

# Introduction à l'optimisation

---

---

Programmation linéaire (continue)  
Notes de cours

Dominique Quadri

# Programmation mathématique

---

---

## Qu'est-ce qu'un programme mathématique ?

- Expression d'un problème d'optimisation
  - Un ensemble de variables de décision
  - Une fonction « objectif » des variables de décision à minimiser ou maximiser
  - Un système de contraintes sur les variables de décision

# Programmation linéaire

---

Un programme linéaire est un cas particulier de programme mathématique

- Les variables de décision sont des réels
- La fonction objectif est linéaire
- Les contraintes sont linéaires

- Exemple :

$$\begin{aligned} \text{Max } & 2x + 3y + z \\ & x + 4y + 2z \leq 10 \\ & 2x + 3y + z \leq 12 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

Intérêt : on connaît des algorithmes efficaces pour résoudre les programmes linéaires !

# Un problème de production

---

---

Une usine fabrique deux produits P1 et P2, qui rapportent 1700 et 3200 euros par quantité produite.

Chaque produit demande pour son usinage des heures de fabrication unitaires sur les machines A, B, C, D, E

	A	B	C	D	E
P1	0	1h30	2h	3h	3h

P2	3h	4h	3h	2h	0
----	----	----	----	----	---

Chaque machine a une disponibilité totale sur une semaine de

A : 39h, B : 60h, C : 57h, D : 70h, E : 57h

# Modélisation

---

## Variables de décision

- $x_1$  : quantité de P1 produite
- $x_2$  : quantité de P2 produite

## Fonction objectif :

- maximiser  $f(x) = 1700 x_1 + 3200 x_2$

# Modélisation

---

maximiser  $f(x) = 1700 x_1 + 3200 x_2$

sous les contraintes :

$$3 x_2 \leq 39 \quad (\text{machine A})$$

$$1,5x_1 + 4 x_2 \leq 60 \quad (\text{machine B})$$

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 57 \quad (\text{machine C})$$

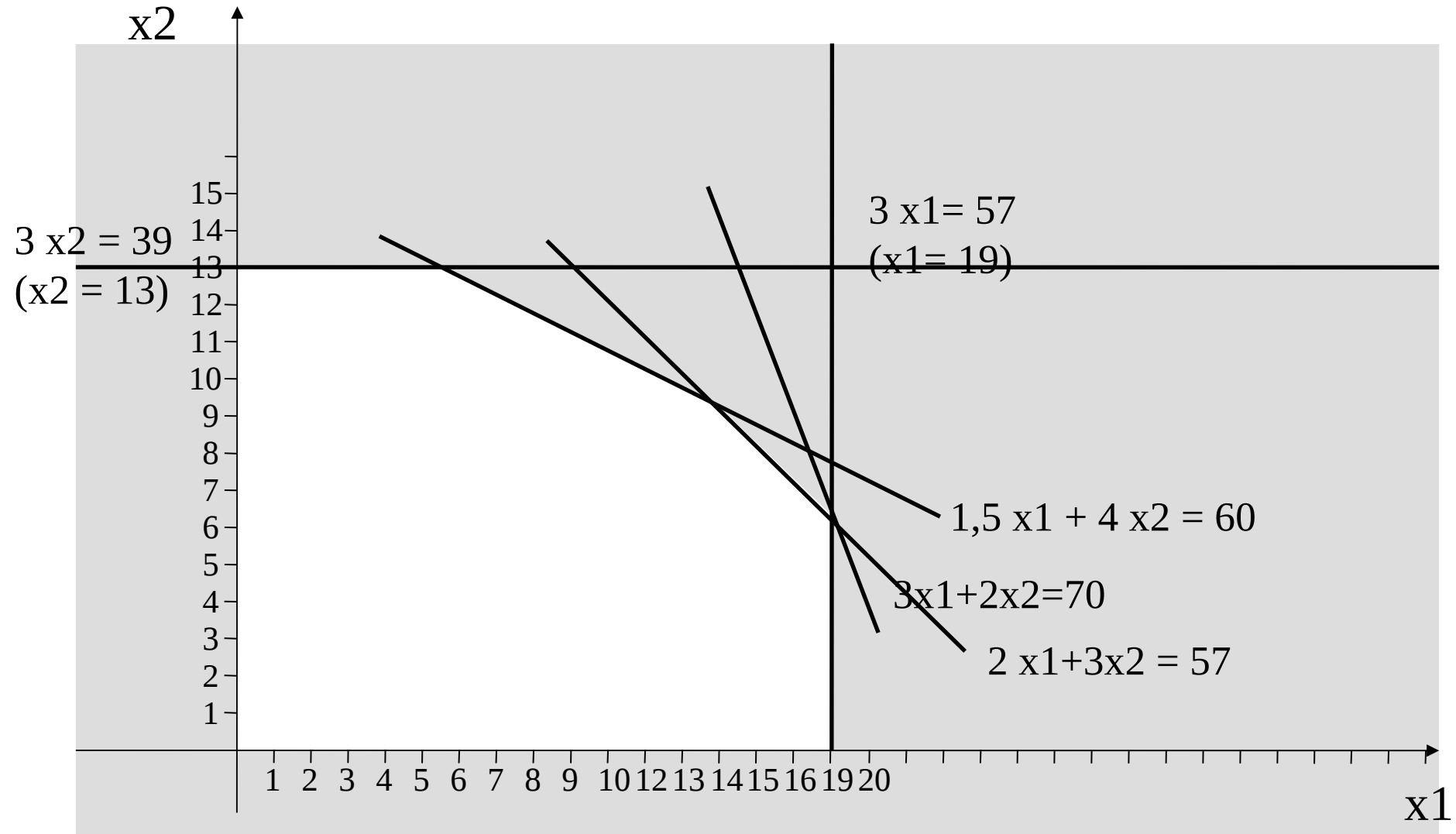
$$3x_1 + 2 x_2 \leq 70 \quad (\text{machine D})$$

$$3x_1 \leq 57 \quad (\text{machine E})$$

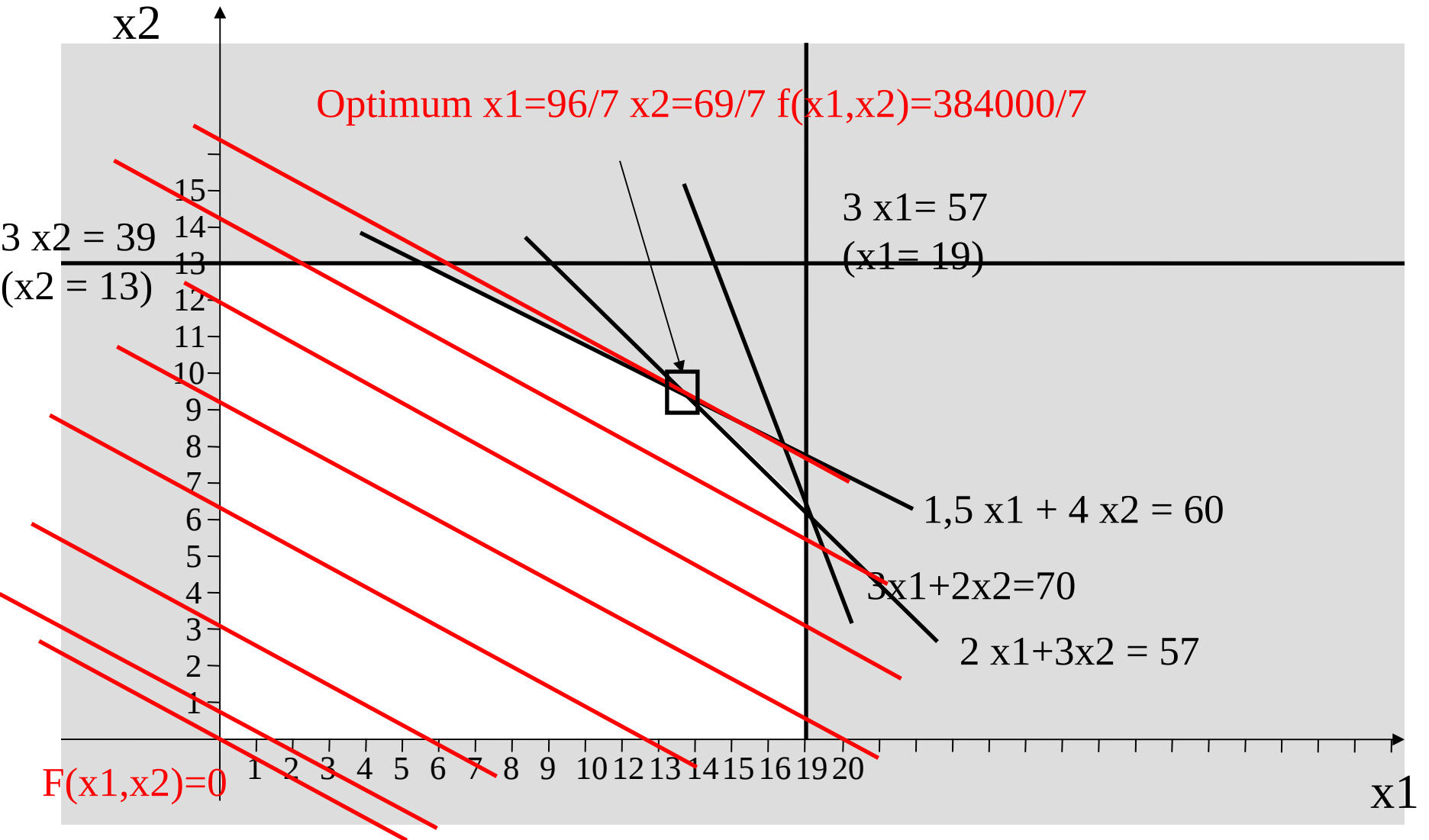
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

# Représentation des solutions réalisables dans le plan

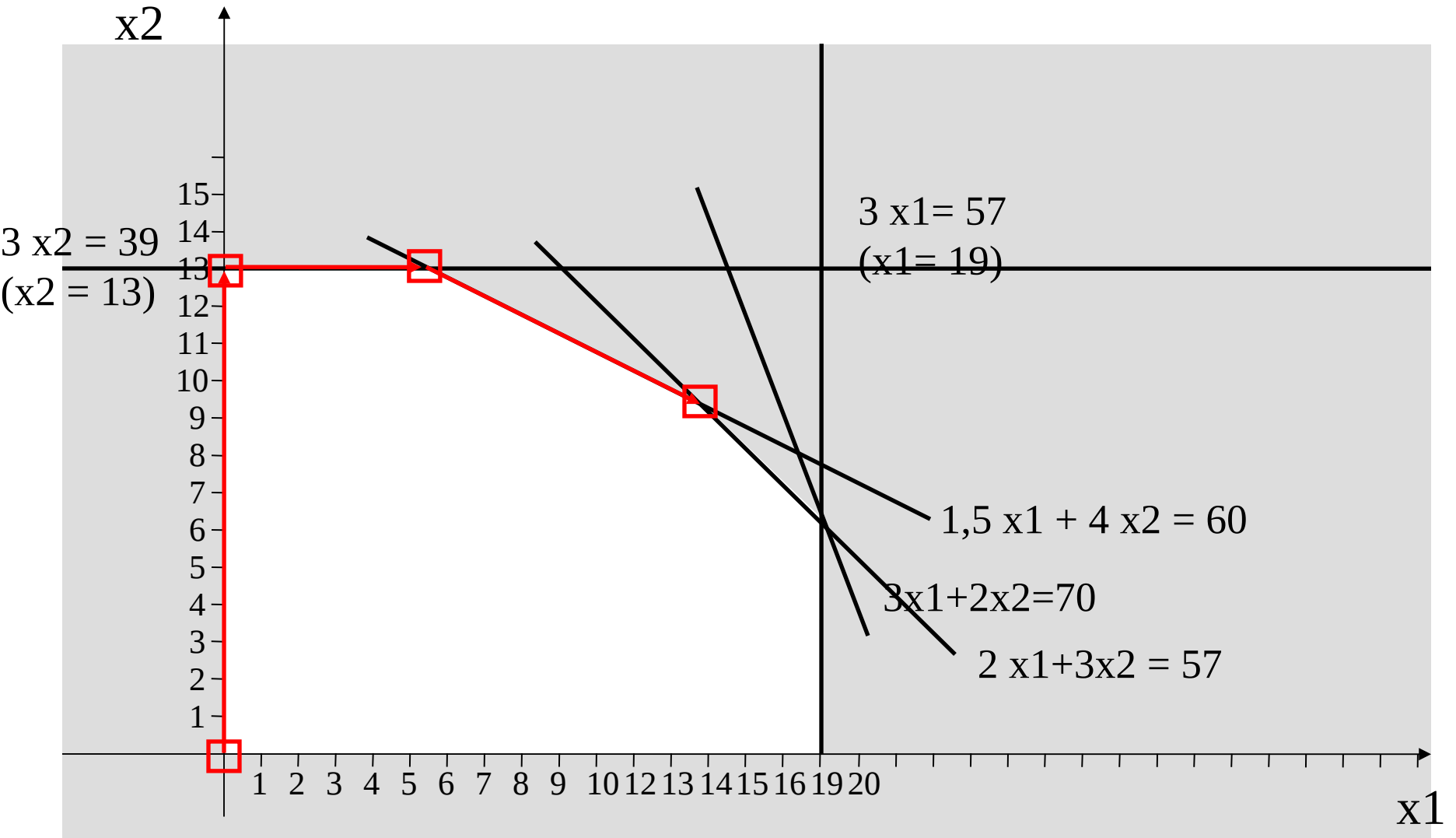


# Résolution graphique





# Aperçu de la résolution par la méthode du simplexe



# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

Formulation initiale :

$$(P) \quad \text{maximiser } 1700x_1 + 3200x_2$$

$$3x_2 \leq 39$$

$$\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 57$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 70$$

$$3x_1 \leq 57$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

Forme standard :      (P)    maximiser  $1700x_1 + 3200x_2$

$$3x_2 + x_3 = 39$$

$$\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 + x_4 = 60$$

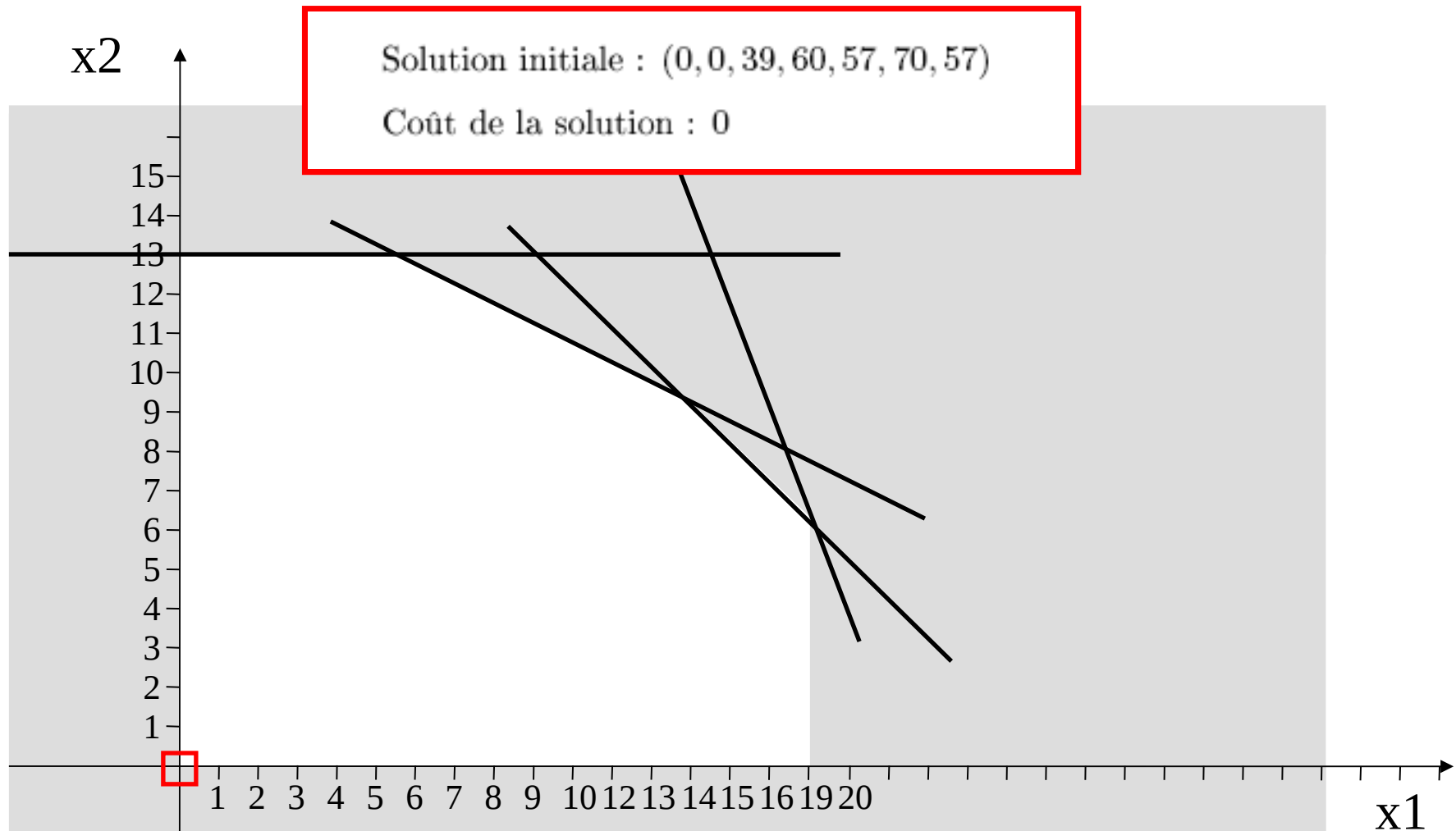
$$2x_1 + 3x_2 + x_5 = 57$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 70$$

$$3x_1 + x_7 = 57$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

# Résolution par la méthode du simplexe



# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

Forme standard :      (P)      maximiser  $1700x_1 + 3200x_2$

$$3x_2 + x_3 = 39$$

$$\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 + x_4 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_5 = 57$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 70$$

$$3x_1 + x_7 = 57$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Variable entrante  $x_2$ , variable sortante  $x_3$

On pivote à partir de la contrainte  $3x_2 + x_3 = 39$

# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

Après pivot n° 1 : (P) maximiser  $13 \times 3200 + 1700x_1 - \frac{3200}{3}x_3$

$$\frac{1}{3}x_3 + x_2 = 13$$

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 = 8$$

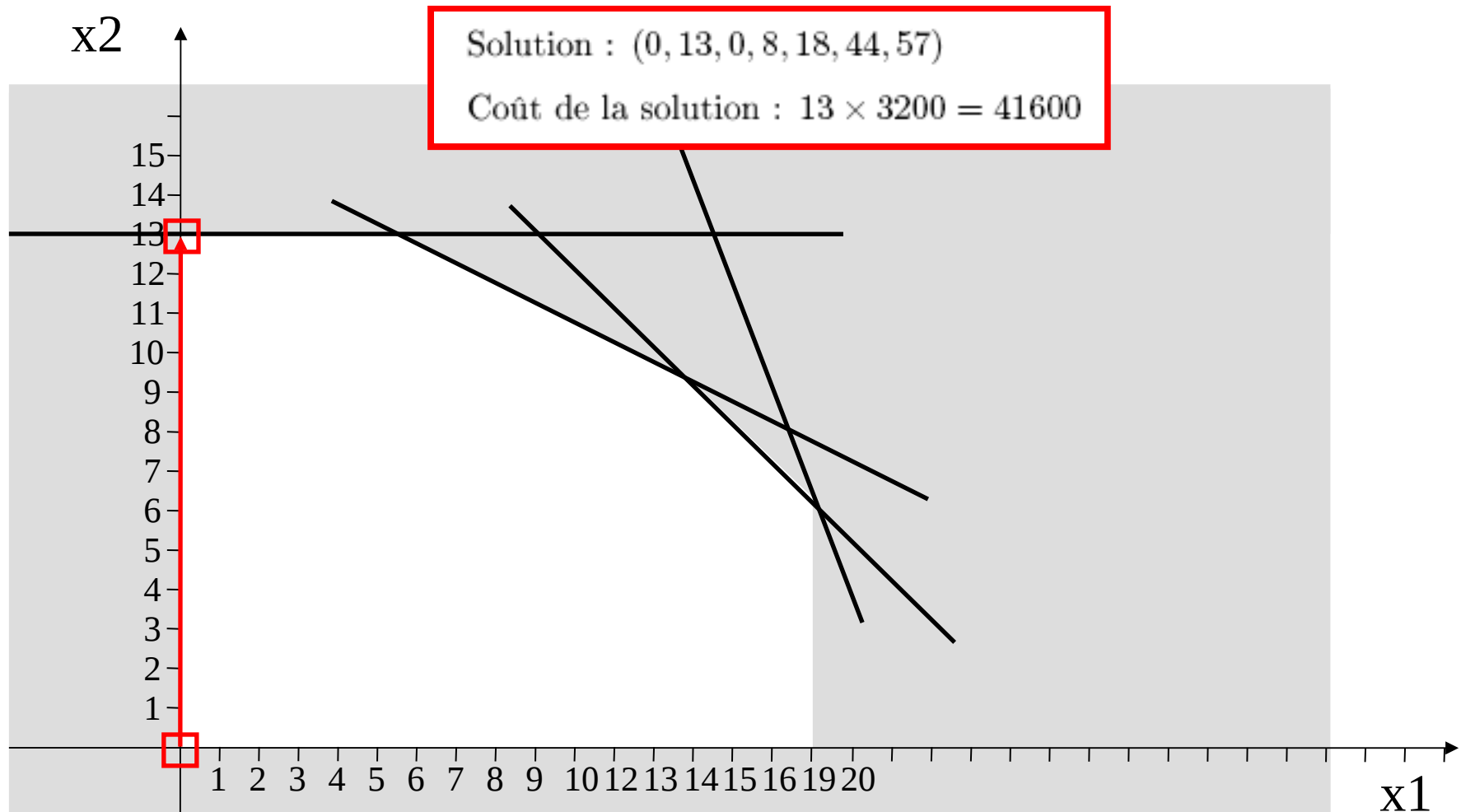
$$2x_1 - x_3 + x_5 = 18$$

$$3x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_6 = 44$$

$$3x_1 + x_7 = 57$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

# Résolution par la méthode du simplexe



# Résolution par la méthode du simplexe

---

Après pivot n° 1 : (P) maximiser  $13 \times 3200 + 1700x_1 - \frac{3200}{3}x_3$

$$\frac{1}{3}x_3 + x_2 = 13$$

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 - x_3 + x_5 = 18$$

$$3x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_6 = 44$$

$$3x_1 + x_7 = 57$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Variable entrante  $x_1$ , variable sortante  $x_4$

On pivote à partir de la contrainte  $\frac{3}{2}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 = 8$



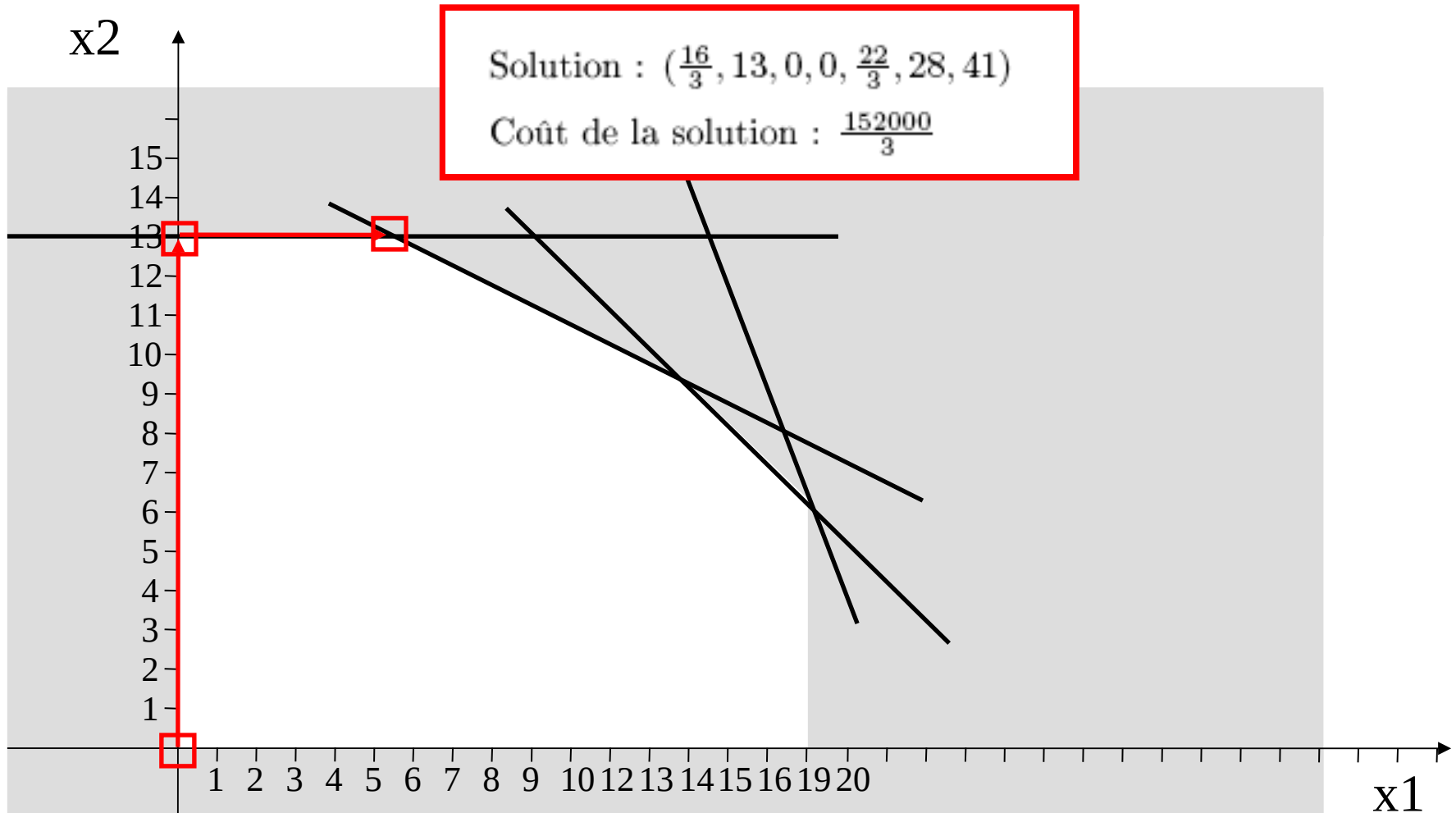
# Résolution par la méthode du simplexe

---

Après pivot n° 2 : (P) maximiser  $13 \times 3200 + 1700 \times \frac{16}{3} + \frac{4000}{9}x_3 - \frac{3400}{3}x_4$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3}x_3 + x_2 &= 13 \\
 -\frac{8}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + x_1 &= \frac{16}{3} \\
 \frac{7}{9}x_3 - \frac{4}{3}x_4 + x_5 &= \frac{22}{3} \\
 2x_3 - 2x_4 + x_6 &= 28 \\
 \frac{8}{3}x_3 - 2x_4 + x_7 &= 41 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
 \end{aligned}$$

# Résolution par la méthode du simplexe



# Résolution par la méthode du simplexe

---

Après pivot n° 2 : (P) maximiser  $13 \times 3200 + 1700 \times \frac{16}{3} + \frac{4000}{9}x_3 - \frac{3400}{3}x_4$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3}x_3 + x_2 &= 13 \\
 -\frac{8}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + x_1 &= \frac{16}{3} \\
 \frac{7}{9}x_3 - \frac{4}{3}x_4 + x_5 &= \frac{22}{3} \\
 2x_3 - 2x_4 + x_6 &= 28 \\
 \frac{8}{3}x_3 - 2x_4 + x_7 &= 41 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Variable entrante  $x_3$ , variable sortante  $x_5$

On pivote à partir de la contrainte  $\frac{7}{9}x_3 - \frac{4}{3}x_4 + x_5 = \frac{22}{3}$

# Résolution par la méthode du simplexe

---

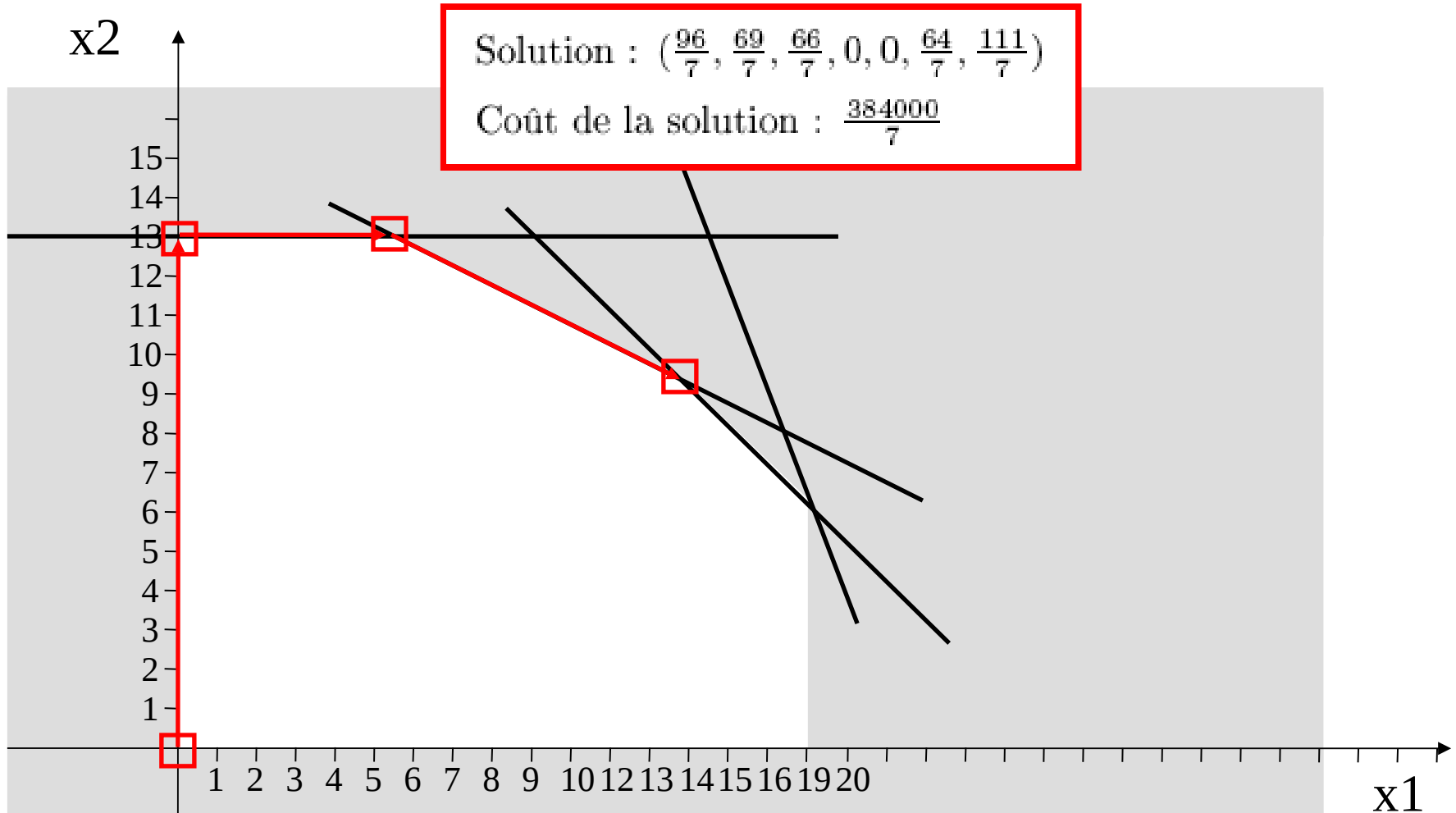


---

Après pivot n° 3 : (P) maximiser  $\frac{384000}{7} - \frac{2600}{7}x_4 - \frac{4000}{7}x_5$

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + x_2 &= \frac{69}{7} \\
 \frac{6}{7}x_4 + \frac{8}{7}x_5 + x_1 &= \frac{96}{7} \\
 -\frac{12}{7}x_4 + \frac{9}{7}x_5 + x_3 &= \frac{66}{7} \\
 \frac{10}{7}x_4 - \frac{18}{7}x_5 + x_6 &= \frac{64}{7} \\
 \frac{18}{7}x_4 - \frac{27}{7}x_5 + x_7 &= \frac{111}{7} \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
 \end{aligned}$$

# Résolution par la méthode du simplexe



# Résolution par la méthode du simplexe

---



---

Après pivot n° 3 : (P) maximiser  $\frac{384000}{7} - \frac{2600}{7}x_4 - \frac{4000}{7}x_5$

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + x_2 &= \frac{69}{7} \\
 \frac{6}{7}x_4 + \frac{8}{7}x_5 + x_1 &= \frac{96}{7} \\
 -\frac{12}{7}x_4 + \frac{9}{7}x_5 + x_3 &= \frac{66}{7} \\
 \frac{10}{7}x_4 - \frac{18}{7}x_5 + x_6 &= \frac{64}{7} \\
 \frac{18}{7}x_4 - \frac{27}{7}x_5 + x_7 &= \frac{111}{7} \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
 \end{aligned}$$

La solution est optimale car :

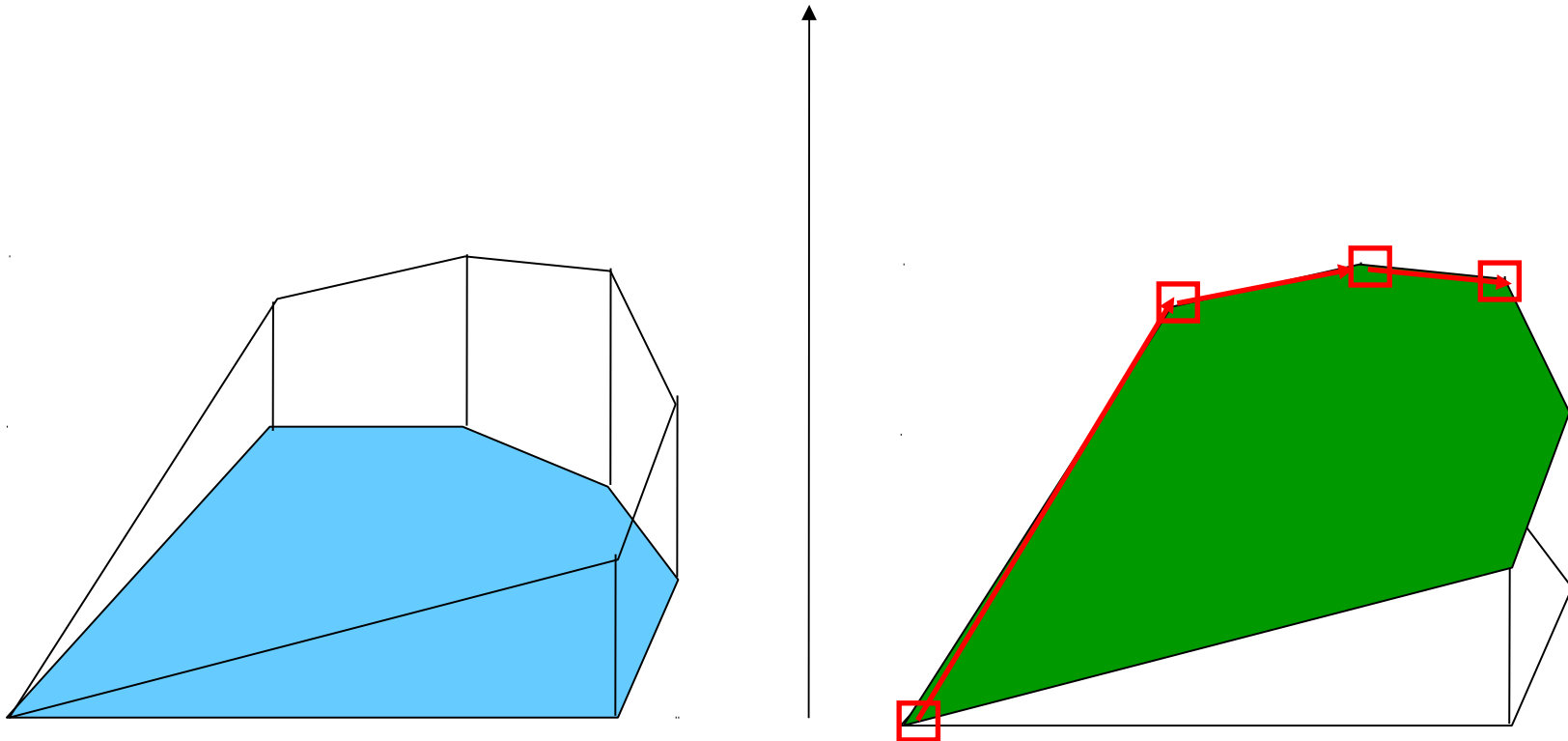
- $384000/7$  est une borne supérieure pour la fonction objectif
- la solution a un coût de  $384000/7$

# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

valeur de la fonction objectif



■ : Espace réalisable

# Résolution par la méthode du simplexe

---

---

## Principe de la méthode :

- 1- Présenter le problème sous forme standard
- 2- Déterminer une solution réalisable de départ
- 3- Tant qu'au moins une variable a un coût strictement positif dans la fonction objectif
  - 4- Choisir la variable entrante, parmi celles ayant un coût strictement positif dans la fonction objectif, par exemple celle ayant le coût le plus élevé
  - 5- Déterminer la variable sortante : c'est la première variable devenant nulle quand on augmente la variable entrante
  - 6- Effectuer le pivot
    - 7 - commencer par considérer la contrainte (unique) contenant la variable sortante et multiplier cette contrainte par un coefficient permettant d'obtenir un coefficient 1 pour la variable entrante
    - 8 - utiliser cette contrainte (multipliée par des coefficients adaptés) pour supprimer la variable entrante dans l'écriture des autres contraintes et dans l'écriture de la fonction objectif