

# Chapitre 1

## L'induction électromagnétique

A la fin de ce chapitre, vous serez capable de :

- calculer la force électromotrice et le courant induit dans un circuit fixe ou mobile plongé dans un champ magnétique variable ou permanent.

### 1.1 Induction électromagnétique de Neumann : cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

#### 1.1.1 Mise en évidence expérimentale et définition de la force électromotrice

Nous pouvons mettre en évidence expérimentalement l'induction d'un courant dans un circuit fixe dans le référentiel du laboratoire en considérant les expériences de la figure 1.1. Dans chaque expérience, le flux du champ magnétique à travers le circuit fixe est variable et nous constatons expérimentalement l'apparition d'un courant induit dans le circuit  $C_1$ . Nous pouvons donc retenir le concept suivant qui constitue la loi de Faraday :

**La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé provoque l'apparition d'un courant électrique induit dans le conducteur.**

De plus **le sens du courant induit est tel qu'il crée un champ magnétique qui tend à s'opposer à la variation du flux qui lui a donné naissance.** Ce principe supplémentaire, énoncé en 1834 par Heinrich Lenz, est appelé **la loi de Lenz.**

Si un courant se développe dans le conducteur  $C_1$ , cela traduit l'apparition d'un **champ électrique induit**  $\vec{E}$  - dit champ électromoteur - qui met en mouvement les porteurs de charges. La circulation de ce champ électrique entre deux points du circuit correspond à la différence de potentiels mesurable entre ces deux points. La circulation du champ électrique induit le long du circuit fermé est la **force électromotrice**  $e$  définie par :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.1)$$

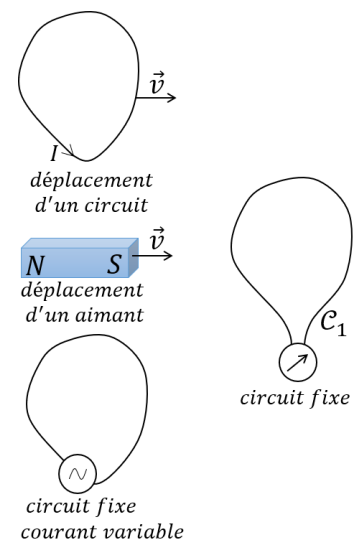


FIGURE 1.1 – Ensemble des causes qui peuvent produire un phénomène d'induction dans un circuit fixe.

Notons que la loi de Faraday reste valide en l'absence de circuit matériel. Nous pouvons alors dire que la variation temporelle du flux magnétique à travers une surface provoque l'apparition d'une différence de potentiel entre deux points quelconque du bord de la surface.

### 1.1.2 Loi de Faraday

Des mesures précises effectuées par Faraday ont permis de faire le lien quantitatif entre la variation temporelle du flux magnétique et la force électromotrice, c'est la **loi de Faraday** :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.2)$$

avec :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.3)$$

L'orientation de  $d\vec{S}$  et l'orientation du contour  $d\vec{l}$  sont reliées par la règle de la main droite (figure 1.2). Un choix simple est d'orienter  $d\vec{S}$  dans le sens de  $\vec{B}$  afin que le flux soit une quantité positive.

Notons que le signe "-" dans la loi de Faraday est la traduction mathématique de la loi de Lenz.

#### Exemple

Une bobine contient  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ . Un champ magnétique uniforme orienté perpendiculairement au plan de la bobine est activé et augmente linéairement selon l'équation  $B = \frac{t}{\tau}$  où  $\tau$  est une constante. La force électromotrice aux bornes des  $N$  spires est la somme de la force électromotrice aux bornes de chaque spire. Ainsi la force électromotrice aux bornes des  $N$  spires a donc pour expression  $e = -N \frac{d\Phi}{dt}$ . Le taux de variation du flux magnétique à travers une spire a pour expression  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi R^2}{\tau}$  et le module de la force électromotrice a donc pour expression  $e = N \frac{\pi R^2}{\tau}$ .

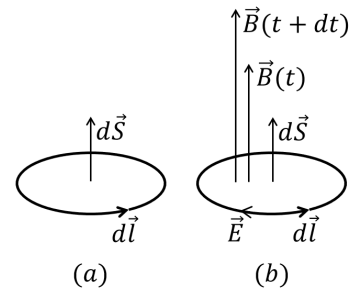


FIGURE 1.2 – (a) : Les orientations de  $d\vec{S}$  et de  $d\vec{l}$  sont reliés par la règle de la main droite. (b) :  $d\vec{S}$  est choisi dans le sens de  $\vec{B}$ , le flux magnétique qui passe à travers la surface est positif et il augmente au cours du temps donc  $\frac{d\Phi}{dt}$  est positif. La loi de Faraday implique la force électromotrice est négative, autrement dit le champ électrique induit est dans le sens opposé au sens de  $d\vec{l}$ .

### 1.1.3 Relation de Maxwell-Faraday

Nous cherchons à établir dans cette section la relation locale qui existe en un point fixe entre la variation temporelle du champ magnétique et le champ électrique induit. Nous partons de la loi de Faraday qui a pour expression :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le fait que le circuit soit fixe nous permet de commuter l'intégrale et l'opération de dérivation temporelle. Le flux du champ magnétique à travers une surface fixe ne dépend que du temps, nous pouvons donc passer de la dérivée totale à la dérivée partielle pour obtenir :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

📌 Vous pouvez maintenant faire les exercices 1 à 7.

Cette relation doit être valide quelque soit la surface, nous obtenons donc **l'équation de Maxwell-Faraday** qui a pour expression :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Notons que **nous n'avons jamais fait appel à un support matériel pour obtenir l'équation précédente qui est donc valide en tout point de l'espace**. Cette situation se retrouve également dans le fait que aucune caractéristique du matériau ne se retrouve dans la loi de Maxwell-Faraday.

👉 Vous pouvez maintenant faire l'exercice 8.

## 1.2 Induction électromagnétique de Lorentz : cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique constant

### 1.2.1 Champ électromoteur de Lorentz et force électromotrice

Nous considérons dans cette section un conducteur déplacé à la vitesse  $\vec{v}_e$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire où règne le champ  $\vec{B}$  permanent (figure 1.3). Les porteurs de charge ainsi entraînés sont soumis à la force magnétique  $\vec{f} = q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ . Cette force est à l'origine du courant induit dans le cadre et à l'origine de la différence de potentiel qui apparaît aux bornes du conducteur.

Nous pouvons montrer à l'aide du principe de relativité galiléenne<sup>1</sup> que le terme  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  s'interprète comme un champ électrique. En effet, la force qui s'applique sur un porteur mesurée par un observateur dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au conducteur doit être identique à la force qui s'applique sur les porteurs de charges dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Par ailleurs, l'observateur dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  doit décrire le mouvement en introduisant un champ électrique  $\vec{E}'$  à l'origine du courant électrique. Ainsi, l'égalité entre les forces a pour expression :

$$q((\vec{v}_e + \vec{v}) \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v} \wedge \vec{B}')$$

Nous obtenons donc :

$$\vec{E}' = \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}' \quad (1.5)$$

où  $\vec{E}'$  est le **champ électromoteur de Lorentz**.

Puisque le terme  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  représente le champ électrique dans la tige, la circulation de ce champ le long de la tige s'identifie à la force électromotrice et nous pouvons donc écrire :

$$e = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (1.6)$$

Cette formule permet de calculer **la force électromotrice lorsque le flux magnétique ne varie pas au cours du temps à travers le circuit**.

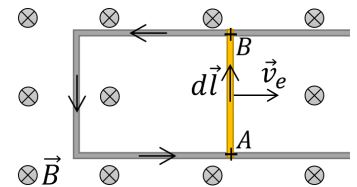


FIGURE 1.3 – Induction dans un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

1. Cela implique que nous considérons des vitesses de déplacement faible devant la vitesse de la lumière.

L'exemple typique de cette situation est l'étude de la roue de Barlow que nous étudions dans l'exemple suivant.

### Exemple

Une roue de Barlow est un disque conducteur de rayon  $R$  mobile autour d'un axe fixe noté  $Oz$  et placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\hat{u}_z$ . La roue est en contact avec un bain conducteur et est mise en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  (figure 1.4). Dans ce cas, le flux magnétique qui passe à travers la roue est constant et nous devons calculer la force électromotrice à partir de  $\int(\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{l}$ .

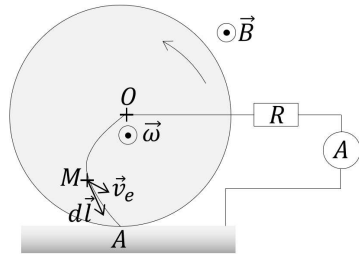


FIGURE 1.4 – Schéma d'une roue de Barlow génératrice. Le point  $O$  représente l'axe de rotation de la roue et le point  $A$  le point de contact entre la roue et le bain conducteur.

La vitesse  $\vec{v}_e$  d'un point quelconque de la roue situé à une distance radiale  $r$  de l'axe a pour expression  $\vec{v}_e = r\omega\hat{u}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ . La force électromotrice qui apparaît entre le point de contact de la roue avec le bain et l'axe de la roue où est connecté le fil électrique est donc donnée par  $e = \int((\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{B}).d\vec{l}$  avec  $d\vec{l} = dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta$ . La relation du double produit vectoriel  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  permet d'écrire que  $e = \int B\omega\overrightarrow{OM} \cdot (dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta) = \int_0^R B\omega r dr = B\omega \frac{R^2}{2}$ . Si le circuit électrique a une résistance électrique  $R_{el}$  alors le courant électrique qui circule dans le circuit a pour expression  $i = B\omega \frac{R^2}{2R_{el}}$ .

Vous pouvez maintenant faire les exercices 9 à 11.

### 1.2.2 La loi de Faraday retrouvée

Nous allons montrer dans cette section que nous pouvons retrouver la loi de Faraday à partir de la circulation du champ électromoteur de Lorentz dans le cas où le circuit "coupe" le flux magnétique dans son déplacement. Nous partons de :

$$e_{AB}dt = \int_A^B (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{l}dt$$

Or pendant  $dt$ , le conducteur s'est déplacé de  $d\vec{r} = \vec{v}_e dt$  d'où :

$$e_{AB}dt = \int_A^B (d\vec{r} \wedge \vec{B}).d\vec{l}$$

La relation cyclique  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$  permet d'obtenir :

$$e_{AB}dt = \int_A^B (d\vec{l} \wedge d\vec{r}).\vec{B} = - \int_A^B (d\vec{r} \wedge d\vec{l}).\vec{B}$$

La figure 1.5 montre que  $d\vec{r} \wedge d\vec{l} = d\vec{S}$  où l'orientation de  $d\vec{S}$  est donnée par la règle de la main droite par rapport à l'orientation  $d\vec{l}$  du contour.

Nous obtenons donc :

$$e_{AB}dt = -d\Phi_C$$

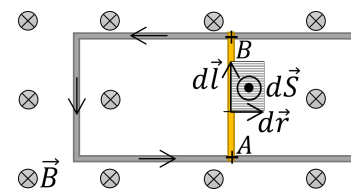


FIGURE 1.5 – Élément de surface balayé par le vecteur  $d\vec{l}$  pendant  $dt$ .

où  $d\Phi_C = \int_A^B \vec{B} \cdot (d\vec{r} \wedge d\vec{l})$  est le flux magnétique coupé par la tige lorsqu'elle se déplace de  $d\vec{r}$ . Il est possible de montrer que le flux coupé par le circuit est égale à la variation  $d\Phi$  du flux magnétique à travers le circuit (figure 1.6).

Nous obtenons donc :

$$e_{AB} dt = -d\Phi$$

soit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.7)$$

Nous retrouvons ainsi la loi de Faraday qui peut donc s'appliquer dans un cas plus général que celui d'un circuit fixe.

En écrivant  $\Phi = \iint B dS \cos \theta$ , nous voyons apparaître trois causes à l'apparition d'une force électromotrice.

- le champ magnétique dépend du temps.
- La surface  $S$  du circuit varie au cours du temps.
- L'angle  $\theta$  entre le champ magnétique et le circuit varie au cours du temps. Cette dernière situation est importante puisque c'est celle rencontrée dans les alternateurs.

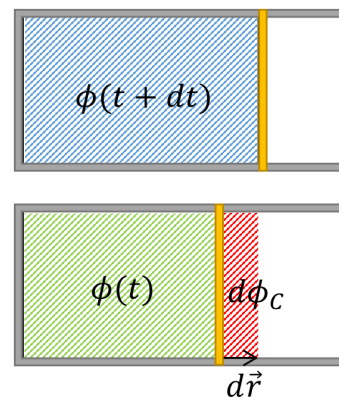


FIGURE 1.6 – Lien entre le flux coupé (en rouge) et la variation du flux (région bleue - région verte). On constate sur cette figure que  $d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = d\Phi_C$ .

### 1.3 La loi de Lenz

Pour finir ce chapitre, nous allons revenir sur l'utilisation de la loi de Lenz qui permet de déterminer sans calcul l'orientation du courant induit.

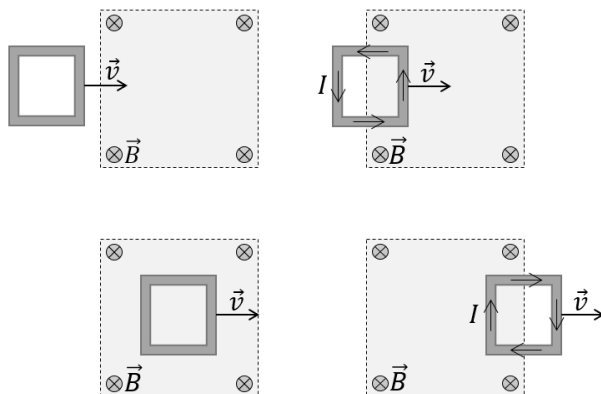


FIGURE 1.7 – Illustration de la loi de Lenz. Le sens du courant induit qui apparaît dans le conducteur crée un champ magnétique qui s'oppose à la variation du flux magnétique à travers le conducteur.

La figure 1.7 montre un cadre conducteur en translation à **vitesse constante** au dessus d'une région où règne un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la page.

La figure montre que le cadre conducteur est parcouru par un courant **uniquement lorsque le cadre pénètre ou sort de la région de champ magnétique**. C'est en effet uniquement à la frontière que le flux magnétique à travers le cadre varie. La loi de Lenz implique que le courant induit dans un cadre est tel que le champ magnétique généré par le courant induit s'oppose à la variation du flux magnétique externe qui traverse le cadre.

Ainsi, dans le schéma (b), le sens de circulation du courant génère d'après la règle de la main droite, un champ magnétique orienté vers les yeux du lecteur de tel sorte à diminuer la variation du flux du champ magnétique à travers le cadre.

🔗 Vous pouvez maintenant faire les exercices 12 à 15.

Le montage de la figure 1.8 montre un autre exemple d'application de la loi de Lenz. Dans ce montage, le champ magnétique est constant mais une tige conductrice mobile roule vers la droite sur un cadre métallique, ainsi le flux du champ magnétique qui passe à travers le cadre augmente ce qui provoque la circulation d'un courant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

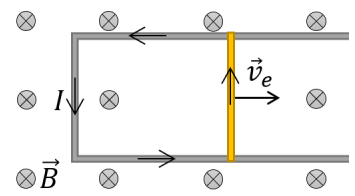


FIGURE 1.8 – Un "générateur linéaire" plongé dans un champ magnétique permanent. Le mouvement de la tige provoque une variation du flux magnétique à travers le cadre. Le sens du courant produit par ce mouvement est donné par la loi de Lenz.