exemple I.1.13.14,) Id_G est un morphisme du groupe G dans lui-même.*

ii) Pour $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ et $(K, *_K)$ des groupes , $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des morphismes le composé $g \circ f$ est un morphisme de groupes .

On peut donc donner une définition analogue à la définition II.7.4 dont on constate qu'elle correspond d'ailleurs formellement à la définition II.3.1 :

Définition II.8.2.4 Étant donnés deux *groupes* $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, un *morphisme* $f : G \to H$ est un *isomorphisme* s'il existe un *morphisme* $g : H \to G$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_G \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_H .$$

On notera $\mathrm{Isom}([,)Gr]GH$ (ou simplement $\mathrm{Isom}(G,h)$ si le contexte est clair) l'*ensemble des isomorphismes de groupes* de $(G, *)$ dans $(H, \cdot)$.

On a encore, san surprise puisqu'en fait l'axiomatique n'est pas vraiement différente, un analogue de la proposition II.7.6 :

Proposition II.8.2.5 *Étant donnés deux groupes $(G, *)$ et $(H, \cdot)$, une application $f : G \to H$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un morphisme bijectif .*

***Démonstration** : Il n'y a rien de plus à montrer que dans la démonstration de la proposition II.7.6.*

Exemple II.8.2.6 (Le morphisme $\mathcal{S}(u)$) Soit E et F deux ensembles. On rappelle (cf. le point c de l'exemple II.8.1.2 et l'exercice II.9.1.11,) que

$$(\mathcal{S}(E), \circ) \text{ (resp. } (\mathcal{S}(F), \circ)\text{)}$$

est le groupe des bijections de E (resp. F,) dans lui-même.

Soit $u : E \to F$ une bijection de E dans F. L'application

$$\mathcal{S}(u) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F) ,\ f \mapsto u \circ f \circ u^{-1}$$

est un *isomorphisme de groupes* (cf. l'exercice II.9.1.12.)

Des définitions analogues à la définition II.7.7 peuvent donc être données :

Des définitions analogues à la définition II.7.7 peuvent donc être données :

Définition II.8.2.7 Soit $(G, *)$ un *groupe* .

i) **(Endomorphisme)**
Un *morphisme* $f : G \to G$ de G dans lui-même est appelé *endomorphisme de groupes* ou simplement *endomorphisme* . On note $\mathrm{End}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{End}(G)$,) l'*ensemble des endomorphismes de groupes* de G.

ii) **(Automorphisme)**
Un *morphisme* $f : G \to G$ est un *automorphisme de groupes* (ou simplement *automorphisme*) si c'est à la fois un *isomorphisme de groupes* et un *endomorphisme de groupes* . Il revient au même, grâce à la proposition II.8.2.5, de dire que f est un *bijectif* . On note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gr}}(G)$ (ou simplement $\mathrm{Aut}(G)$) l'*ensemble des automorphismes de groupes* de G.

Exemple II.8.2.8 Pour un *groupe* G, l'*identité* Id_G est un *automorphisme* .

Proposition II.8.2.9 (Propriétés des morphismes) *Étant donné un morphisme de groupes*

$$f\ :\ (G,*)\ \to\ (H,\cdot)\ \text{avec}\ e_G(\text{resp. } e_H)\ \textit{l'élément neutre}\ \text{de}\ G(\text{resp. } H\ :)$$

i) $f(e_G)\ =\ e_H$;

Démonstration : *(cf. la question 1 de l'exercice II.9.1.10.)*

ii) pour tout $x\ \in\ G,$ *si* $y\ \in\ G$ *est son symétrique ,* $f(y)$ *est le symétrique de* $f(x)$ *dans* $H.$

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice II.9.1.10.)*

Notation II.8.2.10 ($\mathrm{Hom.}(\cdot,\cdot)$) Étant donnés deux *groupes* G et H on notera $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G,H)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(G,H)$ si le contexte est clair) l'*ensemble* des *morphismes de groupes* de G à valeurs dans H.

Proposition II.8.2.11 *Pour deux groupes abéliens* A *et* B, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(A,B)$ *est un sous-groupe commutatif du groupe* B^A *considéré à la proposition II.8.1.7.*

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice II.9.1.7.)*

II.8.3 . −Sous-*groupe*

Définition II.8.3.1 (Sous-groupe) Une partie H d'un *groupe* $(G,*)$ est un *sous-groupe* si la restriction de $*$ à $H\times H$ donne à H une structure de *groupe* .

Exemple II.8.3.2 Étant donné un *groupe* $(G,*)$ d'*élément neutre* ϵ, les *ensembles* $\{\epsilon\}$ et G lui-même sont des *sous-groupes* de G.

Remarque II.8.3.3 i) Il ne suffit pas pour que H soit un *sous-groupe* de G que H soit un sous-magma de G comme le montre la question 2 de l'exercice II.9.1.4. Il faut en effet exiger en plus que H possède un *élément neutre* (cf. II.8.1.1.Gr_2e)t que tout *élément* de H possède un *symétrique* (cf. II.8.1.1.Gr_3.)

ii) La définition de *sous-groupe* donnée ci-dessus n'est peut-être pas celle qu'on a été habitué à rencontrer qui est parfois plutôt la caractérisation donnée à la proposition II.8.3.5. On ne peut cependant se contenter de cette dernière en l'état puisqu'aux termes stricts de cet énoncé on ne saurait même pas qu'un *sous-groupe* est lui-même un *groupe* , ce qui avouons-le devra à tout le moins être établi, si l'on veut bénéficier d'une théorie utilisable. L'énoncé clef est en fait l'*équivalence* entre le point a et le point b.

Le lemme technique suivant est un ingrédient permettant d'établir l'*équivalence* entre les diverses caractérisations des *sous-groupes* .

Lemme II.8.3.4 *Soit* $(G, *)$ *un groupe d'élément neutre* e *et* H *un sous-groupe de* G *au sens de la définition II.8.3.1.*

i) Si f *est l'élément neutre de* H, $f = e$.

Démonstration : *Puisque* f *est l'élément neutre de* H,

$$\forall x \in H,\ f * x = x$$

et, en particulier $f * f = f$. *Mais* f *est toujours un élément de* G *dont l'élément neutre est* e ; *si bien que* $f * e = f$; *d'où il résulte* $f * f = f * e$. *En tant qu'élément de* G, *qui est un groupe ,* f *possède un inverse* g *vérifiant* $g * f = e$. *Il s'ensuit que :*

$$\begin{array}{rrcl} & f * f & = & f \\ \Rightarrow & f * f & = & f * e \\ \Rightarrow & g * f * f & = & g * f * e \\ \Rightarrow & (g * f) * f & = & (g * f) * e \\ \Rightarrow & e * f & = & e * e \\ \Rightarrow & f & = & e\ . \end{array}$$

L'argument donné ici est à rapprocher de celui donné dans la démonstration du point i de la proposition II.8.2.9 à la question 1 de l'exercice II.9.1.10. Il n'y a là rien de fortuit ni de mystérieux si on considère la caractérisation II.8.3.5.d des sous-groupes.

ii) Pour tout $x \in H$, *l'inverse* ${x^{-1}}_H$ *de* x *dans* H *est aussi son inverse dans* G.

Démonstration : *Tout* $x \in H$ *possède un inverse* ${x^{-1}}_H$ *tel que*

$$x *_H {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H *_H x = f = e$$

en utilisant le point i . Or x *et* ${x^{-1}}_H$ *étant en particulier des éléments de* G, *on peut encore écrire,*

$$x * {x^{-1}}_H = {x^{-1}}_H * x = e$$

c'est-à-dire que ${x^{-1}}_H$ *est l'inverse* x^{-1} *de* x *dans* G *puisque ce dernier est unique (cf. le point i de la proposition II.8.1.5.)*

Ici encore on peut rapprocher l'argument du point ii de la proposition II.8.2.9 et de la question 2 de l'exercice II.9.1.10 à la lumière du point d de la proposition II.8.3.5.

Proposition II.8.3.5 (Sous-Groupe) *Étant donnés un groupe* $(G, *)$ *et* $H \subset G$ *une partie de* G, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est un sous-groupe au sens de la définition II.8.3.1.*

b) H *est non vide et pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H, $x * y^{-1} \in H$.

c) H *est non vide, pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H, $x * y \in H$ *et pour tout* $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

d) La restriction

$$\mathrm{Id}_{G|H} \ : \ H \ \to \ G$$

de l'identité Id_G *à* H *est un morphisme de groupes . Ceci signifie implicitement que* H *possède une structure de groupe .*

Démonstration *:*

a ⇒ b *Si* H *est un sous-groupe de* G*, en particulier* H *est un groupe et il est donc non vide (cf. II.8.1.2.i.)*

Pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H*,* x *et* y^{-1} *sont encore des éléments de* H *(cf. II.8.3.4.ii.) Dire que la restriction* $*_H$ *de* $*$ *à* $H \times H$ *donne à* H *une structure de groupe signifie, en particulier, qu'elle est à valeurs dans* H*, ce qui prouve que*

$$x * y^{-1} \ = \ x *_H y^{-1} \ \in \ H \ .$$

b ⇒ a *] Réciproquement, supposons donnée une partie non vide* H *de* G *telle que pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* H*,* $x * y^{-1} \ \in \ H$*.*

Si H *est non vide il existe en particulier un élément* $x \ \in \ H$*, et, dès lors,* $\epsilon_G \ = \ x * x^{-1} \ \in \ H$*. Il est clair que* ϵ_G *est alors un élément neutre pour* H*.*

De plus, pour tout $x \ \in \ H$*, puisque* $\epsilon_G \ \in \ H$*,* $\epsilon_G * x^{-1} \ = \ x^{-1} \ \in \ H$ *c'est-à-dire que tout élément de* H *possède un inverse dans* H*.*

Enfin, pour tout couple (x, y) *d'éléments de* H*,* $y^{-1} \ \in \ H$ *et*

$$x * y \ = \ x * (y^{-1})^{-1} \ \in \ H$$

c'est-à-dire que la restriction de $*$ *à* $H \times H$ *est bien à valeurs dans* H*.*

La partie H *de* G *est donc bien un sous-groupe.*

Exemple II.8.3.6 (Automorphismes) Pour un *ensemble* E, on a introduit (cf. le point c de l'exemple II.8.1.2,) le *groupe* $\big(\mathcal{S}(E), \circ\big)$ des *bijections* de E dans lui-même. Dans le cas où G, est un *groupe* $\big(\mathcal{S}(G), \circ\big)$ reste bien évidemment un *groupe* ; mais on dispose alors de la notion d'*automorphisme* (cf. le point ii de la définition II.8.2.7,) qui sont des *bijections* particulières ; c'est-à-dire que $\mathrm{Aut}(G) \ \subset \ \mathcal{S}(G)$. C'est un bon exercice pour s'approprier la notion de *sous-groupe* que de montrer que $\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$ est un *sous-groupe* de $\big(\mathcal{S}(G), \circ\big)$ (cf. l'exercice II.9.1.19.)

Proposition II.8.3.7 *Soient* G *un groupe ,* H *et* K *des sous-groupes de* G*.*

i) $H \ \cap \ K$ *est un sous-groupe de* G*.*

Démonstration *: (cf. la question 1 de l'exercice II.9.1.13.)*

ii) Plus généralement, pour $\mathcal{H}$ *un ensemble non vide de sous-groupes de* G*,* $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ *est un sous-groupe de* G*.*

Démonstration *: (cf. la question 1 de l'exercice II.9.1.13.)*

iii) $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si*

$$H \subset K \text{ ou } K \subset H .$$

Démonstration : *(cf. la question 2 de l'exercice II.9.1.13.)*

iv) *Si* $\big(H_n\big)_{,n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de sous-groupes de* G *telle que*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{N},\ H_p \subset H_r \text{ et } H_q \subset H_r,$$

alors $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H$ *est un sous-groupe de* G.

Démonstration : *(cf. la question 3 de l'exercice II.9.1.13.)*

Proposition II.8.3.8 (Image directe/réciproque) *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes .*

i) ***(Image directe)***
Pour tout sous-groupe G' *de* G, *l'image directe de* G'

$$f(G') = \{y \in H\ ;\ \exists x \in G', \ ,\ y = f(x)\}$$

est un sous-groupe de H.

ii) ***(Image réciproque)***
Pour tout sous-groupe H' *de* H, *l'image d'réciproque*

$$f^{-1}(H') = \{x \in G\ ;\ f(x) \in H'\}$$

est un sous-groupe de G.

Définition II.8.3.9 (Noyau/image) Étant donné un *morphisme de groupes* $f : G \to H$, ϵ_H étant l'*élément neutre* de H, on appelle

i) (**Noyau**)
noyau de f le sous-*ensemble*

$$\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{\epsilon\}_H) = \{x \in G\ ;\ f(x) = \epsilon_H\}\ ,$$

ii) (**Image**)
image de f l'*ensemble*

$$\operatorname{Im} f := f(G) = \{y \in H\ ;\ \exists x \in G, \ ,\ y = f(x)\}\ .$$

Corollaire II.8.3.10 *Pour un morphisme de groupes* $f : G \to H$, *le noyau (resp. l'image) de* f *est un sous-groupe de* G *(resp.* H*.)*

Proposition II.8.3.11 *Un morphisme de groupes* $f : G \to H$ *est injectif (resp. surjectif) si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{\epsilon_G\}$ *(resp.* $\operatorname{Im} f = H$ *.)*

Définition II.8.3.12 Si $i : H \to G$ est un *morphisme de groupes* injectif, il induit un isomorphisme $H \cong \operatorname{Im} i$; si bien que H est isomorphe à un *sous-groupe* de G. On dira parfois même par abus de langage que H est lui-même un *sous-groupe* de G.

II.8.4 . −Partie génératrice

Dans tout ce paragraphe (II.8.4,) $(G, *)$ **est un *groupe* dont l*élément neutre* est noté** e **et dans lequel l'inverse (symétrique) de toute *élément*** x **est noté** x^{-1}.

Lemme II.8.4.1 *Étant donnée une partie* $S \subset G$, *notons* $\mathcal{G}_S$ *l'ensemble des sous-groupes de* G *contenant* S. *Alors* $< S > := \bigcap K \in \mathcal{G}_S K$ *est le plus petit élément (pour l'inclusion) de* $\mathcal{G}_S$.

Démonstration *: On remarque d'abord que* $\mathcal{G}_S$ *est non vide puisque* $G \in \mathcal{G}_S$. *Or pour tout* $K \in \mathcal{G}_S$, $S \subset K$, *donc*

$$S \subset < S > .$$

Il s'ensuit en particulier que

$$< S > \neq \emptyset .$$

Pour tout $(x, y) \in < S > \times < S >$, *par définition,*

$$\forall K \in \mathcal{G}_S,\ x \in K \text{ et } y \in K$$

il s'ensuit (cf. II.8.3.5,) que

$$\forall K \in \mathcal{G}_S,\ x * y^{-1} \in K$$

ce qui entraîne que $x * y^{-1} \in < S >$ *ce qui combiné au fait que* $< S >$ *est non vide assure que* $< S >$ *est un sous-groupe de* G.

Puisque, de plus $S \subset < S >$,

$$< S > \in \mathcal{G}_S .$$

Il est immédiat de montrer, et ce du fait même de la définition de $< S >$, *que*

$$\forall k \in \mathcal{G}_S,\ < S > \subset K$$

c'est-à-dire que $< S >$ *est un minorant de* $\mathcal{G}_S$ *qui, étant de plus élément de* $\mathcal{G}_S$ *est son plus petit élément .*

Définition II.8.4.2 Étant donné un *groupe* G et $S \subset G$ une *partie* de G :

i) (**sous-*groupe* engendré**)
le sous-*groupe* $< S >$ de G défini par le lemme II.8.4.1 s'appelle le *sous-groupe de* G *engendré par* S ;

ii) (**partie génératrice**)
si $G = < S >$, on dit que G est *engendré* par S ou que S est une *partie génératrice* de G.

Exemple II.8.4.3 a) Pour tout *groupe* G d'*élément neutre* e,

$$< \emptyset > = \{e\} .$$

b) Pour tout *groupe* $G, G = < G >$.

Définition II.8.4.4 (Groupe monogène) Pour un *groupe* G et $x \in G$, si $< \{x\} > = G$ on dit que G est *monogène*.

Notation II.8.4.5 Pour deux *sous-groupes* H et K d'un *groupe* G, on note

$$HK := < (H \cup K) >$$

qui est le plus petit sous-*groupe* contenant à la fois H et K. Si G est abélien la notation

$$H + K := < (H \cup K) >$$

sera plutôt utilisée.

Remarque II.8.4.6 On a vu au point iii de la proposition II.8.3.7 que $H \cup K$ n'est pas en général un sous-*groupe* de G et c'est HK qui « joue alors le rôle » de $H \cup K$. Si le lecteur a quelques souvenirs de son cours d'algèbre linéaire il remarquera que c'est précisément la situation rencontrée pour les espaces vectoriels, ce qui n'a d'ailleurs rien d'étonnant, ces derniers étant en particuliers des *groupes* abéliens.

Proposition II.8.4.7 *Étant donnés un groupe G et une partie S de G, on note (comme au lemme II.8.4.1,) $\mathcal{G}_S$ l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent S. Alors pour toute partie H G, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'ensemble H est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S :*

$$H = \bigcap_{K \in \mathcal{G}_S} K ;$$

b)

$$H \in \mathcal{G}_S \text{ et } \forall K \in \mathcal{G}_S,\ H \subset K$$

autrement dit H est le plus petit élément de $\mathcal{G}_S$;

c) *H est constitué des éléments $t_1 t_2 \ldots t_r$ avec $r \geq 1$ où un élément t_i est dans S ou a son inverse dans S.*

Démonstration : (cf. l'exercice II.9.1.14.)

II.8.5 . – Actions de groupe

Pour tout ensemble E, on rappelle qu'on note $\mathcal{S}(E)$ le groupe des bijections de E (cf. le point c de l'exemple II.8.1.2e)t pour toute bijection $f : E \to F$,

$$\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F) , u \mapsto f \circ u \circ f^{-1}$$

l'isomorphisme de groupes qui s'en déduit (cf. l'exemple II.8.2.6.)

Dans tout ce paragraphe (II.8.5,) $(G, *)$ est un groupe dont on notera e l'*élément neutre* .

Définition II.8.5.1 (Action de groupe) Étant donné un ensemble E et un groupe $(G, *)$ on dit que G *agit sur* (ou *opère sur*) E ou que E est muni d'une *action* de G, s'il existe un morphisme de groupe (cf. II.8.2.1,)

$$\phi : (G, *) \to (\mathcal{S}(E), \circ) .$$

On dira aussi que E est un *G-ensemble*.

Remarque II.8.5.2 Si l'on a une action $\phi : (G, *) \to (\mathcal{S}(E), \circ)$, cela signifie que

$$\forall g \in G,\ \forall h \in G,\ \phi(g * h) = \phi(g) \circ \phi(h)$$

et cela a pour conséquences que $\phi(e_G) = \mathrm{Id}_E$ (cf. II.8.2.9.i ;) et $\forall g \in G,\ \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ (cf. II.8.2.9.ii.)

Notation II.8.5.3 Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E il est usuel de noter

$$\forall g \in G,\ \forall x \in E,\ g \cdot x := \phi(g)(x) .$$

On a alors

$$\forall x \in E,\ e_G \cdot x = x \text{ et } \forall g \in G,\ \forall h \in G,\ (g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) .$$

Proposition II.8.5.4 (Définitions équivalentes) *On peut définir les actions de groupes de manière équivalente comme à la définition II.8.5.1 ou comme à la notation II.8.5.3. Plus précisément soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, et X un ensemble :*

i) Pour tout morphisme de groupes $\phi : G \to \mathcal{S}(X)$; on définit une loi externe

$$\cdot_\phi : G \times X \to X , (g, x) \mapsto g \cdot_\phi x := \phi(g)(x)$$

qui vérifie :

Act$_1$)

$$\forall x \in X,\ e \cdot_\phi x = x .$$

Act$_2$)

$$\forall (g, h, x) \in G \times H \times X,\ (g * h) \cdot_\phi x = g \cdot_\phi (h \cdot_\phi x) ;$$

ii) Réciproquement étant donnée une loi externe $\cdot : G \times X \to X$ *satisfaisant aux axiomes* Act_1 *et* Act_1 *du point i , on note*

$$\Phi^{\cdot} : G \to \mathcal{S}(X) , g \mapsto x \mapsto g \cdot x .$$

L'application $\phi^{\cdot}$ *est alors bien définie et c'est un morphisme de groupes .*

Démonstration : *Il faut d'abord bien vérifier que* $\phi^{\cdot}(g)$ *est une bijection de* X *dans lui-même. Or pour tout* $g \in G$, *et tout* $x \in X$,

$$\phi^{\cdot}(g^{-1})[\phi^{\cdot}(g)(x)] = g^{-1} \cdot (g \cdot x) ;$$

c'est-à-dire, puisqu'on a suposé que $\cdot$ *vérifie* Act_2

$$(g^{-1} * g) \cdot x = e \cdot x ;$$

c'est-à-dire puisqu'on a supposé Act_1, x ; *si bien que*

$$\phi^{\cdot}(g^{-1}) \circ \phi^{\cdot}(g) = \mathrm{Id}_X .$$

Il faut ensuite prouver que $\phi^{\cdot}$ *est bien un morphisme : Or*

$$\forall (g, h, x) \in G \times G \times X,\ \phi^{\cdot}(g*)(x) = (g * h) \cdot x$$

c'est-à-dire d'après l'axiome Act_2 *du point i*

$$g \cdot (h \cdot x) = \phi^{\cdot}(g)[\phi^{\cdot}(h)(x)] ;$$

c'est-à-dire que

$$\phi^{\cdot}(g * h) = \phi^{\cdot}(g) \circ \phi^{\cdot}(h) .$$

iii) Enfin les procédés i et ii sont inverses l'un de l'autre, au sens où, pour tout morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}(X)$ $\phi^{\cdot_\phi} = \phi$ *et pour toute loi externe* $morphisme \cdot G \times XX$ *vérifiant* Act_2 *et* Act_1, $\cdot_{\phi^{\cdot}} = \cdot$.

Démonstration : *C'est un exercice.*

Exemple II.8.5.5 a) Pour tout ensemble E, le groupe $\mathcal{S}(E)$ agit évidemment sur E, dans la mesure où

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(E)} : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$$

est un *morphisme de groupes* .

b) Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E par $\phi : G \to \mathcal{S}(E)$ tout morphisme $f : H \to G$ définit une action $\phi \circ f$ de H sur E.

En particulier si G agit sur E, tout sous-groupe H de G agit naturellement sur E à travers l'injection naturelle $H \hookrightarrow G$.

c) Si $f : E \to F$ est une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F, l'isomorphisme

$$\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(F)$$

défini à l'exemple II.8.2.6, associe à toute action $\phi : G \to \mathcal{S}(E)$ d'un groupe G sur E, une action

$$\mathcal{S}(f) \circ \phi : G \to \mathcal{S}(F)$$

et l'on a de manière évidente :

$$\forall (g, x) \in G \times E,\ f(g \cdot x) = g \cdot f(x) .$$

Les exemples ci-dessus sont en quelque sorte tautologiques et ne mettent pas en évidence daction de groupes arbitraires (autre que le groupe $\mathcal{S}(E)$.) Or un des intérêts de la notion d'action de groupe est précisément de permettre l'étude d'un certain nombre de propriétés de groupes arbitraires à travers la manière dont ils peuvent agir. Donnons donc quelques exemples plus concrets qui sont cependant très loins d'épuiser la question :

Exemple II.8.5.6 a) Pour un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* V, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ *i.e.* le groupe des applications linéaires bijectives de V dans lui-même agit sur V, puisque $\mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}(V)$.

Le groupe $\mathbb{K}^\times$ des *élément* s inversibles de $\mathbb{K}$ muni de la *multiplication* s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des homothéties bijectives et agit donc également sur V.

b) Étant donné un $\mathbb{K}$-espace affine A, le groupe des translations, (resp. le groupe des isométries si A est euclidien) agit sur A [6].

La proposition suivante constitue un moyen de construire de nouvelles actions de groupe lorrsqu'on dispose déjà d'une action sur un ensemble. C'est plus qu'un exemple et un procédé usuel pour construire des actions de groupe.

Proposition II.8.5.7 (Actions sur F^E) *Soient $(G, *, e)$ un groupe, E et F des ensembles. On rappelle (cf. I.1.13.13,) que F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F.*

i) Si F est un G-ensemble, i.e. il existe un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}(F)$, alors la loi externe

$$\cdot \,:\, G \times F^E \to F^E\,,\ (g,u) \mapsto g\cdot u := \phi(g)\circ u$$

est une action de G sur F^E.

***Démonstration** :*

Act$_1$

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in F^E,\quad e\cdot u &=& \phi(e)\circ u \\ &=& \mathrm{Id}_F \circ u \\ &=& u\,. \end{array}$$

Act$_2$

$$\begin{array}{rcl} \forall (g,h,u) \in G\times G\times F^E,\quad (g*h)\cdot u &=& \phi(g*h)\circ u \\ &=& \phi(g)\circ\phi(h)\circ u \\ &=& g\cdot[\phi(h)\circ u] \\ &=& g\cdot(h\cdot u)\,. \end{array}$$

ii) Si E est un G-ensemble, i.e. il existe un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}(E)$, alors la loi externe

$$\cdot \,:\, G \times F^E \to F^E\,,\ (g,u) \mapsto g\cdot u := u\circ\phi(g)^{-1} = u\circ\phi(g^{-1})$$

est une action de G sur F^E.

***Démonstration** :*

Act$_1$

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in F^E,\quad e\cdot u &=& u\circ\phi(e^{-1}) \\ &=& u\circ\phi(e) \\ &=& u\circ\mathrm{Id}_E \\ &=& u\,. \end{array}$$

6. On conseille de reconsidérer cet exemple à la lumière du cours de géométrie.

Act$_2$

$$\begin{array}{rcl}\forall (g,h,u)\in G\times G\times F^E,\quad (g*h)\cdot u & = & u\circ\phi((g*)^{-1})\\ & = & u\circ\phi(h^{-1}*g^{-1})\\ & = & u\circ\phi(h^{-1})\circ\phi(g^{-1})\\ & = & (h\cdot u)\circ\phi(g^{-1})\\ & = & g\cdot(h\cdot u)\ ..\end{array}$$

Définition II.8.5.8 (Applications invariantes/G-morphismes) Étant donnés un groupe G et deux ensembles E et F munis d'actions

$$\phi_E(\text{resp. }\phi_F)\ :\ G\ \to\ \mathcal{S}(E)(\text{resp. }\mathcal{S}(F))$$

de G, on dit qu'une application $f\ :\ E\ \to\ F$ de E dans F est *invariante* si

$$\forall g\in G,\ f\ \circ\phi_E(g)\ =\ \phi_F(g)\ \circ\ f$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall (g,x)\in G\times E,\ f(g\cdot_E x)\ =\ g\cdot_F f(x)\ .$$

Le terme de *morphisme de G-ensembles* est synonyme d'application invariante.

Exemple II.8.5.9 On a vu un exemple d'application invariante au point c de l'exemple II.8.5.5 mais c'est loin d'être le plus intéressant.

Toute application linéaire $V_1\ \to\ V_2$ est invariante pour l'action par homothétie (cf. II.8.5.6.a.)

II.8.6 . −Orbites

Proposition II.8.6.1 *Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E, la relation $\sim$ définie sur E par*

$$\forall x\in E,\ \forall y\in E,\ x\ \sim\ y\ \Leftrightarrow\ \exists g\ \in\ G,\ y\ =\ g\cdot x$$

est une relation d'équivalence (cf. I.1.13.11.v,) sur E.

Démonstration : *C'est un exercice.*

Définition II.8.6.2 (Orbite) Étant donnés un groupe G agissant sur un ensemble E, *i.e.* un G-ensemble E :

i) (**orbite**)

Les classes déquivalence pour la relation définie par la proposition II.8.6.1 sont appelées *orbites*. Plus précisément pour tout $x\ \in\ E$, la classe de x est appelée *orbite de x sous l'action* de G. On la note usuellement $O_G(x)$ (ou simplement $O(x)$ s'il n'en résulte aucune ambiguîté) et l'on a :

$$O(x)\ =\ \{g\cdot x\ ,\ g\ \in\ G\}\ .$$

ii) (**point fixe**)

Pour $x\ \in\ E$, de manière équivalente, $O(x)\ =\ \{x\}$, $O(x)$ est un singleton, $\forall g\in G,\ g\cdot x\ =\ x$. On dit alors que x est un *point fixe pour l'action* de G sur E. On dit aussi que l'orbite de x est *triviale*.

Exemple II.8.6.3 Pour laction de $\mathbb{K}^{\times}$ sur V par homothétie (cf. II.8.5.6.a,) les orbites sont, d'une part l'origine 0_V de V et d'autre part les droites de V privées de l'origine.

Proposition II.8.6.4 (Partition d'un G-ensemble) *Soit G un groupe et E un G-ensemble.*

*i) **(Relation d'équivalence)***
Grâce à la proposition II.8.6.1 on associe à l'action de G ou tout simplement au G-ensemble E, une relation d'équivalence $\sim$ dont les classes sont, par définition, les orbites de l'action. L'ensemble quotient $E/\sim$ (cf. I.3.11.3.5,) c'est-à-dire l'ensemble des classes (orbites ici) sera noté E/G.

Dans ii et iii on établit des propriétés de l'ensemble E/G défini ci-dessus qui ne sont rien d'autre que des traductions des propriétés correspondantes de l'ensemble $E/\sim$ établies au paragraphe I.3.11.3.

*ii) **(Surjection)***
L'application

$$\pi \ : \ E \ \to \ E/G \ , \ x \ \mapsto \ O(x)$$

est surjective.

***Démonstration** : C'est, en vertu du point i l'application $\pi \ : \ E \ \to \ E/\sim$ considérée à la proposition I.3.11.3.6.*

*iii) **(Partition)***
L'ensemble E/G est une partition (cf. la définition I.3.11.3.3,) de E :

$$E \ = \coprod_{O \ \in \ E/G} O \ .$$

***Démonstration** : C'est, toujours en vertu du point i une conséquence de la proposition I.3.11.3.4.*

Lemme II.8.6.5 *Étant donné un G-ensemble E, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il y a une seule orbite sous l'action de G ;

b) $\forall x \in E,\ O_G(x) \ = \ E$;

c) $\forall (x,y) \in E \times E,\ \exists g \ \in \ G,\ y \ = \ g \cdot x$;

d) $\forall x \in E,\ E \ = \ O_G(x)$.

***Démonstration** : (cf. la question 1 de l'exercice II.9.2.1.1.)*

Définition II.8.6.6 (Action transitive) Si un G-ensemble E vérifie les assertions équivalentes du lemme II.8.6.5, on dit que l'action de G sur E est *transitive* ou encore que G agit/opère *transitivement* sur E.

Exemple II.8.6.7 Si E est un G-ensemble, pour tout $x \ \in \ E$, G agit transitivement sur l'orbite $O(x)$ de x.

Proposition II.8.6.8 (Équation aux classes) *Soit G un groupe et E un G-ensemble. Si E est un ensemble fini alors :*

*i) **(Orbites)***
Les orbites sous l'action de G sont des ensembles finis.

***Démonstration** : Pour tout $x \ \in \ E$, l'orbite $O(x) \ \subset \ E$ est un sous-ensemble de E qui est fini ; $O(x)$ est donc fini.*

ii) ***(Nombre d'orbites)***
L'ensemble E/G des orbites est un ensemble fini ; autrement dit il y a un nombre fini d'orbites.

Démonstration *: Puisqu'on dispose (cf. le point ii de la proposition II.8.6.4,)*

$$\text{d'une application surjective } \pi \ : \ E \ \to \ E/G \ ,$$

si E est fini alors E/G aussi.

On a alors :

$$\#(E) \ = \ \sum_{O \ \in \ E/G} \#(O) \ ; \qquad \textit{II.8.6.8.1}$$

ce qui découle du point iii de la proposition II.8.6.4.

Définition II.8.6.9 (Équation aux classes) Soient G un groupe, E un ensemble fini muni d'une action de G, la formule II.8.6.8.1 s'appelle l'*équation aux classes* du G-ensemble E ou de l'action de G sur E.

II.8.7 . –Stabilisateur d'un *élément*

Proposition II.8.7.1 (Stabilisateur d'un *élément*) *Étant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble E, pour tout $x \ \in \ E$, l'ensemble :*

$$\mathrm{Stab}_G(x) \ := \ \{g \ \in \ G \ ; \ g \cdot x \ = \ x\} \qquad \textit{II.8.7.1.1}$$

est un sous-groupe de G.

Démonstration *: C'est un exercice (cf. la question 2 de l'exercice II.9.2.1.1 et le point a de la question 3 de l'exercice II.9.2.3 dans le cas particulier de l'action par conjugaison.)*

Définition II.8.7.2 (Stabilisateur) Étant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble E, pour tout $x \ \in \ E$, le sous-groupe $\mathrm{Stab}_G(x)$ défini en II.8.7.1.1 est appelé *stabilisateur* de x.

Proposition II.8.7.3 *Étant donné un G-ensemble E, pour tout $x \ \in \ E$, notons $\mathrm{Stab}_G(x)$ le stabilisateur de x pour l'action de G, et*

$$p \ : \ G \ \to \ O(x) \ , \ g \ \mapsto \ g \cdot x \ .$$

Alors :

i) L'ensemble des $p^{-1}(\{y\})$ pour $y \ \in \ O(x)$, forme une partition de G.

Démonstration *: (cf. la question 3 de l'exercice II.9.2.1.1.)*

ii) Pour tout $g \ \in \ G$,

$$p^{-1}(\{g \cdot x\}) \ = \ g * \mathrm{Stab}_G(x) \ = \ \{g * h \ , \ h \ \in \ \mathrm{Stab}_G(x)\} \ .$$

Démonstration *: Pour tout $g \ \in \ G$ et tout $h \ \in \ p^{-1}(\{g \cdot x\})$ si et seulement si $p(h) \ = \ g \cdot x$ i.e.*

$$h \cdot x \ = \ g \cdot x \ \Leftrightarrow \ (g^{-1} * h) \cdot x \ = \ x \ \Leftrightarrow \ g^{-1} * h \ \in \ \mathrm{Stab}_G(x) \ \Leftrightarrow \ h \ \in \ g * \mathrm{Stab}_G(x) \ .$$

Corollaire II.8.7.4 *Sous les hypothèses de la proposition II.8.7.3, si l'on suppose de plus que G est un groupe fini alors :*

$$\forall x \in E,\ \#(G) \ = \ \#(\mathrm{Stab}_G(x)) \cdot \#(O(x)) \ .$$

***Démonstration** : C'est une conséquence immédiate de la proposition II.8.7.3.*

Proposition II.8.7.5 *Soit E un G-ensemble. Pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$,*

$$\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) \ = \ g \ * \ \mathrm{Stab}_G(X) \ * \ g^{-1} \ := \ \{g * h * g^{-1} \ , \ h \ \in \ \mathrm{Stab}_G(x)\} \ .$$

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.2.2.)*

Pour tout $(x, g, h) \in E \times G \times G$, $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$ si et seulement si $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ si et seulement si

$$g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) \ = \ x \ \Leftrightarrow \ (g^{-1} * h * g) \ \cdot x \ = \ x \ \Leftrightarrow \ g^{-1} * h * g \ \in \ \mathrm{Stab}_G(x)$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathrm{Stab}_G(x)$ tel que $g^{-1} * h * g = k$ i.e. $h = g * k * g^{-1}$ c'est-à-dire finalement que $h \in g * \mathrm{Stab}_G(x) * g^{-1}$.

Les définitions qui suivent sont données pour compléter la présentation des actions de groupe mais il est probable qu'on en fera assez peu usage.

Définition II.8.7.6 Soit E un G-ensemble.

i) (**Action libre**)
On dit que l'action de G sur E est *libre* (ou encore que G agit/opère *librement*) si pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{Stab}_G(x) \ = \ \{e\} \ .$$

ii) (**Action fidèle**)
On dit que l'action de G sur E est *fidèle* (ou encore que G agit/opère *fidèlement*) si l'intersection de touts les stabilisateurs des *élément* s de E est $\{e\}$ ce qui équivaut à dire que le morphisme $G \to \mathcal{S}(E)$ définissant l'action est injectif.

iii) (**ACtion simplement transitive**)
Laction est *simplement transitive* si elle est libre et transitive (cf. II.8.6.6.)

II.8.8 . –Action par translation à gauche

Dans ce paragraphe $(G, *)$ est un groupe (noté seulement G si aucune confusion n'en résulte) et l'on note e son *élément* neutre.

Lemme II.8.8.1 *Soit $(G, *)$ un groupe. L'application de $G \times G$ dans G définie par $g \cdot x := g * x$ est une action de G sur lui-même.*

***Démonstration** : On constate d'abord que pour tout $g \in G$, l'application de G dans lui-même donée par $x \mapsto g * x$ est bien une bijection de G dans lui-même (i.e. un élément de $\mathcal{S}(G)$,) de bijection réciproque $x \mapsto g^{-1} * x$.*

En outre

$$\forall (g,h) \in G \times G,\ (g * h) \ \cdot \ x \ = \ (g * h) * x \ = \ g * (h * x) \ = \ g \ \cdot \ (h * x) \ = \ g \ \cdot \ (h \cdot x)$$

ce qui assure qu'on a bien une action.

Définition II.8.8.2 (Translation à gauche) Étant donné un groupe G, l'action de G sur lui-même définie par le lemme II.8.8.1 est appelée *action par translation à gauche*.

Il résulte du point b de l'exemple II.8.5.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par translation à gauche. Cette action de H sur G est encore appelée *action par translation à gauche de H sur G*.

Remarque II.8.8.3 Si $P \subset G$, est une partie de G (*i.e.*

$$P \in \mathcal{P}(G) \ \underline{\text{pas nécessairement un sous-groupe}}\ ,\ )$$

notons

$$\forall g \in G,\ g * P := \{g * x\ ,\ x \in P\}\ .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \mapsto g \cdot P := g * P$ est une action de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par translation à gauche. Elle induit encore une action par translation à gauche de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

Notation II.8.8.4 On a vu à la proposition II.8.6.1 que, dès que E est un G-ensemble, l'action de G sur E induit une relation d'équivalence $\sim$. Dans le cas de l'action de H sur G par translation à gauche on notera parfois $\sim_{H,g}$ cette relation. Elle prend une forme suffisamment particulière dans ce cas pour qu'on l'explicite :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (x,y) \in G \times G, & x & \sim_{H,g} & y \\
\Leftrightarrow & \exists h \in H,\ y & = & h \cdot x \\
\Leftrightarrow & y & = & h * x \\
\Leftrightarrow & y * x^{-1} & \in & H \\
\Leftrightarrow & x * y^{-1} & \in & H\ .
\end{array}$$

Remarque II.8.8.5 Soit $(G, *)$ un groupe.

i) L'application de $G \times G$ dans G définie par $g \cdot x := x * g$ est une *action à droite* de G sur lui-même. Elle est appelée *action par translation à droite*.

La notion d'action à droite ne sera pass développée ni utilisée dans ce qui suit. Disons simplement que la formule

$$(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

qui caractérise les actions à gauches est remplacée par $(g * h) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$.

ii) Il résulte du point b de l'exemple II.8.5.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par translation à droite. Cette action de H sur G est encore appelée *action par translation à droite de H sur G*.

iii) Si $P \subset G$, est une partie de G (*i.e.* $P \in \mathcal{P}(G)$ pas nécessairement un sous-groupe,) notons

$$\forall g \in G,\ P * g := \{x * g\ ,\ x \in P\}\ .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \mapsto g \cdot P := P * g$ est une action à droite de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par translation à droite. Elle induit encore une action par translation à droite de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

iv) On a vu à la proposition II.8.6.1 que, dès que E est un G-ensemble, l'action de G sur E induit une relation d'équivalence $\sim$. Dans le cas de l'action de H sur G par translation à droite on notera parfois $\sim_{H,d}$ cette relation. Elle prend une forme suffisamment particulière dans ce cas pour qu'on l'explicite :

$$\begin{array}{lrcl} \forall (x,y) \in G \times G, & x & \sim_{H,d} & y \\ \Leftrightarrow & \exists h \in H,\ y & = & h \cdot x \\ \Leftrightarrow & y & = & x * h \\ \Leftrightarrow & x^{-1} * y & \in & H \\ \Leftrightarrow & y^{-1} * x & \in & H\ . \end{array}$$

Définition II.8.8.6 (Classes à gauche/droite) Étant donnés un groupe G et un sous-groupe H de G, les *classes d'équivalence* pour la *relation* $\sim_{H,g}$, (cf. II.8.8.4,) qui sont aussi les orbites (cf. II.8.6.2.i,) pour l'action par translation à gauche, sont appelées *classes à gauche*. L'ensemble de ses classes est noté $G/\sim_{H,g}$.

On a une définition analogue de *classes à droite* en utilisant la relation $\sim_{H,d}$ (cf. II.8.8.5.iv,) dont l'ensemble est noté $G/\sim_{H,d}$.

Proposition II.8.8.7 *Soit G un groupe et H un sous-groupe de g. On considère l'action de H sur G par translation à gauche. Alors :*

i) Pour tout $x \in G$, l'application

$$p\ :\ H\ \to\ O(x)\ ,\ g\ \mapsto\ g \cdot x$$

définie comme dans la proposition II.8.7.3 est bijective.

Démonstration *: Pour tout $x \in G$, considérons l'application*

$$p\ :\ H\ \to\ O(x)\ ,\ g\ \mapsto\ g \cdot x$$

comme à la proposition II.8.7.3. Il résulte alors du point ii de la proposition II.8.7.3 que

$$\forall y \in O(x),\ p^{-1}(\{y\})\ \cong\ \mathrm{Stab}_H(x)\ .$$

Or $g \in \mathrm{Stab}_H(x)$ si et seulement si $g \cdot x = x$, si et seulement si $g * x = x$ si et seulement si $g = e$. Le sous-groupe $\mathrm{Stab}_H(x)$ de H est donc un singleton. Ainsi en va-t-il donc aussi de $p^{-1}(\{y\})$ c'est-à-dire que $p\ :\ H\ \to\ O(x)$ est bijective.

ii) H est l'orbite de l'élément neutre e et la seule qui soit un sous-groupe de G.

Démonstration *: En effet*

$$O(e)\ =\ \{h \cdot e\ ,\ h\ \in\ H\}\ =\ \{h * e\ ,\ h\ \in\ H\}\ =\ \{h\ \in\ H\}\ =\ H\ .$$

Pour $x \in G$, si $O(x)$ est un sous-groupe $e \in O(x)$ et par conséquent $O(x) = O(e)$.

iii) Il existe une bijection entre l'ensemble $G/\sim_{H,g}$ des classes à gauche et l'ensemble $G/\sim_{H,d}$ des classes à droite.

iv) Si G est fini, i.e. G est un ensemble fini alors il en est de même de H et de l'ensemble $G/\sim$ des orbites et l'on a :

$$\#(G)\ =\ \#(H) * \#(G/\sim)\ .$$

***Démonstration** : Puisque les orbites sous l'action de G sont des classes d'équivalence , elles réalisent une partition de G. Si G est fini, les orbites sont donc toutes des sous-ensembles finis ($H = O(e)$ en particulier) et en nombre fini i.e. $G/\sim$ est aussi un ensemble fini. En posant $\#(G/\sim) = k \in \mathbb{N}$, choisissons $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ des élément s de G tels que*

$$\forall (i,j) \in [1;k] \times [1;k],\ i \neq j \Rightarrow O(x_i) \cap O(x_j) = \emptyset$$

autrement dit un représentant par orbite. On a alors $G = \bigcap_{1\leq i \leq k} O(x_i)$ ce qui entraîne

$$\#(G) = \sum_{i=1}^{k} \#(O(x_i))\ .$$

Or il découle du point i que $\forall 1 \leq i \leq k,\ \#(O(x_i)) = \#(H)$ d'où il résulte finalement que

$$\#(G) = k * \#(H) = \#(G/\sim) * \#(H)\ .$$

Remarque II.8.8.8 Le point i de la proposition II.8.8.7 pourrait se reformuler en disant que l'action par translation à gauche (resp. à droite) est libre (cf. II.8.7.6.i.)

Définition II.8.8.9 (Indice d'un sous-*groupe*) Étant donnés un *groupe* G et un sous-*groupe* H de G, si l'*ensemble* $G/\sim_{H,g}$, est fini son cardinal, qui est aussi celui de $G/\sim_{H,d}$, est appelé *indice de H dans G.*

II.8.9 . –Action par conjugaison

Dans cette section $(G,*)$ (le plus souvent abrégé en G) est un groupe dont on note e l'*élément neutre* .

Lemme II.8.9.1 *Étant donné un groupe G, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est un automorphisme de groupe de G (cf. le point ii de la définition II.8.2.7.)*

***Démonstration** : Tout d'abord*

$$\forall (g,x,y) \in G \times G \times G,\ g * x * y * g^{-1} = g * x * g^{-1} * g * y * g^{-1}$$

si bien que $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est bien un morphisme de G dans luie-même (on pourrait dire un endomorphisme de G.)

Par ailleurs,

$$\forall (g,x) \in G \times G,\ (g^{-1}) * g * x * g^{-1} * (g^{-1})^{-1} = x$$

si bien que $x \mapsto (g^{-1}) * x * (g^{-1})^{-1}$ est l'application réciproque de $x \mapsto g * x * g^{-1}$ cette dernière étant donc bijective donc un isomorphisme et finalement un automorphisme (isomorphisme et endomorphisme.)

Lemme II.8.9.2 *L'application de $G \times G$ dans G donnée par $(g,x) \mapsto g \cdot x := g * x * g^{-1}$ définit une action (cf. la définition II.8.5.1,) de G sur lui-même.*

***Démonstration** : On a vu au lemme II.8.9.1 que $x \mapsto g * x * g^{-1}$ est un automorphisme de G donc en particulier une bijection de G sur lui-même i.e. un élément de $\mathcal{S}(G)$ (cf. II.8.1.2.c.)*

De plus

$$\begin{aligned}\forall (g,h,x) \in G \times G \times G,\quad (g*h) \cdot x &= g * h * x * g * h^{-1} \\ &= g * h * x * h^{-1} * g^{-1} \\ &= g \cdot (h * x * h^{-1}) \\ &= g \cdot (h \cdot x)\end{aligned}$$

ce qui prouve qu'on a bien défini une action.

Définition II.8.9.3 (Action par conjugaison) Soit G un groupe :

i) L'action de G sur lui-même définie par le lemme II.8.9.2 s'appelle *action par conjugaison* de G sur lui-même.

ii) Les orbites (cf. II.8.6.2.i,) pour l'action par conjugaison sont usuellement appelées *classes de conjugaison*.

iii) Deux élément appartenant à la même orbite, ou de manière équivalente, en relation par la relation $\sim$ (cf. la proposition II.8.6.1,) sont dits *conjugués*. Ainsi explicitement, $(x, y) \in G \times G$ sont conjugués s'il existe z (appartenant à G ou à un sous-groupe selon l'action considérée,) tel que $y = z * x * z^{-1}$.

iv) Il résulte du point b de l'exemple II.8.5.5 que tout sous-groupe H de G agit encore sur G à travers l'action de G sur lui-même par conjugaison. Cette action de H sur G est encore appelée *action par conjugaison de H sur G*.

Remarque II.8.9.4 Si $P \subset G$, est une partie de G,
(*i.e.* $P \in \mathcal{P}(G)$, pas nécessairement un sous-groupe,) notons

$$\forall g \in G,\ g * P * g^{-1} := \{g * x * g^{-1} \ ,\ x \in P\}\ .$$

Alors l'application $G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ définie par $(g, P) \mapsto g \cdot P := g * P * g^{-1}$ est une action de G sur l'ensemble de ses parties, qu'on apellera encore action par conjugaison. Elle induit encore une action par conjugaison de tout sous-groupe H de G sur $\mathcal{P}(G)$.

Proposition II.8.9.5 *Étant donné un groupe $(G, *)$ on note $\mathcal{G}$ l'ensemble de ses sous-groupes. Pour tout $g \in G$, et $H \in \mathcal{G}$ on note :*

$$g * H * g^{-1} := \{g * x * g^{-1} \ ,\ x \in H\}\ . \qquad \text{II.8.9.5.1}$$

Alors :

i) Pour tout $H \in \mathcal{G}$ $g * H * g^{-1}$ est un sous-groupe de G i.e. un élément de $\mathcal{G}$.

Démonstration *: Étant donné un sous-groupe H de G et $g \in G$, $g * H * g^{-1}$ n'est autre que l'image de H par l'application $x \mapsto g * x * g^{-1}$ dont on a montré au lemme II.8.9.1 que c'est un morphisme de groupe. L'ensemble $g * H * g^{-1}$ est donc un groupe.*

ii) L'application

$$G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}\ ,\ (g, H) \mapsto g * H * g^{-1}$$

est une action de G sur $\mathcal{G}$ qui sera encore apppelée action par conjugaison.

Démonstration *: Voir l'exercice II.9.2.1.2.*

II.8.10 . −Sous-*groupes* normaux

Dans toute cette section (II.8.10,) $(G,*)$ **est un *groupe* d'*élément neutre*** e.

Remarque II.8.10.0 (Classe de l'*élément neutre*) Si $(G,*,e)$ est un *groupe* et $\sim$ une relation compatible sur le magma $(G,*)$ (cf. la définition II.7.18,) alors la classe $\overline{e}$ de l'*élément neutre* ett un sous-*groupe* de G.

En effet, $e \in \overline{e}$; si bien que $\overline{e} \neq \emptyset$. De plus :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall (x,y) \in \overline{e}\times\overline{e}, & x\sim e, y\sim e & \text{et} & y^{-1}\sim y^{-1} \\
\Rightarrow & x\sim e & \wedge & e\sim y^{-1} \\
\Rightarrow & x\sim e & \wedge & y^{-1}\sim e \\
\Rightarrow & x*y^{-1} & \sim & e \\
\Rightarrow & x*y^{-1} & \in & \overline{e}\ ;
\end{array}$$

ce qui achève de prouver que $\overline{e}$ est un sous-*groupe* de G.

On va en revanche expliquer au long de ce paragraphe que cette condition n'est pas suffisante et qu'on va être amené à considérer une classe particulière de sous-*groupes* *i.e.* les *sous-groupes distingués* ou normaux.

Notation II.8.10.1 Pour tout sous-*groupe* H de G, on définit $\sim_{H,g}$ (resp. $\sim_{H,d}$) la relation binaire sur $G\times G$ par :

$$\begin{array}{c}
\forall x\in G,\ \forall y \in G,\ \big(x\sim_{H,d} y \Leftrightarrow x^{-1}*y \in H\big) \\
\big(\text{resp.}\quad \forall x\in G,\ \forall y \in G,\ \big(x\sim_{H,g} y \Leftrightarrow y*x^{-1} \in H\big)\quad\big)\ .
\end{array} \tag{II.8.10.1.1}$$

On notera encore, :

$$\forall x\in G,\ x*H := \{x*y\ ;\ y\in H\}\ \big(\text{resp. } H*x := \{y*x\ ;\ y\in H\}\ .\big) \tag{II.8.10.1.2}$$

On écrira parfois simplement xH (resp. Hx) pour $x*H$ (resp. $H*x$.)

Proposition II.8.10.2 *i) Les relations binaires définies II.8.10.1.1 sont des relations d'équivalence .*

Démonstration : *Montrons que la relation $\sim_{H,d}$ est une relation d'équivalence . Pour tout $x \in G$, $x^{-1}*x = e \in H$; car H est un sous-groupe de G, i.e. $x\sim_{H,d}x$ c'est-à-dire que la relation $\sim_{H,d}$ est réflexive.*

Par ailleurs :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x\in G,\ \forall y\in G,\ \big(& x & \sim_{H,d} & y \\
\Rightarrow & x^{-1}*y & \in & H \\
\Rightarrow & y^{-1}*x = (x^{-1}*y)^{-1} & \in & H \\
\Rightarrow & y & \sim_{H,d} & x\big)
\end{array}$$

la relation $\sim_{H,d}$ est donc symétrique.

Enfin :

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x\in G,\ \forall y\in G,\ \forall z \in G,\ \big(& x\sim_{H,d}y & \text{et} & y\sim_{H,d}z \\
\Rightarrow & x^{-1}*y \in H & \text{et} & y^{-1}*z \in H \\
\Rightarrow & x^{-1}*y*y^{-1}*z & \in & H \\
\Rightarrow & x^{-1}*z & \in & H \\
\Rightarrow & x & \sim_{H,d} & z\big)
\end{array}$$

c'est-à-dire que la relation $\sim_{H,d}$ est transitive.

Un argument analogue vaut également pour $\sim_{H,g}$.

ii) L'ensemble $G/\sim_{g,H}$ (resp. $G/\sim_{d,H}$) *des classes d'équivalence* pour la relation $\sim_{g,H}$ (resp. $\sim_{d,H}$) s'identifie à $\{x * H\ ;\ x \in G\}$, (resp. $\{H * x\ ;\ x \in G\}$.)

Plus précisément :

$$\forall x \in G,\ \mathrm{cl}_g(x) = \{y \in G\ ;\ x \sim_{g,H} y\} = x * H\ \big(\text{resp. } \mathrm{cl}_d(x) = \{y \in G\ ;\ x \sim_{d,H} y\} = H * x\ .\big)\ \ 1$$

Démonstration : Pour tout $x \in G$, un élément y de G appartient à la classe de x modulo $\sim_{H,d}$ si et seulement si

$$\big((x^{-1} * y \in H) \Leftrightarrow (\exists z \in H,\ (x^{-1} * y = z) \Leftrightarrow y \in x * H)\big)\ .$$

iii) Toute *classes d'équivalence* pour la *relation* $\sim_{g,H}$ (resp. $\sim_{d,H}$) est en *bijection* avec H.

Démonstration : Pour tout $x \in G$, *l'application*

$$G \to G\ ,\ z \mapsto x * z$$

induit par restriction une *application* $H \to x * H$ dont la *bijection* réciproque est

$$G \to G\ ,\ z \mapsto x^{-1} * z\ .$$

iv) L'application $x * H \mapsto H * x$ pour $x \in G$, induit une *bijection* de *l'ensemble* $G/\sim_{H,d}$ des classes selon $\sim_{H,d}$ dans *l'ensemble* $G/\sim_{H,g}$ des classes selon $\sim_{H,g}$.

Proposition II.8.10.3 (Sous-*groupe* normal) *Pour tout sous-groupe* $H \subset G$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) La relations $\sim_{H,d}$ est compatible à la *loi* de *groupe* (cf. la définition II.7.18,) i.e.

$$\forall (x, y, z, t) \in G \times G \times G \times G,\ \big(x \sim_{H,d} z \text{ et } y \sim_{H,d} t\big) \Rightarrow\ x * y \sim_{H,d} z * t\ .$$

b) La relations $\sim_{H,g}$ est compatible à la *loi* de *groupe* .

c) Les relations $\sim_{H,g}$ et $\sim_{H,d}$ sont égales.

d)

$$\forall x \in G,\ \big(x * H = H * x\big)\ .$$

e) $\forall x \in G,\ \big(H = x * H * x^{-1}\big)$.

f) $\forall x \in G,\ \big(x * H * x^{-1} \subset H\big)$.

Démonstration : *On montre l'équivalence f ⇔ b. Pour d'avantage de détails (cf. l'exercice II.9.1.15 :)*

Remarquons que, pour tout $y \in H$, $y \sim_{H,g} e$, *et que, pour tout* $x \in G$, $x \sim_{H,g} x$. *Il en résulte donc, si l'on suppose l'assertion b vérifiée, que pour tout* $y \in H$ *et tout* $x \in G$, $x * y \sim_{H,g} x$ *c'est-à-dire précisément* $x * y * x^{-1} \in H$. *L'assertion b entraîne donc l'assertion f.*

Réciproquement, étant donné un quadruplet (x, z, y, t) *d'éléments de* G, *si* $y \sim_{H,g} t$, $y * t^{-1} \in H$. *Si l'on suppose l'assertion f vérifiée,* $x * y * t^{-1} * x^{-1} \in H$. *Mais* $x \sim_{H,g} z$ *entraîne que* $x * z^{-1} \in H$; *ce qui entraîne, puisque* H *est un sous-groupe de* G, *que*

$$x * y * (z * t)^{-1} = x * y * t^{-1} * z^{-1} = x * y * t^{-1} * x^{-1} * x * z^{-1} \in H\ ;$$

c'est-à-dire que $x * y \sim_{H,g} z * t$. *On a donc montré que l'assertion f entraîne l'assertion b.*

Définition II.8.10.4 (Sous-*groupes* normaux/distingués) Un sous-*groupe* H de G est dit *normal* ou *distingué*, s'il vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition II.8.10.3.

Notation II.8.10.5 Le point c de la proposition II.8.10.3 autorise à noter, pour un *sous-groupe* distingué H de G, simplement $\sim_H$ indifféremment $\sim_{H,g}$ et $\sim_{H,d}$ qui sont égales. De plus il résulte du point b de la proposition II.8.10.3 (ou indifféremment du point a de la proposition II.8.10.3) que $\sim_H$ est compatible à la *loi* de *groupe* sur G (cf. II.7.18.) L'*ensemble* quotient

$$G/\sim_H = G/\sim_{H,d} = G/\sim_{H,g},$$

sera usuellement noté G/H et bénéficie de propriétés tout à fait intéressantes qui seront étudiées en détail dans la section II.8.11.

Définition II.8.10.6 Pour tout *sous-groupe distingué* H de G, on appellera *classes modulo H* ou *classes selon H* les *classes d'équivalence* pour la *relation* $\sim_H$. Cette dernière étant compatible, pour tout *couple* (α, β) de classes, tout x, x' dans α tout y, y' dans β, on a $x * y \sim_H x' * y'$ c'est-à-dire que $x * y$ et $x' * y'$ définissent la même classe selon H. On peut donc poser

$$\alpha * \beta = \overline{x} * \overline{y} := \overline{x * y} \qquad \text{II.8.10.6.1}$$

la classe de $x * y$ pour n'importe quel représentant x de α et n'importe quel représentant y de β.

On note désormais G/H, l'*ensemble* des classes selon H muni de la *loi de composition* définie ci-dessus.

Exemple II.8.10.7 a) Les *sous-groupes* $\{e\}$ et G de G sont toujours distingués dans G.

b) Si G est un *groupe abélien* ($(\mathbb{Z}, +)$ par exemple,) tout sous-*groupe* est distingué.

Proposition II.8.10.8 (Image réciproque/directe) *Pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$ (cf. II.8.2.1,) l'image réciproque $f^{-1}(L)$ de tout sous-groupe distingué L de H est un sous-groupe distingué de G.*

En particulier, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e_H\})$ *est un sous-groupe distingué de G.*

En revanche, il n'est pas vrai en général que l'image $f(K)$ d'un sous-groupe distingué K de G est un sous-groupe distingué de H. C'est cependant le cas si f est surjectif.

Démonstration : *(cf. l'exercice II.9.1.16.)*

Définition II.8.10.9 (Relation d'équivalence compatible) Si $\sim$ est une *relation d'équivalence* (cf. le point v de la définition I.1.13.11,) sur un *groupe* $(G, *)$, on dit que $\sim$ est *compatible* à la *structure de groupe* si pour tout quadruplet (x, x', y, y') d'*éléments* de G,

$$x \sim y \text{ et } x' \sim y' \Rightarrow xx' \sim yy' .$$

Ceci signifie en fait que la *relation d'équivalence* est *compatible* à la *structure de magma* (cf. la définition II.7.18.)

Proposition II.8.10.10 (Relations d'équivalence compatibles) *i) Une relation d'équivalence $\sim$ sur G est compatible si et seulement si pour tout $(x, y) \in G \times G$,*

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1} * y \sim e .$$

***Démonstration** : Si $\sim$ est une relation d'équivalence compatible sur G, comme $\sim$ est réflexive, pour tout $x \in G, x^{-1} \sim x^{-1}$. Comme $\sim$ est compatible, si $y \sim x$,*

$$x^{-1} * y \sim x^{-1} * x = e .$$

Réciproquement, si x et y dans G sont tels que $x^{-1} * y \sim e$, comme $x \sim x$ et que $\sim$ est compatible,

$$y = x * x^{-1} * y \sim x * e = x .$$

ii) La classe $\overline{e}$ de l'élément neutre e pour une relation d'équivalence compatible est un sous-groupe distingué de G.

***Démonstration** : Par définition même d'une classe d'équivalence , $e \in \overline{e}$. Si $x \in \overline{e}$, comme $x^{-1} \sim x^{-1}$, (par réflexivité de $\sim$,) $e = x^{-1} * x \sim x^{-1} * e = x^{-1}$, (par compatibilité;) i.e. $x^{-1} \in \overline{e}$. Enfin si $(x, y) \in \overline{e} \times \overline{e}, x * y \sim e * e = e$, (par compatibilité;) i.e. $x * y \in \overline{e}$. D'après la proposition II.8.3.5, $\overline{e}$ est donc un sous groupe de G.*

Pour tout $x \in \overline{e}$, et tout $y \in G$,

$$\begin{array}{rrcl} & x & \sim & e \\ \Rightarrow & y * x & \sim & y \\ \Rightarrow & y * x * y^{-1} & \sim & y * y^{-1} \\ \Rightarrow & y * x * y^{-1} & \sim & e \, ; \end{array}$$

c'est-à-dire que pour tout $y \in G, y * \overline{e} * y^{-1} \subset \overline{e}$; *i.e.* , d'après la caractérisation proposition II.8.10.3,point f, des *sous-groupes distingués* , $\overline{e}$ est un *sous-groupe distingué* de G.

iii) Étant donné un sous-groupe distingué H de G, la relation $\sim_H$ compatible définie ci-dessus est la seule relation d'équivalence compatible $\sim$ sur G telle que $\overline{e} = H$.

***Démonstration** : Il est clair que la classe de e selon $\sim_H$ pour tout sous-groupe distingué H de G s'identifie à H. L'unicité de $\sim_H$ découle alors du lemme plus général :*

Lemme II.8.10.11 *Étant donné un groupe G et deux relations d'équivalence $\sim_1$ et $\sim_2$ compatibles sur G, on note $\overline{x}_1$ (resp. $\overline{x}_2$) la classe d'un élément x de G selon $\sim_1$ (resp. $\sim_2$.)*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Les relations $\sim_1$ et $\sim_2$ sont égale c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in G \times G$,

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x \sim_2 y .$$

b) Pour tout $x \in G$

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_2 .$$

c) Il existe $g \in G$ tel que

$$\overline{g}_1 = \overline{g}_2 .$$

d)

$$\overline{e}_1 = \overline{e}_2 .$$

***Démonstration** :*

i) **(a ⇔ b)**
est pour ainsi dire tautologique.

ii) **(b ⇒ c)**
est immédiat.

iii) **(c ⇒ d)**
Soit donné $g \in G$, tel que $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$. Pour tout

$$\begin{array}{rrcl} & x & \in & \overline{e}_1 \\ \Rightarrow & x & \sim_1 & e \\ \Rightarrow & x * g & \sim_1 & g \\ \Rightarrow & x * g & \in & \overline{g}_1 \\ \Rightarrow & x * g & \in & \overline{g}_2 \\ \Rightarrow & x * g & \sim_2 & g \\ \Rightarrow & x * g * g^{-1} & \sim_2 & g * g^{-1} = e \\ \Rightarrow & x & \sim_2 & e\,. \end{array}$$

On vient donc de montrer que $\overline{e}_1 \subset \overline{e}_2$. Le raisonnement étant parfaitement symétrique, on peut montrer, de la même manière, l'inclusion réciproque.

iv) **(d ⇒ a)**
Pour tout $(x, y) \in G$, si $x \sim_1 y$, alors, d'après le point i de la proposition II.8.10.10

$$\begin{array}{rrcl} & x^{-1} * y & \sim_1 & e \\ \Rightarrow & x^{-1} * y & \in & \overline{e}_1 \\ \Rightarrow & x^{-1} * y & \in & \overline{e}_2 \\ \Rightarrow & x & \sim_2 & y\,. \end{array}$$

Le raisonnement étant évidemment symétrique, on montrerait, exactement de la même manière que si $x \sim_2 y$ alors $x \sim_1 y$; ce qui termine la preuve.

II.8.11 . –Groupe quotient, factorisation des morphismes, propriété universelle

Dans toute cette section (II.8.11,) $(G, *)$ est un *groupe* d'*élément neutre* e.

Proposition II.8.11.1 (Existence de quotients) *Pour $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe distingué , la relation $\sim_H$ est compatible à la loi $*$ si bien qu'il existe une unique structyure de groupe sur l'ensemble G/H des classes pour la relation $\sim_H$ telle que la surjection canonique $\pi : G \to G/H$ soit un morphisme de groupe . Alors l'élément neutre de G/H est $\overline{e} = H$ et l'inverse de tout élément $\overline{x}$ est $\overline{x^{-1}}$.*

***Démonstration** : On redonne ici un argument, cependant on pourait se contenter d'appliquer le point i du lemme II.7.19.*

i) S'il existe une structure de groupe † sur l'ensemble $G/\sim_H$ des classes d'équivalence selon $\sim_H$, telle que π est un morphisme, alors nécessairement, pour tout quadruplet (x, x', y, y') d'éléments de G tel que

$$x \sim_H x' \text{ et } y \sim_H y'\,,$$

$$\begin{aligned}\pi(x*y) &= \pi(x) \dagger \pi(y)\\ &= \pi(x') \dagger \pi(y')\\ &= \pi(x'*y')\ .\end{aligned}$$

Comme π est surjective, la structure $\dagger$ est nécessairement unique.

ii) Comme $\sim_H$ est compatible à $(G,*)$ (cf. II.8.10.3,)

$$\begin{aligned}\pi(x*y) &= \overline{x*y}\\ &= \overline{x'*y'}\\ &= \pi_H(x'*y')\ ;\end{aligned}$$

on peut donc poser, pour tout $(\overline{x},\overline{y}) \in G/\sim_H \times G/\sim_H$,

$$\overline{x} \dagger \overline{y} := \overline{u*v}$$

pour n'importe quel élément $u \in \overline{x}$ (resp. $v \in \overline{y}$;) ce qui prouve l'existence de la structure $\dagger$.

Définition II.8.11.2 (Groupe quotient) Le *groupe*

$$G/H \text{ ou même le } \textit{couple } \big(G/H, \pi : G \to G/H\big)$$

est appelé *groupe quotient*. On dit encore que l'*ensemble* $G/\sim_H$ est muni de la *structure quotient*. Le *morphisme de groupes* π est appelé la *surjection canonique* .

Exemple II.8.11.3 (Groupes quotients) Nous avons remarqué (cf. II.8.10.7.b,) que dans un *groupe abélien* , et en particulier dans $(\mathbb{Z},+)$, tout sous-*groupe* est distingué. De plus une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-*groupe* si et seulement s'il existe un entier $d \geq 0$ tel que $H = d\mathbb{Z}$.

On constate alors, que pour deux entiers x et y, $x \sim_H y$ si $y - x \in H$, c'est-à-dire si et seulement si $d|y-x$. La relation $\sim_H$ n'est autre, dans ce cas, que la relation de congruence modulo d.

Proposition II.8.11.4 (Factorisation des morphismespropriété universelle) *Pour tout morphisme de groupes $f : G \to K$ et tout sous-groupe distingué $H \subset G$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $H \subset \operatorname{Ker} f$.

b) Il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/H \to K$ tel que $\overline{f} \circ \pi = f$ (où π est la surjection canonique (cf. la définition II.8.11.2.))

De plus, $\overline{f}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si $H = \operatorname{Ker} f$, (rsp. f est surjectif.)

***Démonstration** :*

a $\Rightarrow$ b Unicité Le fait même qu'on demande que, pour tout $x \in G$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, assure tautologiquement l'unicité de $\overline{f}$.

Existence Pour tout x, x' dans G, si $x \sim_H x'$, $x * x'^{-1} \in H$ ce qui implique que $x * x'^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ si l'on suppose que $H \subset \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire que $f(x*x'^{-1}) = e_H$ ou encore que $f(x) = f(x')$. On peut donc définir $\overline{f}(\overline{x})$ par $f(x)$ pour n'importe quel représentant x de $\overline{x}$. Ceci assure donc l'existence de $\overline{f}$.

Morphisme Pour tout couple (α, β) d'éléments de G/H, tout $x \in \alpha$, tout $y \in \beta$, étant donné la définition de la loi de composition sur G/H (cf. II.8.10.6.1,)

$$\begin{aligned} \overline{f}(\alpha * \beta) &= \overline{f}(\overline{x * y}) \\ &= f(x * y) \\ &= f(x) *_H f(y) \\ &= \overline{f}(\alpha) *_H \overline{f}(\beta) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\overline{f}$ est un *morphisme de groupes* .

i)

Surjectivité Un élément $u \in H$ appartient à $\mathrm{Im}\,\overline{f}$ si et seulement s'il existe un élément $\overline{x} \in G/H$ tel que $\overline{f}(\overline{x}) = u$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $x \in G$ tel que $u = f(x)$. Autrement dit, $\mathrm{Im}\,\overline{f} = \mathrm{Im}\, f$; ce qui établit (cf. la proposition II.8.3.11,) que f est surjectif si et seulement si $\overline{f}$ l'est.

ii)

Injectivité Enfin, $\overline{f}$ est injective si et seulement si

$$\mathrm{Ker}\,\overline{f} = e_{G/H} = H$$

(cf. la proposition II.8.3.11.) Ceci signifie exactement que $\overline{f}(\overline{x}) = e_H$ si et seulement si $\overline{x} = H$, ou encore $f(x) = e_H$ si et seulement si $x \in H$ c'est-à-dire si et seulement si

$$H = \mathrm{Ker}\, f\ .$$

b ⇒ a est pour ainsi dire immédiat.

Corollaire II.8.11.5 Étant donné un *morphisme de groupes* $f : G \to K$ il existe un unique isomorphisme de *groupes*

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f \text{ tel que } f = \overline{f} \circ \pi$$

où $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ est la *surjection canonique* . En particulier si f est *surjectif*

$$\overline{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \cong K$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition II.8.11.4 à $H := \mathrm{Ker}\, f$.

Corollaire II.8.11.6 Étant donné un *morphisme* surjectif de *groupes* $p : G \to Q$, il existe un unique isomorphisme de *groupes*

$\phi : G/\mathrm{Ker}\, p \to Q$ tel que $p = \phi \circ \pi$ où $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\, p$ est la *surjection canonique* .

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire II.8.11.5 puisque $\mathrm{Im}\, p = Q$.

Proposition II.8.11.7 Étant donné un *groupe* $(G, *)$, les données suivantes sont équivalentes, au sens où la donnée de l'une d'entre elles permet de construire *canoniquement les autres* :

a) Un *sous-groupe distingué* K de G.

b) Une relation d'équivalence $\sim$ compatible sur G.

c) Un morphisme de groupes surjectif $p : G \to Q$.

***Démonstration** :*

i) On a vu, grâce à la proposition II.8.10.10, qu'à toute relation compatible $\sim$ on associe canoniquement un sous-groupe distingué $H := \overline{e}$ et que, réciproquement, à tout sous-groupe distingué H on associe une unique relation compatible telle que $\overline{e} = H$.

ii) On a vu également, grâce à la proposition II.8.11.1, qu'à tout sous-groupe distingué (ou de manière équivalente à toute relation d'équivalence compatible) on associe une surjection $\pi : G \to G/H$ qui est un morphisme de groupes .

iii) Réciproquement, à tout morphisme surjectif $p : G \to Q$, on peut associer le sous-groupe distingué $H := \operatorname{Ker} p$ (cf. II.8.10.8.)

Le corollaire II.8.11.6 établit qu'en fait, les procédés ii et iii sont "inverses" l'un de l'autre, en un certain sens.

La proposition suivante proposition II.8.11.8 étend au cas des *groupes* les constructions donées dans la proposition II.7.28.

Proposition II.8.11.8 *Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(G_k, *_k)_{,1 \leq k \leq n}$ des groupes*

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ p_k : \prod_{i=1}^{n} G_i \to G_k \text{ les projections}$$

(cf. II.7.25.ii,) Alors :

i) Il existe une unique loi de composition $*$ sur $\prod_{k=1}^{n} G_k$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$ p_k soit un morphisme de groupes ; la loi $*$ est donnée par

$$\forall\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, x_n)\big) \in \prod_{k=1}^{n} G_k \times \prod_{k=1}^{n} G_K,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) * (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 *_1 y_1, \ldots, x_n *_n y_n)\ .$$

ii) La loi $*$ étant définie sur $\prod_{k=1}^{n} G_K$ comme ci-dessus, si

a) pour tout $1 \leq k \leq n$ e_k est l'élément neutre de G_k, $(e_1, \ldots, e_n)$ est l'élément neutre pour $*$;

b) $x \in \prod_{k=1}^{n} G_k$ est tel que pour tout $1 \leq k \leq n$ $y_k \in G_k$ est le symétrique de $p_k(x)$, alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est le symétrique de x dans $\prod_{k=1}^{n} G_k$.

iii) Si pour tout $1 \leq k \leq n$ $(G_k, *_k)$ est un groupe abélien, $(\prod_{k=1}^{n} G_k, *)$ est un groupe abélien.

iv) Pour tout n-uplet de morphismes de groupes

$$f_k : H \to G_{k\ ,1 \leq k \leq n},$$

il existe un unique morphisme de groupe

$$f : H \to \prod_{k=1}^{n} G_k \text{ tel que } \forall 1 \leq k \leq n,\ f_k = p_k \circ f.$$

v) Dans le cas où il existe G tel que $\forall 1 \leq k \leq n,\ G_k = G$, la bijection $\phi : G^{[1;n]} \cong \prod_{k=1}^{n} G$ définie par le point iv de la proposition II.7.25 est un isomorphisme, pour peu que $G^{[1;n]}$ soit muni de la structure définie par la proposition II.7.21.

vi) Pour $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ des groupes d'élément neutre respectif ϵ_1 et ϵ_2, on définit les applications

$$i_1 : G_1 \to G_1 \times G_2,\ x \mapsto (x, \epsilon_2) \text{ et } i_2 : G_2 \to G_1 \times G_2,\ x \mapsto (\epsilon_1, x).$$

Alors :

a) les applications i_1 et i_2 sont des morphismes injectifs de groupes ;

b) $p_1 \circ i_1 = \mathrm{Id}_{G_1}$ et $p_2 \circ i_2 = \mathrm{Id}_{G_2}$;

c) $\mathrm{Ker}\, p_1 = \mathrm{Im}\, i_2$ et $\mathrm{Ker}\, p_2 = \mathrm{Im}\, i_1$.

Définition II.8.11.9 (Groupe produit) Avec les notations de la proposition II.8.11.8, la *loi* $*$ définie sur $\prod_{k=1}^{n} G_k$ comme au point i de la proposition II.8.11.8 est appelée *loi produit* et le *couple*

$$(\prod_{k=1}^{n} G_k, *)$$

groupe produit.

II.8.12 . –Groupes finis : théorème de LAGRANGE

Définition II.8.12.1 (Groupe fini) Un *groupe* $(G, *)$ est un *groupe fini* si G est un *ensemble fini*.

Exemple II.8.12.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le *groupe* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un *groupe fini* (cf. l'exercice II.9.1.21.)

Proposition II.8.12.3 (Sous-*groupe* d'un *groupe fini*) *Si $(G, *)$ est un groupe fini, une partie H de G munie de la loi de composition $*$ est un sous-groupe de G si et seulement si H est non-vide et pour tout $(x, y) \in H \times H$, $x * y \in H$.*

***Démonstration** : (cf. l'exercice II.9.1.17.)*

Proposition II.8.12.4 (Cardinal d'un sous-*groupe*) *Si $(G,*,e)$ est un groupe fini et H un sous-groupe de G, la relation d'équivalence $\sim_{H,g}$ (resp. $\sim_{H,d}$) étant définie comme à la notation II.8.8.4, (resp. remarque II.8.8.5,point iv,)*

$$\#(G) \ = \ \#(H) * \#\big(G/{\sim_{H,g}}\big) \ = \ \#(H) * \#\big(G/{\sim_{H,d}}\big)$$

d'où il résulte en particulier que $\#(H)|\#(G)$

Démonstration : *L'égalité*

$$\#(G) \ = \sum_{O \,\in\, G/\sim_{H,g}} \#(O)$$

qui découle de la partition de G en classes d'équivalence (cf. la proposition I.3.11.3.4,) peut être utilisée dans ce cadre. Notons alors que pour tout $O \in G/{\sim_{H,g}}$, il existe $x \in G$ tel que O soit la classe de x. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} O &= \{y \in G \,;\, x{\sim_{H,g}}y\} \\ &= \{y \in G \,;\, \exists h \in H,\ y = h*x\} \\ &= \{h*x \ , \ h \in H\} \ . \end{aligned}$$

Dès lors il est presqu'immédiat que l'application $G \to G$, $g \mapsto g*x$ définit une bijection de H dans O d'inverse $g \mapsto g*x^{-1}$; si bien que $\forall O \in G/{\sim_{H,g}}$, $\#(O) = \#(H)$; et l'on peut alors conclure.

Bien entendu, pour que la preuve soit tout à fait complète, il faudrait encore démontrer que $\#\big(G/{\sim_{H,d}}\big) = \#\big(G/{\sim_{H,g}}\big)$. Or la classe de tout élément $x \in G$ selon $\sim_{H,g}$ (resp. $\sim_{H,d}$,) est $\{h*x \ , \ hh \in H\}$ (resp. $\{x*h \ , \ hh \in H\}$,) qui ont même nombre d'éléments égal à $\#(H)$; ce qui permet de conclure.

Corollaire II.8.12.5 (Indice d'un sous-*groupe*) *Si G est un groupe fini et H un sous-groupe , le cardinal de G est le produit de l'indice de H dans G (cf. la définition II.8.8.9p)ar le cardinal de H.*

Corollaire II.8.12.6 (théorème de LAGRANGE) *Si G est un groupe fini pour tout sous-groupe H de G, le cardinal de H divise le cardinal de G.*

Corollaire II.8.12.7 (Noyau image) *Le corollaire II.8.12.5 ci-dessus et le corollaire II.8.11.5 on pour conséquence que, pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$, avec G groupe fini ,*

$$\#(G) \ = \ \#\big(\mathrm{Ker}\, f\big) * \#\big(\mathrm{Im}\, f\big) \ .$$

Proposition II.8.12.8 (Ordre d'un élément) *Étant donné un groupe $(G,*)$ pour tout $x \in G$:*

i) Le sous-groupe $<\{x\}>$ engendré par $\{x\}$ (cf. II.8.4.2,) de G est l'image du morphisme

$$\epsilon_x \ : \ \mathbb{Z} \to G \ , \ n \mapsto x^n$$

Démonstration : *(cf. l'exercice II.9.1.18.)*

ii) a) Soit le noyau de ϵ_x est réduit à $\{0\}$ au quel cas

$$<\{x\}> \cong \mathbb{Z}\,;$$

b) Soit il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker} \epsilon_X = d\mathbb{Z}$ et

$$< \{x\} > \cong \mathbb{Z}/\operatorname{Ker} \epsilon_x \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} .$$

***Démonstration** : Le noyau du morphisme ϵ_x est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ il existe donc $d \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} \epsilon_x = d\mathbb{Z}$. Or $d = 0$ si et seulement si ϵ_x est un morphisme injectif si et seulement si*

$$\mathbb{Z} \cong \operatorname{Im} \epsilon_x \cong < \{x\} >$$

ce qui correspond à la situation du point a.

Si $d \neq 0$, Il existe un unique isomorphisme

$$\overline{\epsilon}_x : \mathbb{Z}/\operatorname{Ker} \epsilon_x = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \operatorname{Im} \epsilon_x = < \{x\} > .$$

On peut en effet appliquer les résultats du paragraphe II.8.11 et en particulier la proposition II.8.11.4.

Définition II.8.12.9 (Ordre d'un élément) Pour $(G, *)$ un *groupe* et $x \in G$, avec les notations de la proposition II.8.12.8, si $< \{x\} > \cong \mathbb{Z}$, on dit que x est d'*ordre infini* sinon on dit que x est d'*ordre* d où d est l'entier défini de manière équivalente dans le point b du point ii de la proposition II.8.12.8 par $\operatorname{Ker} \epsilon_x = d\mathbb{Z}$ ou $d = \#(\operatorname{Im} \epsilon_x)$.

Remarque II.8.12.10 (Ordre d'un élément) Il est immédiat de vérifier que pour tout élément x d'un *groupe* G, l'ordre de x défini comme à la définition II.8.12.9, est le plus petit (aussibien au sens de la relation d'ordre que de la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$) entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$.

Proposition II.8.12.11 (Propriétés de l'ordre d'un *éléments*) *i) Soit $f : G \to h$ un morphisme de groupes et $x \in G$. Si x est d'ordre fini, $f(x)$ l'est aussi et l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.*

ii) Avec les notations du point i , si f est injectif, x et $f(x)$ ont même ordre.

iii) Dans un groupe g deux éléments conjugués (cf. II.8.9.3.iii,) ont même ordre.

Théorème II.8.12.12 (de LAGRANGE) *Pour G un groupe fini , l'ordre de tout élément x de G divise le cardinal de G.*

***Démonstration** : Remarquons d'abord que si G est fini, on ne peut se trouver dans la situation du point a du point ii de la proposition II.8.12.8 si bien que l''ordre d de x est bien un entier naturel. Or il résulte du point b du point ii de la proposition II.8.12.8 que*

$$d = \#(\operatorname{Im} \epsilon_x) = \#(< \{x\} >) .$$

Puisque $< \{x\} >$ est un sous-ghroupe de G, il suffit d'appliquer le corollaire II.8.12.6.

Définition II.8.12.13 (Groupe cyclique) Avec les notations de la proposition II.8.12.8,

i) si le *morphisme* ϵ_x est *surjectif* , autrement dit si

$$G = \operatorname{Im} \epsilon_x = < \tilde{s}x >,$$

on dit que G est *monogène* ;

ii) si de plus on est dans la situation du point b du point ii de la proposition II.8.12.8, auqel cas $G \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on dit que G est *cyclique* .

Corollaire II.8.12.14 (Groupe cyclique) *Un groupe est cyclique si et seulement s'il est monogène et fini.*

Corollaire II.8.12.15 (Groupe de cardinal premier) *Si G est un groupe fini de cardinal p premier, G est isomorphe (non canoniquement) à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ et donc commutatif (abélien).*

II.9 . −Exercices

II.9.1 . −Magmas, groupes

Exercice II.9.1.1 Faire les détails de la preuve de la proposition II.7.14.

Exercice II.9.1.2 Étant doné un morphisme $f : M \to N$, (de *magmas associatifs* ,) montrer que :

1) si ϵ est l'*élément neutre* de M son image $f(\epsilon)$ n'est pas nécessairement l'*élément neutre* de N ;

2) si y est le *symétrique* de x dans M, $f(y)$ n'est pas nécessairement le *symétrique* de $f(x)$ dans N.

Exercice II.9.1.3 Donner la preuve de la proposition II.7.21.

Exercice II.9.1.4 **1)** Compléter la preuve de la proposition II.7.17.

2) **a)** Si ϵ est un *élément neutre* de M est-il encore un *élément neutre* d'un sous-magma N ?

b) Si N possède un *élément neutre* η celui-ci est-il nécessairement celui de M ?

c) Si $x \in N$ possède un *symétrique* dans M celui-ci est-il aussi son *symétrique* dans N ?

d) Si $x \in N$ possède un *symétrique* dans N est-il aussi son *symétrique* dans M ?

Exercice II.9.1.5 Soit $(M, *)$ un magma associatif, d'*élément neutre* ϵ et N un sous-magma tel que $\epsilon \in N$. Montrer que :

1) ϵ est l'*élément neutre* de N.

2) si $x \in N$ a un inverse y dans N, c'est aussi son inverse dans M.

Exercice II.9.1.6 Faire la preuve de la proposition II.7.24.

Exercice II.9.1.7 **Soit X un ensemble. On munit l'ensemble A^X des applications de X dans A de la loi $(f, f') \mapsto ff'$ où $ff'(x) = f(x)f'(x)$ pour tout $x \in X$.**

1) Montrer que la loi définie ci-dessus est la seule pour laquelle, pour tout $x \in XX$, $f \mapsto f(x)$ est un morphisme.

2) Montrer que cette loi sur A^X est associative et que A^X est un groupe pour cette loi si A est un groupe, un groupe abélien si A est un groupe abélien.

3) Si A est un groupe, et X un autre groupe, montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, A)$ des homo*morphisme* s de groupes de X dans A est un sous-groupe de A^X, pourvu que A soit abélien.

Exercice II.9.1.8 (Affaiblissement des axiomes de groupe) Soit G un ensemble muni d'une loi associative notée $(G, *)$. On suppose qu'il existe un *élément neutre* à gauche e (c'est-à-dire que $e * x = x$ pour tout $x \in G$) et que tout élément admet un inverse à gauche (c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $y * x = e$.)

1) Montrer que l'inverse à gauche est aussi un inverse à droite *i.e.*

$$y * x = e \Rightarrow x * y = e .$$

Indication : *On pourra considérer l'inverse à gauche z de y et calculer* $e * (x * y) = (z * y) * (x * y)$.

2) Montrer que e est aussi un *élément neutre* à droite *i.e.*

$$\forall x \in G,\ x * e = x .$$

3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice II.9.1.9 (Unicité des éléments remarquables) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi associative.

1) (Élément neutre)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ celui-ci est unique.

2) (Symétrique)
Montrer que si $(E, *)$ possède un *élément neutre* ϵ, tout élément $x \in E$ possède au plus un symétrique.

Exercice II.9.1.10 (Morphismes de groupes) Soit

$$f : (G, *, \epsilon_G) \to (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un *morphisme de groupes* .

1) (Élément neutre)
Montrer que $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$.

2) (Symétrique)
Montrer que pour tout $x \in G$, si y est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$.

3) (Image)
Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de $(H, \cdot)$.

4) (Noyau)
Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

5) (Isomorphisme)
Montrer que si f est bijective et que g est son applications réciproque, alors g est un morphisme de groupe.

Exercice II.9.1.11 (Le groupe $\big(\mathcal{S}(E), \circ\big)$) Soit E un ensemble.

1) Vérifier que $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{S}(E)$.

2) Montrer qu'il existe un *élément neutre* pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$ et le caractériser.

3) Montrer finalement que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

Exercice II.9.1.12 (La bijection $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$) Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une bijection de E dans F dont on notera v la bijection réciproque *i.e.*

$$v : F \to E : v \circ u = \mathrm{Id}_E , u \circ v = \mathrm{Id}_F .$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \to (\mathcal{S}(F), \circ) , f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice II.9.1.13 (Sous-groupes) 1) (Intersection de deux sous-groupes)
Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

2) (Union de deux sous-groupes)
Étant donnés des sous-groupes H et K d'un groupe commutatif $(G, +)$, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Indication : *Montrer qu'il revient au même de démontrer que [$H \not\subset K$ et $H \cup K$ sous-groupe entraîne $K \subset H$] puis prouver cette dernière assertion.*

3) (Famille filtrante)
Faire la preuve du point iv de la proposition II.8.3.7.

Exercice II.9.1.14 (Sous-groupe engendré) Soient G un *groupe* , S une partie de G et H une autre partie de G.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'ensemble H est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

b) L'ensemble H est un sous-groupe de G contenant S et tel que, pour tout sous-groupe K de G contenant S, $H \subset K$.

c) H est constitué des éléments $s_1 s_2 \dots s_r$ avec $r \geq 1$ où un élément s_i est dans S ou a son inverse dans S.

Exercice II.9.1.15 (Caractérisation des sous-groupes distingués) Compléter la démonstration de la proposition II.8.10.3.

Exercice II.9.1.16 (Image réciproque/directe) Faire la preuve de la proposition II.8.10.8.

Exercice II.9.1.17 (Sous-groupe d'un groupe fini) Faire la démonstration de la proposition II.8.12.3 et comparer avec la proposition II.8.3.5.

Exercice II.9.1.18 Faire la preuve du point i de la proposition II.8.12.8.

Exercice II.9.1.19 (Groupe des automorphismes) Complétez la construction de l'exemple II.8.3.6.

Exercice II.9.1.20 On suppose que E est munie d'une relation d'équivalence $\sim$ et d'une loi

$$\cdot \ : \ E \times E \ \to \ E \, .$$

On suppose que $\cdot$ et $\sim$ sont *compatibles* c'est-à-dire que

$$\forall (x, y, z, t) \in E \times E \times E, \ \big(x \sim y \ \wedge \ z \sim t \ \Rightarrow x \cdot z \ \sim \ y \cdot t\big) \, .$$

On note $\pi \ : \ E \ \to \ E/\sim$ la *surjection canonique* .

1) Montrer qu'il existe une unique loi $\dagger \ : \ E/\sim \times E/\sim \to \ E/\sim$ tel que π soit un morphisme c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \big(\pi(x \cdot y) \ = \ \pi(x) \dagger \pi(y)\big) \, .$$

On parle alors de *structure quotient*.

2) Montrer que si $\cdot$ est associative, (resp. possède un *élément neutre*) (resp. est commutative) il en est de même de $\dagger$. Montrer que si $x \ \in \ E$ possède un symétrique y pour $\cdot$ alors $\pi(y)$ est le symétrique de $\pi(x)$ pour $\dagger$.

3) Donner des exemples déjà connus des constructions précédentes.

Exercice II.9.1.21 (Congruence modulo n) 1) Montrer que tout entier relatif divise 0 tandis que 0 ne divise que lui-même.

Pour tout entier naturel n on définit la *relation de congruence modulo n* sur $\mathbb{Z}$ par a congrue à b modulo n si n divise $b - a$ et l'on écrit

$$a \ \equiv \ b \, [n] \, .$$

2) Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence .

On notera $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des *classes d'équivalence* pour la relation de congruence modulo n, qu'on abrègera en *Classes de congruence modulo n*.

Pour tout $a \ \in \ \mathbb{Z}$, on notera $\pi_n(a)$ ou $\overline{a}$ la classe de a modulo n .

3) a) Montrer que $\pi_n \ : \ \mathbb{Z} \ \to \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une application surjective. On l'appelle usuellement *surjection canonique*.

b) Est-elle injective ?

4) Donner le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5) Un entier naturel n étant fixé, montrer que, pour tout quadruplet (a, b, c, d) d'entiers relatifs,

$$a \equiv c\,[n] \text{ et } b \equiv d\,[n] \Rightarrow a + b \equiv c + d\,[n] \; ;$$

c'est-à-dire que la relation de congruence et la loi d'addition $+$ sont compatibles

II.9.2 . −Action de groupe

II.9.2.1. −Quelques résultats du cours à démontrer

Exercice II.9.2.1.1 Quelques résultats du cours à propos des actions de groupe (cf. II.8.5)

1) Faire la démonstration du lemme II.8.6.5

2) Faire la démonstration de la proposition II.8.7.1.

3) Faire la démonstration du point i de la proposition II.8.7.3.

Exercice II.9.2.1.2 Faire la démonstration du point ii de la proposition II.8.9.5.

Exercice II.9.2.2 (Stabilisateur) Soit $(G, *)$ un groupe et E un ensemble muni d'une action de G notée $g \cdot x$ pour tout $(g, x) \in G \times E$.

Montrer que pour tout $(x, g) \in E \times G$, $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = g * \mathrm{Stab}_G(x) * g^{-1}$.

Exercice II.9.2.3 (Équation aux classes)

Soit $(G, *)$ un groupe dont on note e l'*élément neutre* .

Pour tout $(x, y) \in G \times G$, on dit que y est *conjugué à* x s'il existe $g \in G$ tel que $y = g^{-1} * x * g$. On notera $x \sim y$.

1) Montrer que la relation « est conjugué à » est une relation d'équivalence dite *relation de conjugaison* ce qui permettra de dire dorénavant x et y *sont conjugués*. On appellera *classe de conjugaison d'un élément* $x \in G$ et on notera $\overline{x}$ sa classe pour la relation de conjugaison.

2) On appelle *centre du groupe* G qu'on note $\mathcal{Z}(G)$ le sous-ensemble

$$\mathcal{Z}(G) := \{g \in G \; ; \; \forall h \in G,\; g * h = h * g\} \subset G \,.$$

a) Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un *sous-groupe distingué* de G.

b) À quellle condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{Z}(G)$ G est-il abélien ?

c) Caractériser les éléments de $\mathcal{Z}(G)$ à l'aide de leur classe de conjugaison.

d) Montrer que si $G/\mathcal{Z}(G)$ est monogène alors G est abélien.
Indication : *On pourra penser à écrire (en le justifiant bien entendu !) un élément $x \in G$ sous la forme*

$$x = z * g^n \ , \ z \in \mathcal{Z}(G) \ , \ \overline{g} \text{ générateur de } G/\mathcal{Z}(G) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

3) Pour tout $x \in G$, on appelle *stabilisateur de* x et on note $\mathrm{Stab}_G(x)$ l'ensemble

$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \ ; \ x = g^{-1} * x * g\} \subset G \ .$$

a) Montrer que, pour tout $x \in G$, $\mathrm{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe de G.

b) Quelle sous-groupe remarquable de G est contenu dans $\mathrm{Stab}_G(x)$ pour tout $x \in G$, Que vaut

$$\bigcap_{x \in G} \mathrm{Stab}_G(x) \ ?$$

Pour tout $x \in G$, tout $(y, z) \in G \times G$, on note $z \sim_x y$ si $y * z^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x)$.

c) Rappeler pourquoi $\sim_x$ est une relation d'équivalence.

d) Montrer que, pour tout $x \in G$, on a une bijection

$$G/\sim_x \cong \overline{x} \ .$$

e) En déduire que si G est fini

$$\forall x \in G, \ \#(G) = \#(\overline{x}) \cdot \#(\mathrm{Stab}_G(x)) \ .$$

4) Soit p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. on suppose désormais que $\#(G) = p^r$.

a) Montrer que si $r = 1$, *i.e.* $\#(G) = p$ G est cyclique et par conséquent abélien.
On suppose maintenant que $r \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

b) Quelles valeurs peut prendre $\#(\overline{x})$ pour $x \in G$?

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G,

$$\mathcal{C}_0 := \{c \in \mathcal{C} \ ; \ \#(c) = 1\} \text{ et } \mathcal{C}_\infty := \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0 \ .$$

c) Montrer que

$$\#(\mathcal{Z}(G)) = \#(G) - \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} \#(c)$$

et en déduire que $p | \#(\mathcal{Z}(G))$.

d) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq r$ tel que $\#(\mathcal{Z}(G)) = p^k$.

e) Déduire de ce qui précède que, si $\#(G) = p^2$, G est abélien.

II.9.3 . – Morphismes

Exercice II.9.3.1 (Morphismes) 1) (Identité)
Faire la démonstration du point i du lemme II.1.3.

2) (**Composé**)
Faire la démonstration du point ii du lemme II.1.3.

Exercice II.9.3.2 (Inverse) Faire la démonstration du lemme II.3.3.

Exercice II.9.3.3 (Isomorphismes) Compléter la démonstration de la proposition II.3.5.

Exercice II.9.3.4 (Groupe des automorphismes) Soit G un *graphe* (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* .)

1) Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G)$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G)$,) (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G)$,) est un *groupe* pour la *loi de composition* $\circ$.

2) Montrer que l'*application* $\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G)\big(\text{resp. } \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G),\big)\big(\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G),\big) & = & \mathcal{S}(\mathcal{V}(G)) \\ \phi & \mapsto & \mathcal{V}(\phi) \end{array}$
est un *morphisme de groupes* .

3) Étant donné un *graphe* (resp. un *graphe à involution* ,) (resp. un *graphe non-orienté* ,) H et $\phi \ : \ G \ \cong \ H$ un *isomorphisme de graphes* (resp. un *isomorphisme de graphes à involution* ,) (resp. un *isomorphisme de graphes non-orientés* ,) construire un *isomorphisme de groupes*

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(G) \ \cong \ \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}}(H) \ , \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(G) \ \cong \ \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{Inv}}}(H) \ , \ \big) \\ \big(\text{resp.} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(G) \ \cong \ \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(H) \ . \ \big) \end{array}$$

II.9.4 . – Sous-graphes

Exercice II.9.4.1 (Sous-graphes) Faire la démonstration de la proposition II.2.1.

Exercice II.9.4.2 (Sous-graphe) Faire la démonstration de la proposition II.2.3.

II.9.5 . –

Graphes finis simples non-orientés

Exercice II.9.5.1 (Chemins et cycles dans un graphe) Soit $G \ := \ \big(\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \varepsilon(G)\big)$ un *graphe fini* (non vide.) On note $\delta(G) \ := \ \min_{u \ \in \ \mathcal{V}(G)}\big(d_G(u)\big)$.

1) Montrer que G contient un *chemin* de *longueur* $\delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{P}_{\delta(G)}$.

2) Si $\delta(G) \ \geq \ 2$, montrer que G contient un *cycle* de *longueur* $> \delta(G)$ *i.e.* un *sous-graphe isomorphe* à $\mathbf{C}_\ell$, $\ell > \delta(G)$.

Exercice II.9.5.2 (Exemples de groupes d'automorphismes) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(\mathbf{I}_n)$ du *graphe isolé* à n *sommet* s.

2) Déterminer le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(\mathbf{K}_n)$ du *graphe complet à* n *sommets* .

Exercice II.9.5.3 (Automorphismes) 1) Déterminer le *groupe des automorphismes* du *graphe fini simple non-orienté* $\mathbf{P}_n$ pour $n \geq 2$.

2) (**Automorphismes de** $\mathbf{C}_4$)
On note $\Gamma := \mathrm{Aut}_{\mathbf{Gph}^{\mathbf{N-O}}}(\mathbf{C}_4)$ **le** ***groupe des automorphismes*** **du** ***cycle*** $\mathbf{C}_4$.

a) Montrer que l'*application* $\mathcal{V}$ qui à tout $\alpha = \big(\mathcal{V}(\alpha), \mathcal{E}(\alpha)\big) \in \Gamma$ associe $\mathcal{V}(\alpha)$ est un *morphisme de groupes* (cf. la définition II.8.2.1,) de Γ dans le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_4$.

b) Le *morphisme* $\mathcal{V}$ est-il *surjectif* ?

c) Est-il *injectif* ?

d) Déterminer Γ.