Feuille 1

Dans cette planche de problème ainsi que dans les suivantes, nous manipulerons régulièrement la notion de points ou de vecteurs. Vous avez pu rencontrer deux notations différentes dans le passé pour les coordonnées d'un point ou d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par exemple : (x, y) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Nous utiliserons parfois la première notation, et de plus en plus souvent la deuxième notation (notation verticale), pour des raisons qui apparaîtrons plus tard.

Les problèmes suivis du symbole $\star$ sont facultatifs.

Lorsqu'un exercice est terminé et la rédaction validée par tous les membres du groupes, merci de poster une photo de votre tableau sur le pad accessible avec le QR code ci contre (ou par ce lien : https://digipad.app/p/1066128/5a747afd1cad4).
Cela permettra d'une part aux autres groupes de pouvoir les regarder, et d'autre part de faire parfois quelques remarques globales en classe.

Problème 1 ().
En mathématiques, un *ensemble* est une collection d'objets, appelés *éléments*.
On peut décrire un ensemble *en extension*, c'est-à-dire en listant les éléments qui composent cet ensemble et en les écrivant entre accolades, séparés par des virgules.

1. Combien y a t-il d'éléments dans l'ensemble $\{1, 2, 4\}$? Et dans l'ensemble $\{(1, 2), (3, 4)\}$? Et dans l'ensemble $\{(1, 2), 1, 2\}$?
2. Que pensez-vous des ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$?

Correction

1. *Il y a 3 éléments dans* $\{1, 2, 4\}$*, 2 éléments dans* $\{(1, 2), (3, 4)\}$ *(le couple ou le vecteur* $(1, 2)$ *et le couple ou le vecteur* $(3, 4)$ *et 3 éléments dans l'ensemble* $\{(1, 2), 1, 2\}$ *(le couple ou le vecteur* $(1, 2)$*, le nombre 1 et le nombre 2)*
2. *Les ensembles* $\{1, 2\}$ *et* $\{2, 1\}$ *sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. Il n'y a pas de notion d'ordre.*

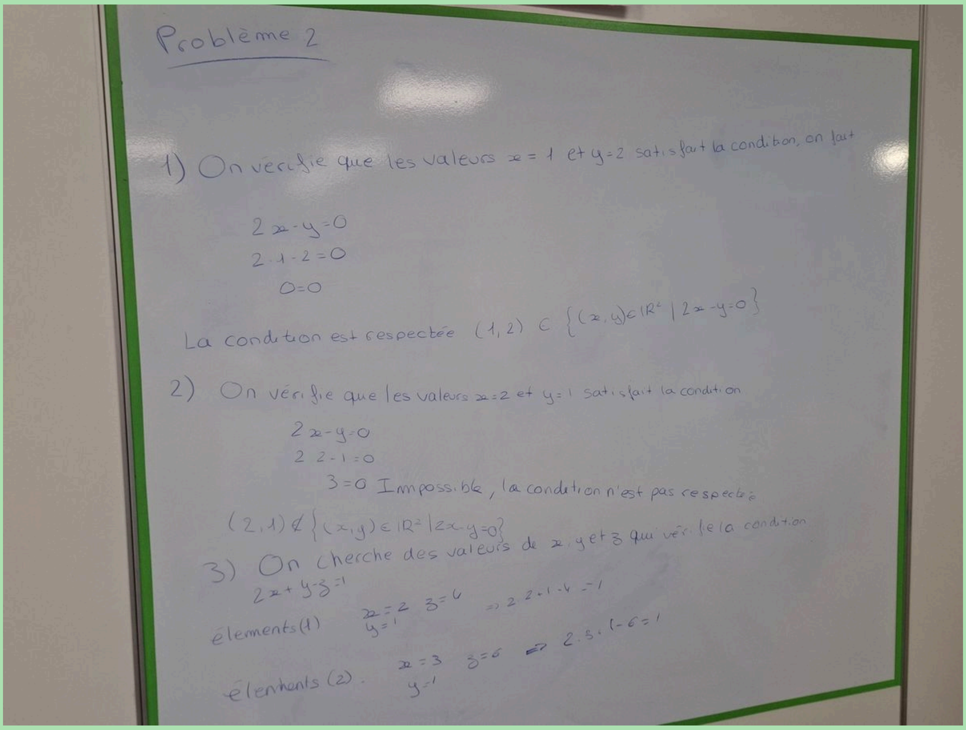
Problème 2 ().
On peut décrire un ensemble *en compréhension* en spécifiant le type de l'objet ou sa forme, suivi d'une condition que doit satisfaire l'objet pour être dans l'ensemble, avec la notation suivante :

$$\{ \underbrace{\quad\cdots\quad}_{\text{type/forme de l'objet}} \mid \underbrace{\quad\cdots\quad}_{\text{condition devant être satisfaite}} \}$$

Le symbole «|», parfois noté «/» ou «,» se traduit par «*tel que*».
Lorsqu'un objet x est dans un ensemble E, on note $x \in E$.

1. Montrer que $(1, 2)$ est bien dans l'ensemble : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$.
2. Montrer que $(2, 1)$ n'est pas dans l'ensemble : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$. *On note alors dans ce cas :* $(2, 1) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
3. Trouver deux éléments appartenant à l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 1\}$.

Correction



Problème 3 ().
Une coopérative rassemble 10 petites exploitations maraîchères productrices de fruits et légumes, numérotées de 1 à 10.
On note n_i le nombre de personnes employées par la l'exploitation numéro i. Le nombre totale de personnes employées est alors $n_1 + n_2 + \cdots + n_{10}$, que l'on note mathématiquement

$$\sum_{i=1}^{10} n_i$$

Dans cette écriture :

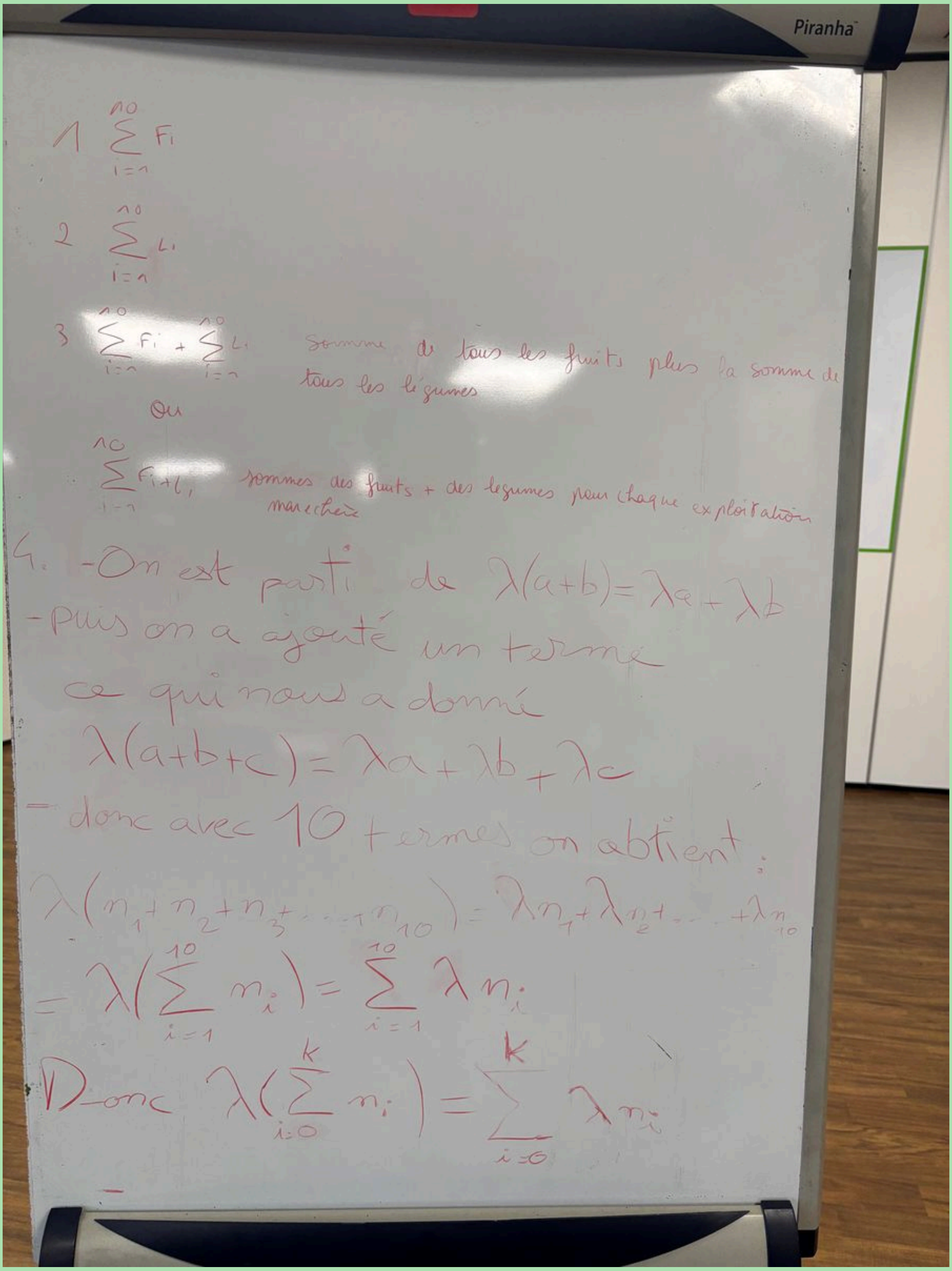
- le symbole $\sum$ signifie que l'on fait une somme
- la notation "$i = 1$" et 10 signifie que le nombre i va de 1 à 10 en augmentant de 1 à chaque fois
- "n_i" représente les nombres que l'on va additionner : il s'agit de $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$

1. On note F_i le nombre de tonnes de fruits produits par l'exploitation numéro i. Exprimer avec le symbole $\sum$ la quantité totale de fruits produits par la coopérative.
2. On note L_i le nombre de tonnes de légumes produits par l'exploitation numéro i. Exprimer avec le symbole $\sum$ la quantité totale de légumes produits par la coopérative.
3. Les deux stratégies ci-dessous sont permettent de calculer la quantité totale de fruits et légumes produits par la coopérative. Exprimer chacun des calculs en faisant apparaître uniquement le symbole $\sum$ (éventuellement plusieurs fois) et les quantités F_i et L_i :
   (a) On calcule la quantité totale de fruits produits par la coopérative, puis la quantité totale de légumes produits par la coopérative, puis on additionne les deux.

(b) On calcule la quantité totale de fruits et légumes produits par chaque coopérative individuellement, puis on additionne le tout.

4. Vous connaissez depuis votre plus tendre enfance la propriété suivante appelée "développement", pour λ, a et b trois nombres : $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$. Expliquer comment elle peut se généraliser à l'aide du symbole $\sum$.

Correction



Problème 4 ().
Dans différents contextes scientifiques mathématiques, nous avons souvent besoin de trouver des nombres, des "coefficients", qui satisfont certaines conditions ou équations.
Dans les 4 contextes ci-dessous, nommer par des lettres les nombres que l'on cherche, puis déterminer des conditions et des équations que doivent satisfaire ces nombres **(l'objectif de ce problème n'est pas de trouver les valeurs possibles de ces nombres)**

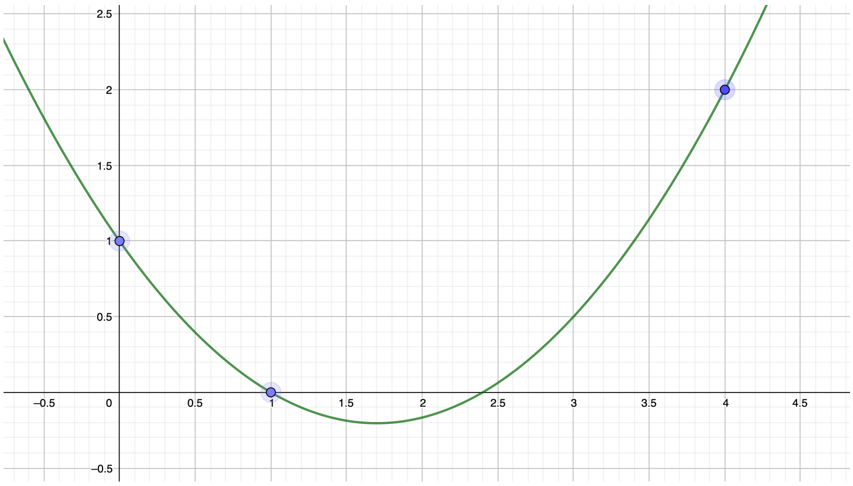
1. On souhaite équilibrer l'équation stœchiométrique suivante (combustion du butane) :

$$C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

2. Soit l'équation différentielle

$$x''(t) - x'(t) - x(t) = \cos t.$$

   On souhaite déterminer une solution particulière de la forme $x(t) = a\cos t + b\sin t$.
3. On souhaite déterminer le polynôme du second degré qui passe par les points $(0,1)$, $(1,0)$ et $(4,2)$ comme sur le graphe suivant :



Correction

1. *Pour équilibrer cette équation, on cherche x, y, z, t tels que*

$$xC_4H_{10} + yO_2 \longrightarrow zCO_2 + tH_2O$$

   Puisqu'il doit y avoir le même nombre d'atomes de carbone, hydrogène, oxygène des deux côtés, on doit avoir : $4x = z$ (atomes de carbone), $10x = 2t$ (hydrogène), $2y = 2z + t$ (oxygène). En mettant toutes les inconnues du même côté, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x \quad - \quad z \qquad = 0 \\ 10x \qquad\qquad - 2t = 0 \\ \qquad 2y - 2z - \quad t = 0 \end{cases}$$

2. *On cherche une solution particulière de cette équation de la forme $x(t) = a\cos t + b\sin t$. Calculons $x'(t)$ et $x''(t)$ afin de réinjecter dans l'équation différentielle :*

$$x'(t) = -a\sin t + b\cos t, \qquad x''(t) = -a\cos t - b\sin t$$

On a alors

$$x''(t) - x'(t) - x(t) = -a\cos t - b\sin t + a\sin t - b\cos t - a\cos t - b\sin t \quad = (-b-2a)\cos t + (a-2b)$$

Puisque $x(t)$ doit être solution de l'équation différentielle, on doit avoir :

$$\begin{cases} -2a - b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

3. *On cherche un polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des coefficients à déterminer.*
   On sait que $P(0) = 1$, donc :

   $$a \times 0 + b \times 0 + c = 1$$

   On sait que $P(1) = 0$, donc :

   $$a \times 1 + b \times 1 + c = 0$$

   On sait que $P(4) = 2$, donc :

   $$a \times 16 + b \times 4 + c = 2$$

   On a donc un système de trois équations :

   $$\begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ a + b + c = 0 \\ \phantom{16a + 4b + {}} c = 1 \end{cases}$$

Problème 5 ().
Depuis sa position initiale $(1, 6)$, une fourmi se déplace en ligne droite à vitesse constante. Elle atteint $(7, 10)$ après 2 secondes et $(13, 14)$ après 4 secondes.

1. Quelle sera sa position après 6 secondes ?
2. Après 9 secondes ?
3. Après t secondes, pour n'importe quelle valeur t positive ?
4. Comment pourrait-on interpréter une valeur de t négative ?

Correction

1. *Puisque la fourmi se déplace à vitesse constante et en ligne droite, et qu'en deux secondes elle a suivi le vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, en 6 secondes elle aura suivi le vecteurs $3 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$ et sera donc en position $\begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}$*
2. *De manière plus générale, cela signifie qu'en 1 seconde elle parcourt le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc en 9 seconde elle atteint le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 9 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \end{pmatrix}$*

3. *De la même manière que précédemment, au bout de t secondes la fourmi est en position*

$$\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}+t\times\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

4. *Une valeur de t négative pourrait être interprétée comme la position de la fourmi dans le passé.*

Problème 6 ().

Mathématiquement (et donc informatiquement et physiquement !), une couleur peut être représentée par un vecteur $\begin{pmatrix}R\\G\\B\end{pmatrix}$ avec les valeurs R, G, B variant entre 0 et 255 et représentant respectivement le niveau de rouge ("Red"), vert ("Green") et bleu ("Blue").

La **synthèse soustractive** des couleurs est le processus physique permettant, partant d'une lumière blanche (vecteur $\begin{pmatrix}255\\255\\255\end{pmatrix}$), d'absorber certaines couleurs du spectre et de révéler seulement les autres. C'est le principe des colorants (et donc des crayons de couleurs par exemple).

Sur le lien suivant, vous pouvez partir d'une lumière blanche et modéliser l'absorbance de couleurs : https://www.geogebra.org/m/qg398tdt

1. Quel est l'effet du paramètre t ?
2. Illustrer alors le paragraphe suivant, issu de la page Wikipedia sur la synthèse soustractive :
   - le colorant bloc bleu-vert, dit cyan transmet toutes les longueurs d'onde de 400 nm à 580 nm et absorbe la couleur optimale primaire rouge
   - la colorant bloc rouge violacé, dit magenta transmet toutes les longueurs d'onde de 400 nm à 490 nm et 580 nm à 700 nm et absorbe la couleur optimale primaire verte
   - la colorant bloc jaune transmet toutes les longueurs d'onde de 490 nm à 700 nm et absorbe la couleur optimale primaire bleue.

   De cette façon, chacun des colorants bloc absorbe une des couleurs optimales primaires : il procède par soustraction.

Correction

1. *On observe que t agit sur l'opacité (ou la transparence) de la couleur.*
2. *Sur le lien, on peut visualiser l'effet d'enlever une ou plusieurs couleurs à la lumière blanche. En enlevant entièrement le rouge ($t=1$ et curseur rouge à 255) on modélise donc l'absorption du rouge, et on constate que la couleurs obtenu est effectivement du cyan, comme indiqué dans le paragraphe.*

   De même, en enlevant le vert entièrement on constate que la couleur obtenue est un genre de violet (magenta).

   De même, en enlevant le bleu entièrement on constate que la couleur obtenue est jaune.

Problème 7 ().

Mathématiquement (et donc informatiquement et physiquement !), une couleur peut être représentée par un vecteur $\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ avec les valeurs R, G, B variant entre 0 et 255 et représentant respectivement le niveau de rouge ("Red"), vert ("Green") et bleu ("Blue").

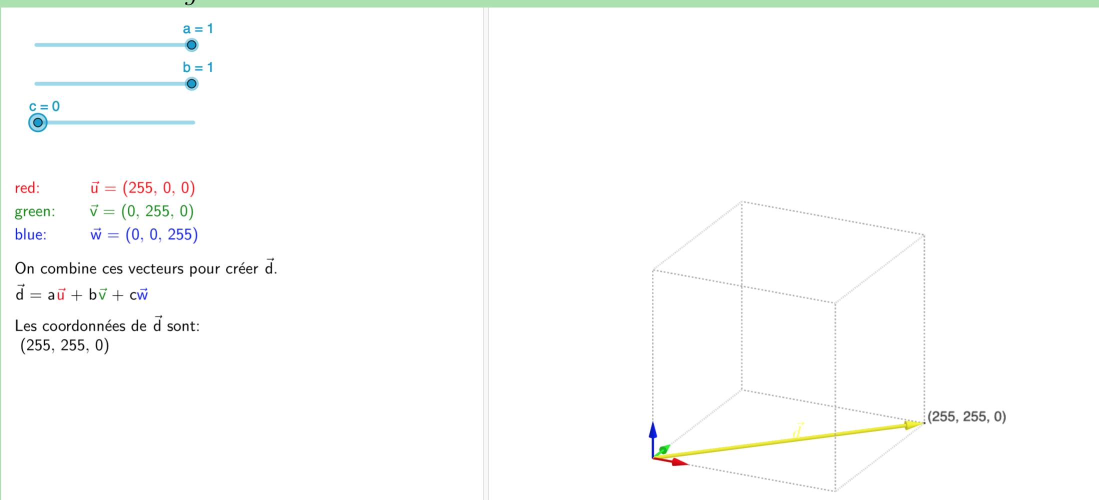
La **synthèse additive** des couleurs consiste à combiner le rouge $\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le vert $\begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le bleu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$ pour créer les autres couleurs.

Sur le lien suivant, vous pouvez modéliser et visualiser la synthèse additive : `https://www.geogebra.org/m/dwfbf7td`

1. Donner une interprétation des coefficients a, b et c.
2. Que se passe-t-il quand ces coefficients sont tous proches de 0 ? Quand ils sont tous proches de 1 ?
3. Comment obtenir du jaune par synthèse additive ?

Correction

1. *Les coefficients a, b et c modélisent les intensités de rouge, vert ou bleu que l'on choisit de mettre dans la lumière.*
2. *Quand ces coefficients sont tous proches de* 0*, le vecteur résultant est proche d'être noir (ce qui est normal puisque physiquement cela correspond à mettre peu ou pas de lumière). Quand ils sont tous proches de* 1*, cela donne de la lumière blanche.*
3. *En explorant avec les coefficients de la combinaison linéaire (ou avec ses connaissances de physique !) on remarque qu'on obtient le jaune par un mélange de lumière verte et de lumière rouge :*



Problème 8 ().

1. Expliquer pourquoi il est possible de déterminer avec peu de calculs des nombres x_1, x_2, x_3, x_4

satisfaisant simultanément les 4 conditions suivantes :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\;\; - x_2 - x_3 \qquad\quad = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + \;\; x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases}$$

Combien y a t-il de vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) qui conviennent ?

2. S'il n'y a plus que les 3 conditions suivantes, proposer une stratégie pour trouver plusieurs solutions (pas forcément toutes) :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad\;\; - x_2 - x_3 \qquad\quad = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + \;\; x_4 = -1 \end{cases}$$

Correction

1. *Puisqu'on a la valeur de x_4, il suffit de l'injecter dans la troisième équation pour trouver x_3 $(= -2)$, puis de réinjecter la valeur de x_3 dans la deuxième équation pour trouver x_2 $(= 1)$, puis enfin de réinjecter ces 3 valeurs dans la première équation pour trouver celle de x_1.*

   Il n'y a qu'une possibilité pour chaque valeur, donc une seule solution (x_1, x_2, x_3, x_4).
2. *Ici on n'a pas de valeur spécifiée pour x_4. Néanmoins, si on en fixe une arbitrairement, on pourra alors procéder comme la question précédente. On peut ainsi trouver plusieurs (une infinité en fait) solutions en :*
   - *Fixant une valeur (n'importe laquelle) de x_4.*
   - *Effectuant les mêmes étapes qu'à la question précédente.*

Problème 9 ().
Un concept central en mathématique est celui de *transformation*, consistant à prendre un objet et le modifier pour obtenir un nouvel objet.
Un type familier de transformation est constitué des transformations géométriques, qui peuvent être vues de deux manières :

- **géométriquement :** avec la notion de symétrie par rapport à un axe, de rotation autour d'un point, de translation horizontale ou verticale, etc...
- **algébriquement :** on prend un point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on modifie ses coordonnées pour obtenir un nouveau point $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

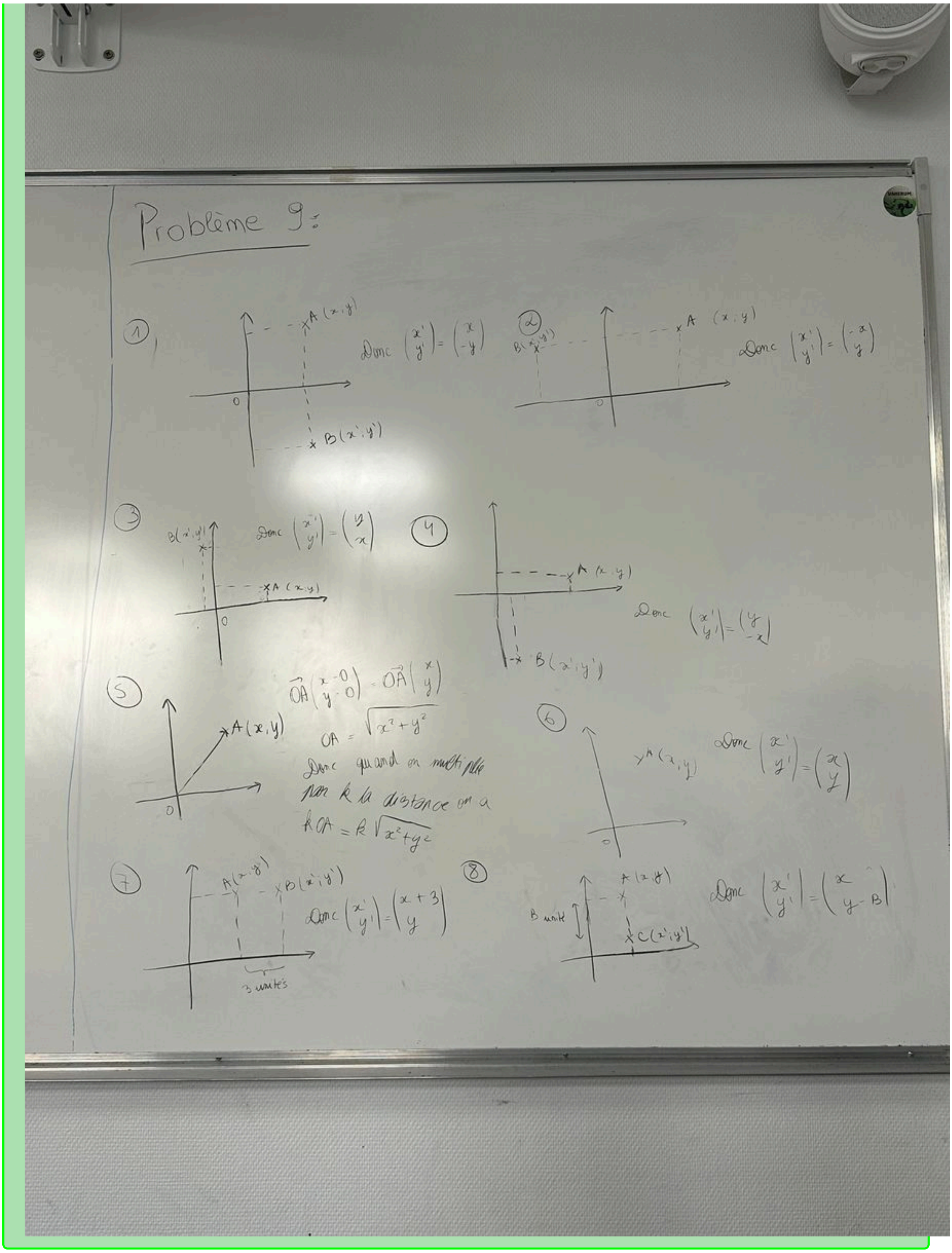
Pour chacune des transformations géométriques ci-dessous, trouver une formule qui calcule les coordonnées d'un nouveau point $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en fonction des coordonnées du point initial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

1. la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
2. la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
3. La rotation de 90° dans le sens trigonométrique autour de l'origine.

4. La rotation de $-90°$ dans le sens trigonométrique autour de l'origine.
5. La transformation qui multiplie par un facteur k la distance des points par rapport à l'origine.
6. la transformation qui ne fait rien du tout.
7. Le décalage horizontal des points de 3 unités vers la droite.
8. Le décalage vertical des points de b unités vers le bas.

Correction

Sur la photo ci-dessous, la réponse à la question 5 n'est pas très clair donc je précise : multiplier la distance par k revient à multiplier par k le vecteur allant de l'origine du repère à ce point. C'est-à-dire atteindre les coordonnées (kx, ky). Donc $x' = kx$ et $y' = ky$.



Problème 10 (). *suite du problème précédent*
Notons T la transformation qui prend le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et le transforme en le vecteur

$(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n
\end{aligned}$$

On représente alors la transformation par une *matrice* :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

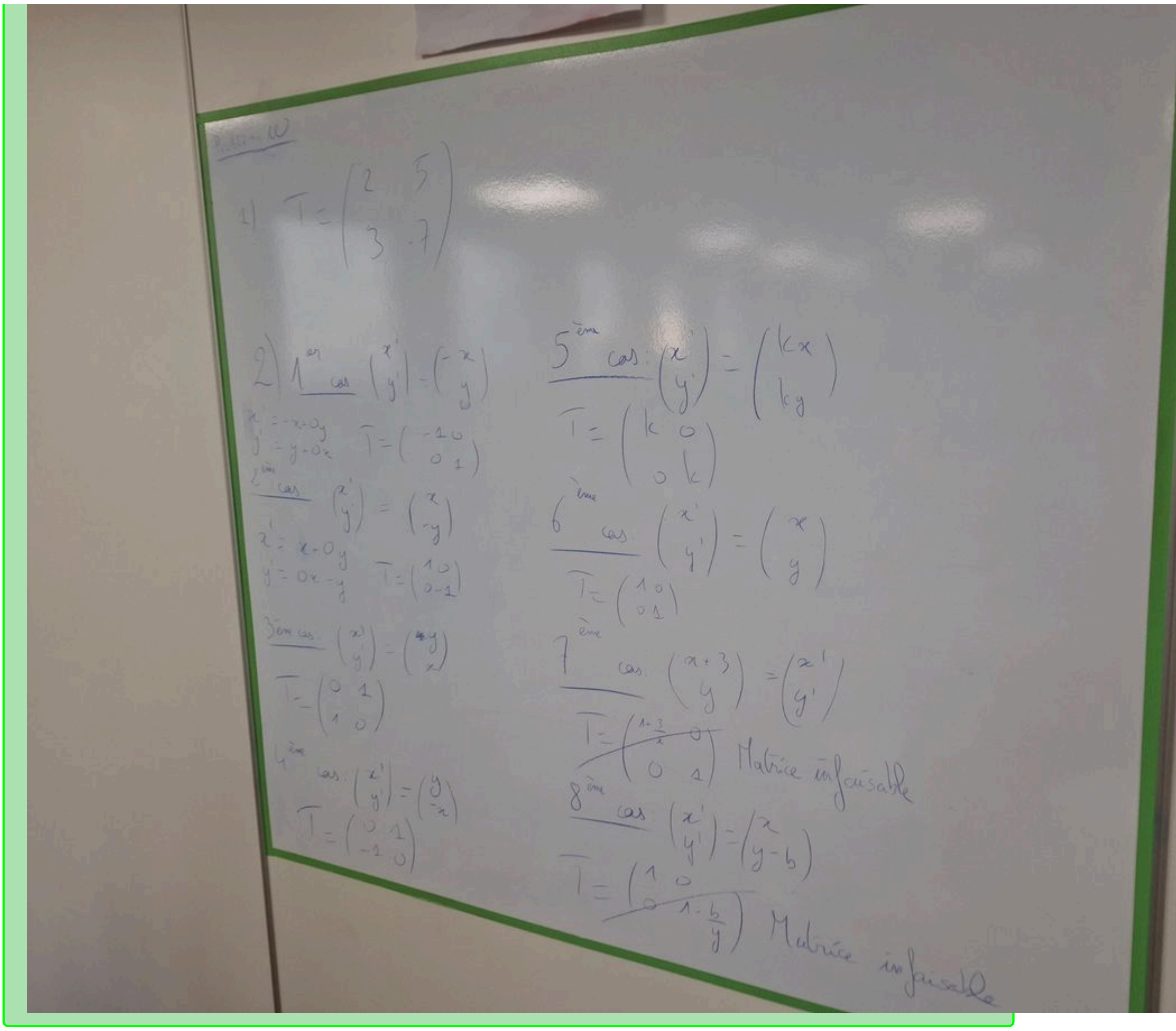
1. Déterminer la matrice représentant la transformation de (x_1, x_2) vers (y_1, y_2) selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 + 5x_2 \\
y_2 &= 3x_1 - 7x_2
\end{aligned}$$

2. Déterminer dans chacun des 8 cas du problème 9, si cela est possible, la matrice de la transformation donnée.

Correction

Dans tous les cas, il s'agit de regarder comment sont obtenues les coordonnées du nouveau point en fonction de celles de l'ancien point, et de placer les nombres correspondants dans un tableau comme expliqué dans l'énoncé.
S'il y a des nombres qui ne sont pas multiplier par une des anciennes coordonnées, alors on ne peut pas construire de matrice associée.



Problème 11 ($\star$). *suite du problème précédent*

Dans cet exercice, on note $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On note toujours $P_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$ et $P_2' = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}$ les nouveaux points après transformation.

On note $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{P_1'P_2'}$.

1. Exprimer v et w en fonction de x_1, x_2, y_1, y_2.
2. Exprimer v' et w' en fonction de x_1', x_2', y_1', y_2'.
3. À l'aide notamment des deux questions précédentes et des résultats du problème 9, exprimer les coordonnées (v', w') en fonction de v et w pour les transformations suivantes :
   (a) la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
   (b) La rotation de $90°$ dans le sens trigonométrique autour de l'origine.

(c) La transformation qui multiplie par un facteur k la distance des points par rapport à l'origine.

(d) Le décalage horizontal des points de 3 unités vers la droite.

(e) Le décalage vertical des points de b unités vers le bas.

4. Le lien entre $\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ dans la question précédente est-il toujours le même que le lien entre $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le problème 9 ?

Problème 12 ($\star$). *suite du problème précédent*
On considère la transformation R_φ, la rotation autour de l'origine, de φ degré dans le sens trigonométrique.

1. Déterminer les coordonnées polaires (r, θ) du point de coordonnées cartésiennes (x, y).
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x', y') du point de coordonnées polaires $(r, \theta+\varphi)$.
3. Exprimer (x', y') uniquement en fonction de x, y et φ.