Travaux Dirigés
Introduction à l'optimisation

L3 INFO 2024-2025

1 L'optimisation à travers les graphes

EXERCICE 1.1

Une entreprise de construction mécanique envisage l'extension d'une usine de montage. Pour mener à bien cette opération sur le plan technique, il lui faut d'une part construire et équiper son nouvel atelier et d'autre part recruter et former un personnel nouveau pour préparer le démarrage de la production.

L'ensemble des étapes, leurs durées et les contraintes d'antériorité figurent dans le tableau ci-desous.

TACHES	NOMS	DUREE	CONTRAINTES
1	Construction de l'atelier	10	-
2	Achat/livraison des machines	8	-
3	Mise au point définitive	4	1,2
4	Modalités d'organisation du travail	5	-
5	Nombres de postes et types d'emplois	2	4,3
6	Recrutement du personnel	4	5
7	Formation préalable	8	4
8	Entraînement des machines	2	3,6,7

1. Construire un graphe (modélisant le problème ci-dessus) dont les sommets sont associés aux tâches, les arcs traduisant la relation de succession.
   On prendra toujours soin de bien définir le graphe de manière formelle.
2. Que représente un chemin dans ce graphe ?
3. Ce graphe est-il sans circuit ? (deux démonstrations : en une phrase de part la structure du graphe, au moyen d'un algorithme établi en cours).
4. Interpréter la notion de "racine" (que nous définirons à cette occasion) du graphe, d'"anti-racine".

EXERCICE 1.2

On considère un graphe $G = (X, U)$ représenté par sa matrice booléenne (d'adjacence) suivante :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	0	0	0	0	0	1	0
x_2	0	0	0	1	0	0	0	0
x_3	1	0	0	1	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0	0	1	0
x_5	1	0	0	0	0	0	0	1
x_6	0	1	1	0	1	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	1	0

1. Représenter le graphe à l'aide du dictionnaire (application multivoque) des suivants.
2. Ce graphe est-il sans circuit ? (décrire la méthode, l'algorithme employé(e)).
3. Montrer que x_6 est racine (décrire la méthode employée).
4. Dessiner le graphe associé.

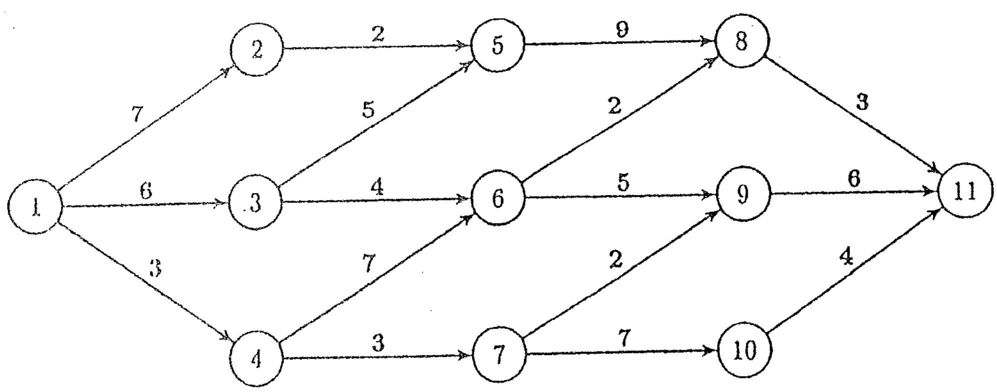
EXERCICE 1.3

On considère un graphe $G = (X, U)$ dont les sommets sont des nombres entiers :
$x_0 = 1, x_1 = 5, x_2 = 16, x_3 = 3, x_4 = 6, x_5 = 15, x_6 = 24, x_7 = 8, x_8 = 12$
et dont les arcs sont définis par la relation binaires suivante :
$(x_i, x_j) \in U \iff x_i$ est un diviseur de x_j et $x_i \neq x_j$.
G est un graphe sans boucle.

1. Donner le tableau des précédents du graphe G.
2. Le graphe G a-t-il des circuits ? (justifier la réponse).
3. Le graphe G peut-il avoir plusieurs racines ?

EXERCICE 1.4

Soit $G = (X, U)$ le graphe valué suivant :



1. Montrer que G est sans circuit.

2. Dans chacun des trois cas suivants, déterminer un chemin de valeur optimale de 1 vers 11.Préalablement, on décrira précisément un algorithme approprié à chaque cas (on notera λ_i la valeur d'un chemin optimal du sommet 1 au sommet i et v_{ij} la valuation associée à l'arc (i, j).

   (a) Les valuations sur les arcs représentent des distances (exprimées en km) et l'on s'intéresse à un chemin de distance minimale.

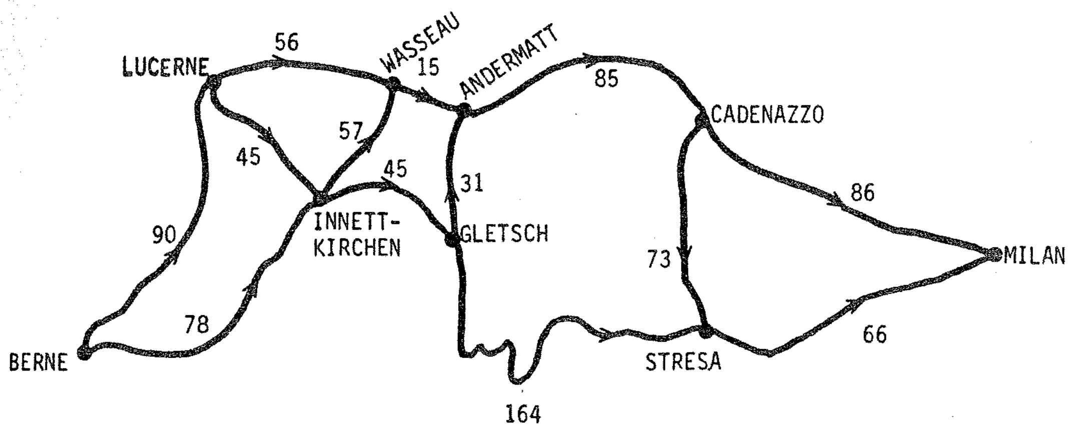
   (b) les valuations sur les arcs représentent des capacités (exprimées en kW) et l'on s'intéresse à un chemin de capacité maximale.

   (c) les valuations sur les arcs représentent des probabilités de la fiabilité de la connection (exprimées en chances sur 10) et l'on s'intéresse à un chemin de fiabilité maximale (on supposera que les fiabilités de chaque ligne sont indépendantes).

EXERCICE 1.5 : Il n'y a plus d'Alpes

(*) IL N'Y A PLUS D'ALPES

Une entreprise de transport SUISSEXPORT, dont le siège est situé à BERNE doit effectuer de fréquentes livraisons à MILAN, en dehors de la période hivernale.
Ses véhicules doivent donc traverser le massif des Alpes ; leur gabarit interdit l'usage des tunnels ferroviaires (Simplon, Saint-Gothard, Lötschberg, etc..) qui, sinon, faciliteraient le voyage.
Vus la fréquence et le coût de ces livraisons, l'entreprise désire déterminer l'itinéraire le plus court de BERNE à MILAN.



On a orienté les tronçons de route et porté les distances en kilomètres.
Tracer un graphe : chaque ville sera désignée par son initiale, chaque arc sera valué par la distance correspondante. Résoudre à l'aide de l'algorithme de DANTZIG.

EXERCICE 1.6 : Combine sur les cabines (1ere modélisation)

Une société de conception de réseaux de télécommunication vient de signer un contrat d'équipement en cabines téléphoniques publiques avec un pays de l'Europe de l'Est. Le plan d'équipement dure 6 mois et consiste à installer chaque mois i un nombre b_i de cabines ($i = 1, ..., 6$). Les cabines sont importées d'un pays d'Asie du Sud-Est

i	1	2	3	4	5	6
b_i	200	200	300	700	1000	200

et stockées dans un entrepôt central avant d'être installées. L'approvisionnement du stock s'effectue en début de mois, la quantité approvisionnée pouvant correspondre à l'installation de plusieurs mois. Le stock final au terme du plan doit être nul.

Le directeur des achats, précisant que chaque approvisionnement engendre des frais fixes d'un montant $a = 2000$ euros (quelle que soit la quantité commandée), préfèrerait tout approvisionner en début de mois 1.

Le directeur financier, lui, voudrait limiter les stocks qui génèrent des coûts (entretien, location de containers, risque de détérioration, immobilisation,...) et propose d'approvisionner chaque début de mois la quantité à installer. Il a établi que chaque article en stock de début de mois coûte $s = 2$ euros.

Le directeur général souhaite déterminer une politique d'approvisionnement qui minimise la somme des deux coûts (approvisionnement + stock).

Remarque : On notera qu'il n'est pas nécessaire de comptabiliser lors du mois i un coût de stockage pour les cabines à installer durant ce même mois i ($i = 1, ..., 6$).

1. Justifier la remarque précédente.
2. Quel est le coût des politiques préconisées respectivement par le directeur des achats et le directeur financier ?

   Pour déterminer une politique optimale, on propose deux modélisations possibles. Une première, à l'aide d'un graphe est traitée ici. Une seconde modélisation par programmation linéaire est proposée dans la partie 2 de cette plaquette de TD. Les intérêts respectifs de chacune de ces modélisations seront établis.

   Modélisation à l'aide d'un graphe.

   Soit $G = (X, U)$ un graphe où $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'existence d'un arc $(i, i + k)$ inique que l'on peut approvisionner et stocker en début de mois $i + 1$ les cabines nécessaires aux installations des mois $i + 1, i + 2, ..., i + k$.
3. Que représente un chemin de 0 à 6 dans le graphe ainsi construit ? Que va-t-on chercher dans G ?
4. *Valuation des arcs.* Soit $v(i, i + k)$ la valuation de l'arc $(i, i + k)$.
   (a) Que valent $v(0, 1)$, $v(0, 2)$, $v(0, 3)$?
   (b) Etablir une relation entre $v(i, i + k)$ et $v(i, i + k - 1)$ pour $k > 1$.
   (c) En déduire qu'il est inutile de tracer un arc $(i, i + k)$ lorsque $(k - 1) \times s \times b_{i+k} > a$.
5. Construire le graphe G en exploitant les résultats de la question précédente.
6. Donner une politique optimale d'approvisionnement. Commenter cette politique d'un point de vue économique.

2 L'optimisation à travers la programmation linéaire continue

EXERCICE 2.1

1. Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2.
   Chacun de ces produits demande, pour so usinage, des heures de fabrications sur les machines (ou dans les ateliers) A B C D E comme indiqué dans le tableau suivant : Les marges brutes de chaque produit P_1 et P_2 sont respectivement :

	A	B	C	D	E
P_1	0	1,5	2	3	3
P_2	3	4	3	2	0
Disponibilité totale de chaque machine	39	60	57	70	57

   $M_1 = 170$ euros et $M_2 = 320$ euros.

   (a) Ecrire le programme linéaire correspondant ;

   (b) Résoudre graphiquement le problème.

2. Les produits utilisent trois fournitures F_1, F_2, F_3 dans les conditions indiquées ci-dessous :

	F_1	F_2	F_3
P_1	0	12	8
P_2	5	36	0
Unités	Kg	m^3	m^2
Stock dispo.	55	432	136

   (a) Ecrire le programme linéaire correspondant ;

   (b) Eliminer les contraintes redondantes.

EXERCICE 2.2

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour le bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22 pour cents de protéines et de 3.6 pour cents de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenues, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sesame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

1. On notera x_j $(j = 1, 2, 3)$ la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment.
   Modéliser le problème à l'aide de ces variables de décision.
2. Ne peut-on pas réduire la taille du problème ?.
3. Résoudre alors le problème graphiquement.

Produit brut	Orge	Arachides	Sesame	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisse	2%	2%	10%	3.6%
Coût par tonne	25	41	39	

EXERCICE 2.3

Le stock de planches d'une scierie est constitué de planches de 70 cm de longueur. La scierie doit satisfaire une commande de 100 planches de 22 cm de longueur, 125 planches de 20 cm, 80 planches de 12 cm. Toutes les largeurs sont identiques.

1. Enumérer les différentes découpes possibles.
2. On numérote toutes les possibilités par $j = 1, ...n$. Soit $x_j$le nombre de planches qui seront découpées suivant la découpe j.
   Ecrire le problème permettant de satisfaire la demande tout en minimisant le gaspillage.
   (N.B. toute planche, même de la dimension demandée, mais produite en trop, est également un gaspillage).
3. Démontrer que l'objectif est équivalent à Min $70(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.
   Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2.4

Un fabriquant désire produire 100 kg d'une préparation de base pour crème glacée. Cette préparation doit contenir 21,5kg de matières grasses, 21kg de sucre, 1,2kg d'oeuf et 56,3kg d'eau. Les ingrédients dont il dispose figurent en tête des colonnes du tableau ci-dessous ; les constituants figurent en ligne. Ce tableau précise également les pourcentages (en poids) de chaque constituant dans chaque ingrédient ainsi que le coût, au kg, de chaque ingrédient.

	Crème	Jaune d'oeuf frais	lait entier en poudre	jaune d'oeuf surgelé	sirop de sucre	eau
Matières grasses	40	50	12	30		
Sucre				14	70	
Oeuf		40		40		
Eau	60	10	88	16	30	100
Coût en kg	3 euros	4 euros	1 euro	2 euros	0,8 euros	0,0 euro

1. Le fabriquant désire déterminer la composition du mélange de coût minimal. Ecrire le programme linéaire correspondant à ce problème, sans le résoudre.
2. Jusqu'à présent, le fabriquant produisait le mélange suivant :

   - CREME : 50 kg
   - JAUNE D OEUF FRAIS : 3 kg
   - SIROP : 30 kg
   - EAU : 17 kg

   Quel est le coût de ce mélange ? Peut-on dresser le tableau du simplexe associé à cette solution ? Si oui, le faire.
3. Quelle est la composition du mélange de coût minimal ?
4. Par suite de fluctuations économiques les prix de la crème et du jaune d'oeuf frais passent à 4 et 7 euros respectivement.
   Le mélange déterminé à la question 3 est-il toujours optimal ?

EXERCICE 2.5

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles :
- l'article A_1 à la cadence de 35 objets à l'heure,
- l'article A_2 à la cadence de 45 objets à l'heure,
- l'article A_3 à la cadence de 20 objets à l'heure.

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois.

Le bénéfice unitaire pour l'article A_1 est de 60 euros par objet, pour A_2 de 40 euros, pour A_3 de 80 euros.

Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes ; on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4900 objets du type A_1, ni plus de 5400 objets de type A_2, ni plus de 2000 objets de type A_3.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation ; une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission ; chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un objet du type A_1 prend 4 minutes, du type A_2 3 minutes, du type A_3 2 minutes.

1. Montrer que l'une des contraintes est redondante (c'est-à-dire qu'elle est impliquée par une ou plusieurs autres). Interpréter géométriquement cette redondance.
2. Classer alors les produits par bénéfices horaires décroissants et faire une résolution économique de ce problème.
3. Vérifier le résultat précédent en utilisant l'algorithme des tableaux du simplexe.

EXERCICE 2.6

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode des tableaux du simplexe.
2. Résoudre graphiquement.

EXERCICE 2.7

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P_2)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_5 = 19 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Montrer que la solution définie par $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 1, 0, 3)$est une solution de base réalisable pour (P_2).
2. Exprimer chacune des variables de base et la fonction économique en fonction des variables hors base :
   - de façon analytique, puis
   - en utilisant l'inverse de la matrice de base.

3. Donner le tableau du simplexe correspond à cette solution de base.
4. La solution de base obtenue est-elle optimale ? Sinon déterminer la solution optimale.

EXERCICE 2.8
Soit le programme linéaire suivant :

$$(P_3)\left\{\begin{array}{ll} \max\ z = x_1 + 2x_2 & \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + \geq 6 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Résoudre le problème à l'aide de la méthode en deux phases.
2. Effectuer une résolution graphique.

EXERCICE 2.9
Soit le programme linéaire suivant :

$$(P_4)\left\{\begin{array}{ll} \max\ z = x_1 + 2x_2 & \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Résoudre le problème à l'aide de la méthode des tableaux du simplex.
2. Effectuer une résolution graphique.

EXERCICE 2.10
Soit le programme linéaire suivant :

$$(P_5)\left\{\begin{array}{ll} \max\ z = 14x_1 + 10x_2 & \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Résoudre le problème à l'aide de la méthode des tableaux du simplex.
2. Montrer qu'il existe une solution réalisable de base et une seule équivalente à celle trouvée à la 1ere question.

EXERCICE 2.11 : Combine sur les cabines (2eme modélisation)
Une société de conception de réseaux de télécommunication vient de signer un contrat d'équipement en cabines téléphoniques publiques avec un pays de l'Europe de l'Est. Le plan d'équipement dure 6 mois et consiste à installer chaque mois i un nombre b_i de cabines ($i = 1, ..., 6$). Les cabines sont importées d'un pays d'Asie du Sud-Est et stockées dans un entrepôt central avant d'être installées. L'approvisionnement du stock s'effectue en début de mois, la quantité approvisionnée pouvant correspondre à l'installation de plusieurs mois. Le stock final au terme du plan doit être nul.

i	1	2	3	4	5	6
b_i	200	200	300	700	1000	200

Le directeur des achats, précisant que chaque approvisionnement engendre des frais fixes d'un montant $a = 2000$ euros (quelle que soit la quantité commandée), préfèrerait tout approvisionner en début de mois 1.

Le directeur financier, lui, voudrait limiter les stocks qui génèrent des coûts (entretien, location de containers, risque de détérioration, immobilisation,...) et propose d'approvisionner chaque début de mois la quantité à installer. Il a établi que chaque article en stock de début de mois coûte $s = 2$ euros.

Le directeur général souhaite déterminer une politique d'approvisionnement qui minimise la somme des deux coûts (approvisionnement + stock).

Remarque 1 : On notera qu'il n'est pas nécessaire de comptabiliser lors du mois i un coût de stockage pour les cabines à installer durant ce même mois i ($i = 1, ..., 6$).

1. Justifier la remarque précédente.
2. Quel est le coût des politiques préconisées respectivement par le directeur des achats et le directeur financier ?

   Remarque 2 : Les réponses aux deux premières questions devraient avoir été données lors de la section 1 de ce document.

   Pour déterminer une politique optimale, on propose deux modélisations possibles. Une première, à l'aide d'un graphe est traitée en section 1. Une seconde modélisation par programmation linéaire est proposée ici. Les intérêts respectifs de chacune de ces modélisations seront établis.

   Modélisation à l'aide d'un programme linéaire.

3. Définir précisément les variables de décision. On prendra soin notamment de définir toutes les variables nécessaires à l'expression de la fonction objectif.
4. Ecrire les différent types de contraintes.
5. Ecrire la fonction objectif.