Feuille 1 : savoir-faire associés et QCM de compréhension

Le QCM (à faire en dehors du cours !) est disponible ici :
https://www.mathmatize.com/c/1516?task=b2110146-8549-4a8a-ae91-734cda93a452
Ce lien est également sur eCampus.

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- Passer de l'écriture symbolique à l'écriture éclatée

Exprimer sans le signe $\sum$ (avec des « ... + ... + ...») les expressions suivantes en écrivant les deux premiers termes et les deux derniers termes.

1. $\sum_{j=1}^{10} 1+j$
2. $\sum_{n=0}^{50} 1$
3. $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^i$
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$
6. $\sum_{k=3}^{50} (1+\frac{1}{k})^k$
7. $\sum_{l=0}^{n-1} a_l X^{l+1}$
8. $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^{n-k}$

Correction

1. $2+3+4+\cdots+10+11$
2. $1+1+1+\cdots+1+1$
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}$
4. $1+2^2+3^3+\cdots+n^n$
5. $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$
6. $(1+\frac{1}{3})^3+(1+\frac{1}{4})^4+\cdots+(1+\frac{1}{50})^{50}$
7. $a_0X+a_1X^2+\cdots+a_{n-2}X^{n-1}+a_{n-1}X^n$
8. $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$.

Exercice 2 ().

Savoir-Faire

- Passer de l'écriture éclatée à l'écriture symbolique

Exprimer avec le signe $\sum$ les sommes suivantes (lorsque le dernier terme n'est pas indiqué, on considèrera qu'il y a n termes)

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{561}+\frac{1}{562}$
2. $2+4+6+8+\ldots$

3. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$
4. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{98}{99} + \frac{99}{100}$
5. $3 + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \dots + \frac{n}{n-2} + \frac{n+1}{n-1}$
6. $a_0 + a_2X^2 + a_4X^4 + \dots + a_{2q-2}X^{2q-2} + a_{2q}X^{2q}$
7. $a_0X + a_1X^2 + a_2X^3 + \dots + a_{n-1}X^n + a_nX^{n+1}$

Correction

À chaque fois il faut réussir à trouver le lien entre les nombres, cela vient avec l'habitude...

1. *Ici on remarque que les nombres semblent aller de 1 en 1 au dénominateur :* $\sum_{i=1}^{562} \frac{1}{i}$
2. *Ici on remarque qu'on a seulement les nombre pairs. La manière la plus pratique de décrire les nombres pairs est de les écrire de la forme* $2k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$*. On peut donc écrire :* $\sum_{k=1}^{n} 2k$
3. *Ici deux choses : on remarque qu'il y a une alternance des signes "+" et "-". Une manière de traduire cela est d'écrire un* $(-1)^k$ *(*$(-1)^0 = 1, (-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, \dots$*)). On remarque ensuite que les nombres au dénominateur semblent être les nombres impairs, que l'on peut décrire par* $2k+1$ *(si* $k = 0$ *cela donne 1, si* $k = 1$ *cela donne 3, puis 5 pour* $k = 2$*, etc...). Finalement :* $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$
4. *Cela correspond à la somme :*
$$\sum_{k=2}^{99} \frac{k}{k+1}$$
5. *Cela correspond à la somme :*
$$\sum_{i=2}^{n} \frac{i+1}{i-1}$$
6. $\sum_{i=0}^{q} a_{2i}X^{2i}$
7. $\sum_{i=0}^{n} a_iX^{i+1}$

Exercice 3 ().

Savoir-Faire

- Calculer le nombre de termes d'une somme

Pour chacune des sommes suivantes, calculer le nombre de termes dans la somme (on ne demande pas de calculer ces sommes !)

1. $\sum_{j=1}^{10} j^2$
2. $\sum_{n=0}^{50} \frac{n^2+1}{3}$
3. $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$
4. $\sum_{k=4}^{50} \frac{1}{k}$
5. $\sum_{i=m}^{n+1} i$ (avec $m \geq 0$ et $n+1 > m$)
6. $\sum_{k=2}^{n+3} (1+q)^{k-1}$

Solution sans rédaction

1. 10 termes

2. 51 termes

3. p termes

4. 47 termes

5. $n-m+2$ termes

6. $n+2$ termes

Exercice 4 ().

Savoir-Faire

- Utiliser la linéarité de la somme

Décomposer en plusieurs sommes les sommes suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{50}(n^2+1)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}(1+2n)$
3. $\displaystyle\sum_{k=4}^{50}(-2k+6)$
4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10}(j-1)^2$
5. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n+1}\frac{1+i}{3}$
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3}\frac{1}{4}(3-k)$

Solution sans rédaction

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{50}n^2+\sum_{n=0}^{50}1$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}1+2\sum_{n=1}^{p}n$

3. $\displaystyle -2\sum_{k=4}^{50}k+\sum_{k=4}^{50}6$

4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10}j^2-2\sum_{j=1}^{10}j+\sum_{j=1}^{10}1$

5. $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{i=m}^{n+1}1+\frac{1}{3}\sum_{i=m}^{n+1}i$

6. $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+3}3-\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+3}k$