Chapitre 1

Théorème de la résultante cinétique

A la fin de ce chapitre, vous serez capable de :

- définir le centre de masse d'un corps
- généraliser le principe fondamental de la dynamique à un corps de masse constante

Nous allons établir dans ce chapitre le principe fondamental de la dynamique pour un corps quelconque de masse constante. Nous obtenons alors le théorème de la résultante cinétique.

1.1 Centre de masse

Pour obtenir le théorème de la résultante cinétique, nous allons devoir introduire la notion de centre de masse. Par définition, le centre de masse G d'un corps de masse m a pour expression :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}} \tag{1.1}$$

où O est un point quelconque qui sert à repérer les différents points M_i du corps.

Illustrons le calcul du centre de masse avec les deux exemples de la figure 1.1. Dans le cas (a), nous avons $m_1 = m$ et $m_2 = m$ d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2}}{2m} \\ &= \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{2} \end{aligned}$$

Le point O est arbitraire, nous avons donc $\overrightarrow{M_1G} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{2}$. Comme attendu, le centre de masse G est au centre du corps dans ce cas. Dans le cas (b), nous avons $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$ d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{m\overrightarrow{OM_1} + 2m\overrightarrow{OM_2}}{3m} \\ &= \frac{\overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{OM_2}}{3} \end{aligned}$$

Le point O est arbitraire, nous avons donc $\vec{0} = \frac{\overrightarrow{GM_1} + 2\overrightarrow{GM_2}}{3}$ d'où $M_1G = 2M_2G$.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 1.**

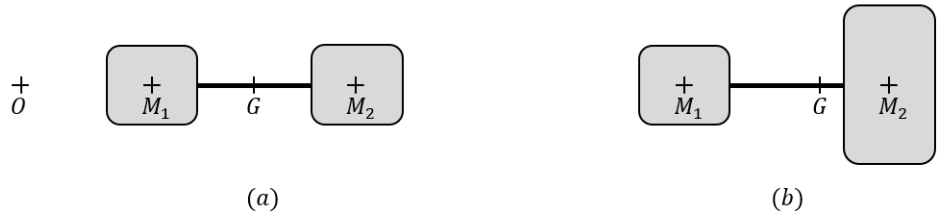

FIGURE 1.1 – (a) : $m_1 = m_2$. Le centre de masse G est au centre du corps dans ce cas. (b) : $m_2 = 2m_1$. $M_1G = 2M_2G$ dans ce cas.

1.2 Du principe fondamental de la dynamique au théorème de la résultante cinétique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule a pour expression :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Pour un corps quelconque de masse quelconque, nous obtenons :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i\overrightarrow{OM}_i\right) = \sum_i\sum_j \vec{F}_{j/i} + \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

où $\vec{F}_{j/i}$ représente la force exercée par les autres particules sur la particule i. Par définition du centre de masse, nous pouvons réécrire l'équation précédente :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}m\overrightarrow{OG} &= \sum_i\sum_{\substack{j\\ i\neq j}} \vec{F}_{j/i} + \sum_i \vec{F}_{i,ext}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\\ i\neq j}}\left(\vec{F}_{j/i}+\vec{F}_{i/j}\right) + \sum_i \vec{F}_{i,ext}\end{aligned}$$

où $\sum_{(i,j)}$ représente la somme sur tous les couples (i,j). La propriété des forces réciproques implique que $\vec{F}_{j/i} = -\vec{F}_{i/j}$ d'où :

$$\boxed{\frac{d}{dt}m\vec{v}_G = \vec{R}} \tag{1.2}$$

où $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$ est la résultante des forces extérieures. C'est le théorème de la résultante cinétique valide dans un référentiel Galiléen. Notons que nous n'avons pas supposé que le corps est indéformable dans la démonstration, le théorème est donc **valide pour les corps déformables** mais de masse constante.

✍ **Vous pouvez maintenant faire les exercices 2 et 3.**

1.3 Exemple

Considérons l'expérience schématisée sur la figure 1.2, un bloc de masse m_b est posé sur un support se masse m_s qui peut lui même glisser sans frottements sur une table à coussin d'air. Le bloc est lancé sur le support à l'instant initial avec la vitesse $\vec{v}_i$. Les frottements entre le bloc et le support entraîne ce dernier et nous notons $\vec{v}_f$ la vitesse commune du bloc et du support lorsque le bloc est immobile dans le référentiel du support.

Nous allons utiliser le théorème de la résultante cinétique au système {support + bloc} pour déterminer l'expression de $\vec{v}_f$ en fonction de $\vec{v}_i$. La résultante des forces extérieures qui s'appliquent sur le système est nulle, le théorème de la résultante cinétique implique donc que la vitesse du centre de masse est constante.

Or le centre de gravité a pour expression $\overrightarrow{OG} = \frac{m_s\overrightarrow{OM_s}+m_b\overrightarrow{OM_b}}{m_s+m_b}$ d'où :

$$\vec{v}_G = \frac{m_s\vec{v}_s + m_b\vec{v}_b}{m_s + m_b}$$

A l'instant initial, nous avons $\vec{v}_G = \frac{m_b\vec{v}_i}{m_s+m_b}$. A l'instant final, nous avons $\vec{v}_G = \frac{m_s\vec{v}_f+m_b\vec{v}_f}{m_s+m_b}$. Puisque la vitesse du centre de masse est constante, nous avons :

$$(m_s + m_b)\vec{v}_f = m_b\vec{v}_i$$

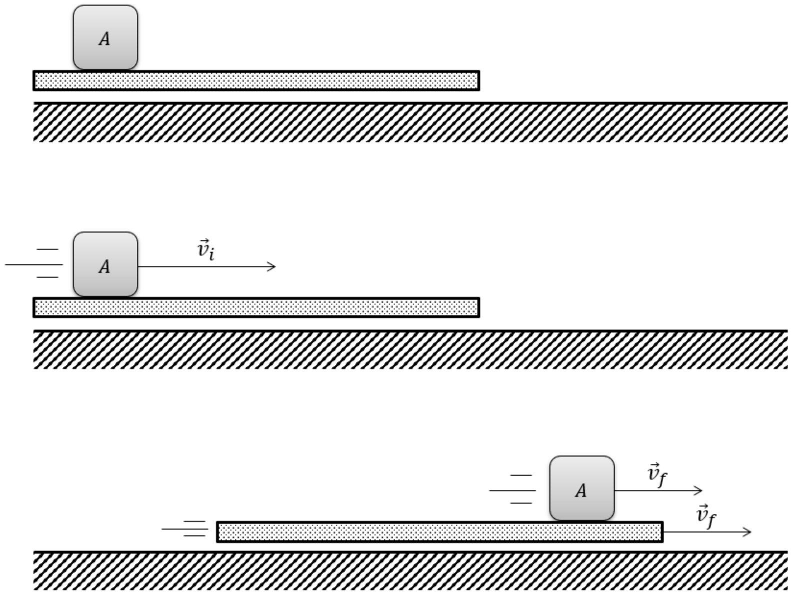

Figure 1.2 – Bloc lancé sur une table à coussin d'air..

Nous pouvons noter que l'énergie cinétique du système ne se conserve pas puisque des forces non conservatives travail pendant la transformation, nous avons en effet :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m_s + m_b)v_f^2 - \frac{1}{2}m_bv_i^2 = \frac{1}{2}\frac{m_b^2}{m_s + m_b}v_i^2 - \frac{1}{2}m_bv_i^2$$